PARA EMPEZAR, REFLEXIONA Y RESUELVE (Pág 266)

Lanzamiento de varios dados

_ *Comprobación de que:*

Desviación típica de n dados = (Desv. típica para un dado) / $\sqrt{n}$

$$n = 2 \Rightarrow \frac{1{,}71}{\sqrt{2}} = 1{,}209 \approx 1{,}21$$

$$n = 3 \Rightarrow \frac{1{,}71}{\sqrt{3}} = 0{,}987 \approx 0{,}98$$

$$n = 4 \Rightarrow \frac{1{,}71}{\sqrt{4}} = 0{,}855 \approx 0{,}86$$

_ *Justificación de las afirmaciones mirando la gráfica:*

✳ Observamos que, al aumentar el número de dados, n, la forma de la curva se parece cada vez más a la forma de la curva normal.

✳ Son todas curvas simétricas. La media de todas ellas coincide, 3,5.

✳ A medida que aumenta n, hay más resultados en la parte central (próxima a la media) y menos en los extremos; por tanto, menor es la desviación típica.

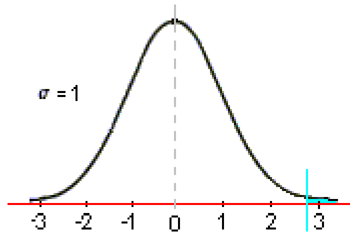
Ejercicios propuestos (Pág 277)

① *Halla las siguientes probabilidades en una distribución N(0, 1):*

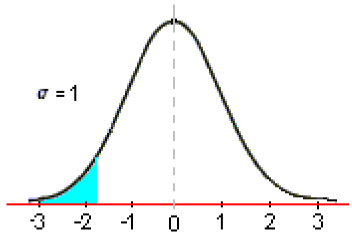
a) $P[z > 2{,}8]$
b) $P[z \leq -1{,}8]$
c) $P[z > -1{,}8]$
d) $P[1{,}62 \leq - z < 2{,}3]$
e) $P[1 \leq z \leq 2]$
f) $P[-0{,}61 \leq z \leq 1{,}4]$
g) $P[-1 \leq z \leq 2]$
h) $P[-2{,}3 < z < -1{,}7]$
i) $P[-2 \leq z \leq -1]$

a) p[z > 2,8] = 1 – p[z ≤ 2,8] = 1 – 0,9974 = 0,0026.

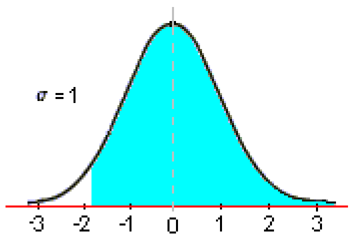
b) p[z ≤ - 1,8] = p[z ≥ 1,8] = 1 – p[z ≤ 1,8] = 1 – 0,9641 = 0,0359.



p[z > 2,8]



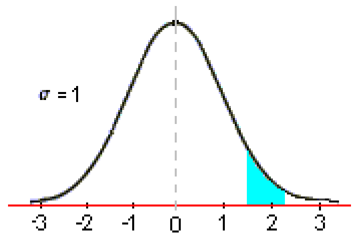
p[z ≤ - 1,8]



p[z > - 1,8]

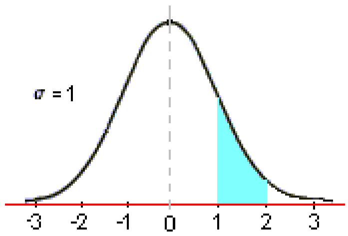
c) p[z > - 1,8] = p[z < 1,8] = 0,9641.

d) p[1,62 ≤ z < 2,3] = p[z ≤ 2,3] – p[z ≤ 1,62] = 0,9893 – 0,9474 = 0,0419.

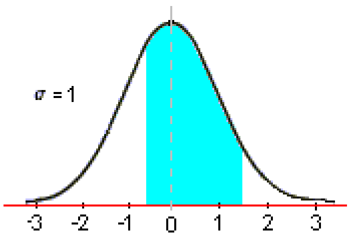


p[1,62≤ z < 2,3]

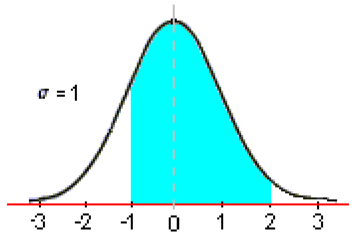
e) p[1 ≤ z ≤ 2] = p[z ≤ 2] – p[z ≤ 1] = 0,9772 – 0,8413 = 0,1359.



p[1≤ z ≤ 2]



p[-0,61 ≤ z ≤1,4]

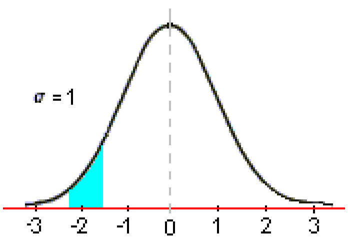


p[-1 ≤ z ≤ 2]

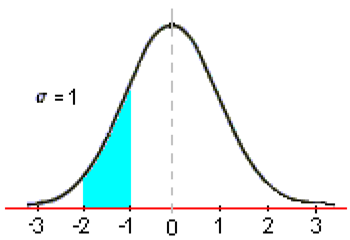
f) p[–0,61 ≤ z ≤ 1,4] = p[z ≤ 1,4] – p[z ≤ –0,61] = p[z ≤ 1,4] – p[z ≥ 0,61] = p[z ≤ 1,4] – (1 – p[z ≤ 0,61]) = 0,9192 – (1 – 0,7291) = 0,6483.

g) p[–1 ≤ z ≤ 2] = p[z ≤ 2] – p[z ≤ –1] = p[z ≤ 2] – p[z ≥ 1] = p[z ≤ 2] – (1 – p[z ≤ 1]) = 0,9772 – (1 – 0,8413) = 0,8185.

h) p[–2,3 < z < –1,7] = p[1,7 < z < 2,3] = p[z < 2,3] – p[z < 1,7] = 0,9893 – 0,9554 = 0,0339.



p[-2,3 < z < -1,7]



p[-2≤ z≤ -1]

i) p[–2 ≤ z ≤ –1] = p[1 ≤ z ≤ 2] = p[z ≤ 2] – p[z ≤ 1] = 0,9772 – 0,8413 = 0,1359.

② *Calcula el valor de k (exacta o aproximadamente) en cada uno de los siguientes casos:*

a) $P[z \leq k] = 0{,}5$
b) $P[z \leq k] = 0{,}8729$
c) $P[z \leq k] = 0{,}9$
d) $P[z \leq k] = 0{,}33$
e) $P[z \leq k] = 0{,}2$
f) $P[z > k] = 0{,}12$
g) $P[z \geq k] = 0{,}9971$
h) $P[z \geq k] = 0{,}6$

❈❈❈❈❈✪❈❈❈❈❈

a) $p[z \leq k] = 0{,}5 \Rightarrow k = 0$.

b) $p[z \leq k] = 0{,}8729 \Rightarrow k = 1{,}14$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,519
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,559
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,598
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,636
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,673
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,708
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,742
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,773
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,802
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,828
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,853
1,1	0,8643	0,8665	[illegible]	[illegible]	0,8729	0,874

c) $p[z \leq k] = 0{,}9 \Rightarrow k \approx 1{,}28$.

d) $p[z \leq k] = 0{,}33$, $p[z \geq -k] = 0{,}33 \Rightarrow p[z \leq -k] = 1 - 0{,}33 = 0{,}67 \Rightarrow -k = 0{,}44 \Rightarrow k = -0{,}44$.

e) $p[z \leq k] = 0{,}2$, $p[z \leq -k] = 1 - 0{,}2 = 0{,}8 \Rightarrow -k \approx 0{,}84 \Rightarrow k \approx -0{,}84$.

f) $p[z > k] = 0{,}12$, $p[z \leq k] = 1 - 0{,}12 = 0{,}88 \Rightarrow k \approx 1{,}175$.

g) $p[z \geq k] = 0{,}9971$, $p[z \leq -k] = 0{,}9971 \Rightarrow -k = 2{,}76 \Rightarrow k = -2{,}76$.

h) $p[z \geq k] = 0{,}6$, $p[z \leq -k] = 0{,}6 \Rightarrow -k \approx 0{,}25 \Rightarrow k \approx -0{,}25$

❈❈❈❈❈✪❈❈❈❈❈

Ejercicios propuestos (Pág 278)

③ *En una distribución N(18, 4), halla las siguientes probabilidades:*

a) $P[x \leq 20]$
b) $P[x \geq 16{,}5]$
c) $P[x \leq 11]$
d) $P[19 \leq x \leq 23]$
e) $P[11 \leq x \leq 25]$

❈❈❈❈❈✪❈❈❈❈❈

Para resolver estos ejercicios hay que pasar de una normal N(18, 4) a una N(0, 1) y después usar la tabla.

a) $p[x \leq 20] = p\left[z \leq \dfrac{x - \bar{x}}{\sigma}\right] = p\left[z \leq \dfrac{20 - 18}{4}\right] = p[z \leq 0{,}5] = 0{,}6915$

b) $p[x \geq 16{,}5] = p\left[z \geq \frac{x-\bar{x}}{\sigma}\right] = p\left[z \geq \frac{16{,}5-18}{4}\right] = p[z \geq -0{,}38] = p[z \leq 0{,}38] = 0{,}6480$.

c) $p[x \leq 11] = p\left[z \leq \frac{x-\bar{x}}{\sigma}\right] = p\left[z \leq \frac{11-18}{4}\right] = p[z \leq -1{,}75] = p[z \geq 1{,}75] = 1 - p[z \leq 1{,}75] = 1 - 0{,}9599 = 0{,}0401$.

d) $p[19 \leq x \leq 23] = p[\frac{19-18}{4} \leq z \leq \frac{23-18}{4}] = p[0{,}25 \leq z \leq 1{,}25] = p[z \leq 1{,}25] - p[z \leq 0{,}25] = 0{,}8944 - 0{,}5987 = 0{,}2957$.

e) $p[11 \leq x < 25] = p[\frac{11-18}{4} \leq z \leq \frac{25-18}{4}] = p[-1{,}75 \leq z \leq 1{,}75] = p[z \leq 1{,}75] - p[z \leq -1{,}75] = p[z \leq 1{,}75] - p[z \geq 1{,}75] = 2p[z \leq 1{,}75] - 1 = 2 \cdot 0{,}9599 - 1 = 0{,}9198$.

④ *En una distribución N(6; 0,9), calcula k para que se den las siguientes igualdades:*

a) $P[x \leq k] = 0{,}9772$
b) $P[x \leq k] = 0{,}8$
c) $P[x \leq k] = 0{,}3$
d) $P[x \geq k] = 0{,}6331$

a) $p[x \leq k] = 0{,}9772$; $p[x \leq k] \overset{(1)}{=} p\,[z \leq \frac{k-6}{0{,}9}] = 0{,}9772 \Rightarrow \frac{k-6}{0{,}9} = 2 \Rightarrow k = 7{,}8$

b) $p[x \leq k] = 0{,}8$; $p[x \leq k] \overset{(1)}{=} [z \leq \frac{k-6}{0{,}9}] = 0{,}8 \Rightarrow \frac{k-6}{0{,}9} \approx 0{,}84 \Rightarrow k \approx 6{,}756$

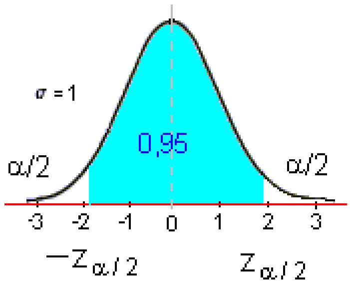
c) $p[x \leq k] = 0{,}3$; $p[x \leq k] \overset{(1)}{=} p[z \leq \frac{k-6}{0{,}9}] = 0{,}3 \Rightarrow -\frac{k-6}{0{,}9} \approx 0{,}52 \Rightarrow k \approx 5{,}532$

d) $p[x \geq k] = 0{,}6331$; $p[x \geq k] \overset{(1)}{=} p[z \geq \frac{k-6}{0{,}9}] = 0{,}6331 \Rightarrow \frac{k-6}{0{,}9} = 0{,}34 \Rightarrow k = 5{,}694$.

(1) Tipificando, pasando de una N(6, 0,9) a N(0, 1).

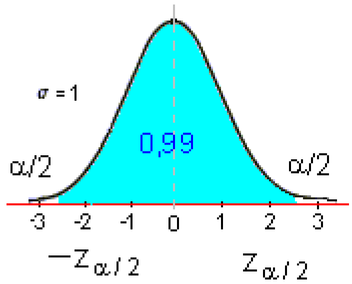
Ejercicios propuestos (Pág 279)

① *Calcula razonadamente los valores críticos correspondientes a las probabilidades 0,95 y 0,99.*



$1 - \alpha = 0,95$, $\alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025$, luego tenemos que buscar el valor de z tal que la probabilidad por debajo de ella sea $0,95 + 0,025 = 0,975$ ($p[z \le z_{\alpha/2}] = 0,975 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$.

$1 - \alpha = 0,99$, $\alpha = 1 - 0,99 = 0,01 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,005$, luego tenemos que buscar el valor de z tal que la probabilidad por debajo de ella sea $0,99 + 0,005 = 0,995$ ($p[z \le z_{\alpha/2}] = 0,995 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2,575$.



② *Calcula los valores críticos correspondientes:*

a) $\alpha = 0,09$ **b)** $\alpha = 0,21$ **c)** $\alpha = 0,002$

a) $\alpha = 0,09$ ($1 - \alpha = 0,91$) $\Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,045$, luego tenemos que buscar el valor de z tal que la probabilidad por debajo de ella sea $0,91 + 0,045 = 0,955$ ($p[z \le z_{\alpha/2}] = 0,955 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,695$.

b) $\alpha = 0,21$ ($1 - \alpha = 0,79$) $\Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,105$, luego tenemos que buscar el valor de z tal que la probabilidad por debajo de ella sea $0,79 + 0,105 = 0,895$ ($p[z \le z_{\alpha/2}] = 0,895 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,25$.

c) $\alpha = 0,002$ ($1 - \alpha = 0,998$) $\Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,001$, luego tenemos que buscar el valor de z tal que la probabilidad por debajo de ella sea $0,998 + 0,001 = 0,999$ ($p[z \le z_{\alpha/2}] = 0,999 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 3,08$.

Ejercicios propuestos (Pág 280)

③ *En una distribución N(173, 6) halla los intervalos característicos para el 90%, el 95% y el 99%.*

- Para el 90 %

$1 - \alpha = 0,90$, $\alpha = 1 - 0,90 = 0,09 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,045$, luego tenemos que buscar el valor de z tal que la probabilidad por debajo de ella sea 0,90 + 0,045 = 0,945 ($p[z \leq z_{\alpha/2}] = 0,945 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,64$.
El intervalo característico es $(\mu - z_{\alpha/2}\cdot\sigma, \mu + z_{\alpha/2}\cdot\sigma) = (173 - 1,64\cdot6 , 173 + 1,64\cdot6) = (163,16, 182,84)$.

❁ Para el 95 %

$1 - \alpha = 0,95$, $\alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025$, luego tenemos que buscar el valor de z tal que la probabilidad por debajo de ella sea 0,95 + 0,025 = 0,975 ($p[z \leq z_{\alpha/2}] = 0,975 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$.
El intervalo característico es $(\mu - z_{\alpha/2}\cdot\sigma, \mu + z_{\alpha/2}\cdot\sigma) = (173 - 1,96\cdot6 , 173 + 1,96\cdot6) = (161,24, 184,76)$.

❁ Para el 99 %

$1 - \alpha = 0,99$, $\alpha = 1 - 0,99 = 0,01 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,005$, luego tenemos que buscar el valor de z tal que la probabilidad por debajo de ella sea 0,99 + 0,005 = 0,995 ($p[z \leq z_{\alpha/2}] = 0,995 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2,575$.
El intervalo característico es $(\mu - z_{\alpha/2}\cdot\sigma, \mu + z_{\alpha/2}\cdot\sigma) = (173 - 2,575\cdot6 , 173 + 2,575\cdot6) = (157,55, 188,45)$.

Observa como al aumentar el nivel de confianza el intervalo característico se va ampliando.

❁❁❁❁❁❁✪❁❁❁❁❁❁

④ En una distribución N(18, 4) halla los intervalos característicos para el 95% y el 99,8%.

❁❁❁❁❁❁✪❁❁❁❁❁❁

❁ Para el 95 %

$1 - \alpha = 0,95$, $\alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025$, luego tenemos que buscar el valor de z tal que la probabilidad por debajo de ella sea 0,95 + 0,025 = 0,975 ($p[z \leq z_{\alpha/2}] = 0,975 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$.
El intervalo característico es $(\mu - z_{\alpha/2}\cdot\sigma, \mu + z_{\alpha/2}\cdot\sigma) = (18 - 1,96\cdot4 , 18 + 1,96\cdot4) = (10,16, 25,84)$.

❁ Para el 99,8 %

$1 - \alpha = 0,998$, $\alpha = 1 - 0,998 = 0,002 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,001$, luego tenemos que buscar el valor de z tal que la probabilidad por debajo de ella sea 0,998 + 0,001 = 0,999 ($p[z \leq z_{\alpha/2}] = 0,999 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 3,08$.
El intervalo característico es $(\mu - z_{\alpha/2}\cdot\sigma, \mu + z_{\alpha/2}\cdot\sigma) = (18 - 3,08\cdot4 , 18 + 3,08\cdot4) = (5,68, 30,32)$.

❁❁❁❁❁❁✪❁❁❁❁❁❁

Ejercicios propuestos (Pág 283)

①. *Los parámetros de una variable son: μ = 16,4, σ = 4,8. Nos disponemos a extraer una muestra de n = 400 individuos:*

a) *Halla el intervalo característico para las medias muestrales correspondientes a una probabilidad p = 0,99.*
b) *Calcula P[16 < x < 17].*

❇❇❇❇❇❇✪❇❇❇❇❇❇

Como n > 30, las medias muestrales se distribuyen según una normal de media μ = 16,4 y de desviación típica = $\sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{4,8}{\sqrt{400}} = 0,24$; es decir: $\bar{x}$ es N(16,4; 0,24).

a) Para α = 0,99 ⇒ $z_{\alpha/2}$ = 2,575 y el intervalo característico es: (16,4 – 2,575 · 0,24; 16,4 + 2,575 · 0,24); es decir: (15,78; 17,02).

b) $p[16 < \bar{x} < 17] = p[\frac{16-16,4}{0,24} < z < \frac{17-16,4}{0,24}]$ = p[–1,67 < z < 2,5] = p[z < 2,5] – p[z < –1,67] = p[z < 2,5] – p[z > 1,67] = p[z < 2,5] – (1 – p[z ≤ 1,67]) = 0,9938 – (1 – 0,9525) = 0,9463.

❇❇❇❇❇❇✪❇❇❇❇❇❇

② *Los sueldos, en euros, de los empleados de una fábrica se distribuyen N(1 200, 400). Se elige al azar una muestra de 25 de ellos. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de sus sueldos sea superior a 35 000 €? Halla el intervalo característico para las sumas de 25 individuos, correspondientes a una probabilidad del 0,9.*

❇❇❇❇❇❇✪❇❇❇❇❇❇

La suma de los sueldos sigue una distribución normal de media nμ = 25 · 1 200 = 30 000 € y de desviación típica $\sigma = 400 \cdot \sqrt{n} = 400 \cdot \sqrt{25}$ = 400 · 5 = 2 000 €; es decir:

Σx es N(30 000; 2 000)

Por tanto: $p[\Sigma x > 35\,000] = p[z > \frac{35000-30000}{2000}]$ = p[z > 2,5] = 1 – p[z ≤ 2,5] = 1 – 0,9938 = 0,0062. Y el intervalo característico para una probabilidad del 0,9 es:
(30 000 – 1,645 · 2 000; 30 000 + 1,645 · 2 000); es decir: (26 710; 33 290)

❇❇❇❇❇❇✪❇❇❇❇❇❇

Ejercicios propuestos (Pág 287)

① De una variable estadística conocemos la desviación típica, σ = 8, pero desconocemos la media, μ. Para estimarla, extraemos una muestra de tamaño n = 60 cuya media obtenemos x̄ = 37. Estima μ mediante un intervalo de confianza del 99%.

✲✲✲✲✲✲✲✲✲✲✲✲

Para un nivel de confianza del 99% sabemos que $z_{\alpha/2}$ = 2,575 y el intervalo de confianza para μ será: $\left(37 - 2{,}575 \cdot \frac{8}{\sqrt{60}} ;\ 37 + 2{,}575 \cdot \frac{8}{\sqrt{60}}\right)$; es decir, (34,34; 39,66)

Por tanto, tenemos una confianza del 99% de que μ esté comprendida entre 34,34 y 39,66.

✲✲✲✲✲✲✲✲✲✲✲✲

Ejercicios propuestos (Pág 288)

① La desviación típica de las estaturas de los soldados es de 5,3 cm. ¿Qué tamaño ha de tener la muestra para estimar la estatura media, μ de la población con un error menor de 0,5 cm y con un nivel de confianza del 95%?

✲✲✲✲✲✲✲✲✲✲✲✲

Para un nivel de confianza del 95% (α = 0,05), sabemos que $z_{\alpha/2}$ = 1,96. El error máximo admisible viene dado por :

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Como queremos que E < 0,5 cm. Despejamos n: $1{,}96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 0{,}5 \Leftrightarrow n > \frac{1.96 \cdot 5{,}3}{0{,}5} \Leftrightarrow n > 20{,}776^2 = 431{,}64$. La muestra ha de ser de, al menos, 432 soldados.

✲✲✲✲✲✲✲✲✲✲✲✲

② Sabemos que la desviación típica de los pesos de los pollos adultos es 300 g. Queremos estimar el peso medio de los pollos adultos de una granja con un error menor que 100 g y para ello tomamos una muestra de 50 individuos. ¿Con qué nivel de confianza podremos realizar la estimación?

✲✲✲✲✲✲✲✲✲✲✲✲

Despejamos zα/2 en la fórmula del error: $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{E\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{100\sqrt{50}}{300} = 2{,}36$

Y ahora ya podemos hallar el nivel de confianza:

$p[z < z_{\alpha/2}] = p[z < 2{,}36] = 0{,}9909 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = p[z \geq 2{,}36] = 1 - 0{,}9909 = 0{,}0091$

$\alpha = 2 \cdot 0{,}091 = 0{,}0182 \Rightarrow 1 - \alpha = 0{,}9818$. El nivel de confianza es del 98,18%.

✲✲✲✲✲✲✲✲✲✲✲✲

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Intervalos característicos

① *En las distribuciones normales cuyos parámetros se dan, halla el intervalo característico que en cada caso se indica:*

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)
Media (μ)	0	0	0	0	112	3 512	3 512	3 512	3 512
D. T. (σ)	1	1	1	1	15	550	550	550	550
Proba. $1-\alpha$	0,95	0,99	0,90	0,80	0,95	0,99	0,95	0,90	0,80

a) $1 - \alpha = 0,95$, $\alpha = 1 – 0,95 = 0,05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025$, luego tenemos que buscar el valor de z tal que la probabilidad por debajo de ella sea 0,95 + 0,025 = 0,975 ($p[z \le z_{\alpha/2}] = 0,975 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$. El intervalo característico es ($\mu - z_{\alpha/2}\cdot\sigma$, $\mu + z_{\alpha/2}\cdot\sigma$) = (0 – 1,96·1 , 0 + 1,96·1) = (-1,96, 1,96).

b) $1 - \alpha = 0,99$, $\alpha = 1 – 0,99 = 0,01 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,005$, luego tenemos que buscar el valor de z tal que la probabilidad por debajo de ella sea 0,99 + 0,005 = 0,995 ($p[z \le z_{\alpha/2}] = 0,995 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2,575$. El intervalo característico es ($\mu - z_{\alpha/2}\cdot\sigma$, $\mu + z_{\alpha/2}\cdot\sigma$) = (0 – 2,575·1 , 0 + 2,575·1) = (-2,575, 2,575).

c) $1 - \alpha = 0,90$, $\alpha = 1 – 0,90 = 0,10 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,05$, luego tenemos que buscar el valor de z tal que la probabilidad por debajo de ella sea 0,90 + 0,05 = 0,95 ($p[z \le z_{\alpha/2}] = 0,95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,64$. El intervalo característico es ($\mu - z_{\alpha/2}\cdot\sigma$, $\mu + z_{\alpha/2}\cdot\sigma$) = (0 – 1,64·1 , 0 + 1,64·1) = (-1,64, 1,64).

d) $1 - \alpha = 0,80$, $\alpha = 1 – 0,80 = 0,20 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,10$, luego tenemos que buscar el valor de z tal que la probabilidad por debajo de ella sea 0,80 + 0,10 = 0,90 ($p[z \le z_{\alpha/2}] = 0,90 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,28$. El intervalo característico es ($\mu - z_{\alpha/2}\cdot\sigma$, $\mu + z_{\alpha/2}\cdot\sigma$) = (0 – 1,28·1 , 0 + 1,28·1) = (-1,28, 1,28).

e) $1 - \alpha = 0,95$, $\alpha = 1 – 0,95 = 0,05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025$, luego tenemos que buscar el valor de z tal que la probabilidad por debajo de ella sea 0,95 + 0,025 = 0,975 ($p[z \le z_{\alpha/2}] = 0,975 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$.

El intervalo característico es (μ - $z_{\alpha/2}\cdot\sigma$, μ + $z_{\alpha/2}\cdot\sigma$) = (112 – 1,96·15 , 112 + 1,96·15) = (82,6, 141,4).

f) 1 - α = 0, 99, α = 1 – 0,99 = 0,01 $\Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}005$, luego tenemos que buscar el valor de z tal que la probabilidad por debajo de ella sea 0,99 + 0,005 = 0,995 ($p[z \leq z_{\alpha/2}] = 0{,}995 \Rightarrow z_{\alpha/2}$ = 2,575. El intervalo característico es (μ - $z_{\alpha/2}\cdot\sigma$, μ + $z_{\alpha/2}\cdot\sigma$) = (3 512 – 2,575·550 , 3 512 + 2,575·550) = (2 095,75, 4928,25).

g) 1 - α = 0, 95, α = 1 – 0,95 = 0,05 $\Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}025$, luego tenemos que buscar el valor de z tal que la probabilidad por debajo de ella sea 0,95 + 0,025 = 0,975 ($p[z \leq z_{\alpha/2}] = 0{,}975 \Rightarrow z_{\alpha/2}$ = 1,96. El intervalo característico es (μ - $z_{\alpha/2}\cdot\sigma$, μ + $z_{\alpha/2}\cdot\sigma$) = (3 512 – 1,96·550 , 3 512 – 1,96·550) = (2434, 4590).

h) 1 - α = 0, 90, α = 1 – 0,90 = 0,10 $\Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}05$, luego tenemos que buscar el valor de z tal que la probabilidad por debajo de ella sea 0,90 + 0,05 = 0,95 ($p[z \leq z_{\alpha/2}] = 0{,}95 \Rightarrow z_{\alpha/2}$ = 1,64. El intervalo característico es (μ - $z_{\alpha/2}\cdot\sigma$, μ + $z_{\alpha/2}\cdot\sigma$) = (3 512 – 1,64·550 , 3 512 – 1,64·550) = (2610, 4414).

i) 1 - α = 0, 80, α = 1 – 0,80 = 0,20 $\Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}10$, luego tenemos que buscar el valor de z tal que la probabilidad por debajo de ella sea 0,80 + 0,10 = 0,90 ($p[z \leq z_{\alpha/2}] = 0{,}90 \Rightarrow z_{\alpha/2}$ = 1,28.
El intervalo característico es (μ - $z_{\alpha/2}\cdot\sigma$, μ + $z_{\alpha/2}\cdot\sigma$) = (3 512 – 1,28·550 , 3 512 – 1,28·550) = (2808, 4216).

❀❀❀❀❀❀✪❀❀❀❀❀❀

② En una distribución normal con media μ = 25 y desviación típica σ = 5,3: obtén un intervalo centrado en la media, (μ - k, μ + k), de forma que el 95% de los individuos estén en ese intervalo.

❀❀❀❀❀❀✪❀❀❀❀❀❀

1 - α = 0, 95, α = 1 – 0,95 = 0,05 $\Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}025$, luego tenemos que buscar el valor de z tal que la probabilidad por debajo de ella sea 0,95 + 0,025 = 0,975 ($p[z \leq z_{\alpha/2}] = 0{,}975 \Rightarrow z_{\alpha/2}$ = 1,96. El intervalo característico es (μ - $z_{\alpha/2}\cdot\sigma$, μ + $z_{\alpha/2}\cdot\sigma$) = (25 – 1,96·5,3 , 25 – 1,96·5,3) = (14,612, 35,388).

❀❀❀❀❀❀✪❀❀❀❀❀❀

③ *En una distribución N(10, 4), obtén un intervalo centrado en la media (μ - k, μ + k), tal que:*

$$P[\mu - k < x < \mu + k] = 0{,}90$$

❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋

1 - α = 0, 90, α = 1 – 0,90 = 0,10 $\Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}05$, luego tenemos que buscar el valor de z tal que la probabilidad por debajo de ella sea 0,90 + 0,05 = 0,95 ($p[z \le z_{\alpha/2}] = 0{,}95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}64$.
El intervalo característico es ($\mu - z_{\alpha/2}\cdot\sigma$, $\mu + z_{\alpha/2}\cdot\sigma$) = (10 – 1,64·4 , 10 – 1,64·4) = (3,44, 16,56).

❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋

④ *En una distribución normal de media μ = 9,5 y varianza σ^2 = 1,44, halla el intervalo característico para el 99%.*

❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋

Si la varianza = $\sigma^2 = 1{,}44 \Leftrightarrow \sigma = \sqrt{1{,}44} = 1{,}2$

1 - α = 0, 99, α = 1 – 0,99 = 0,01 $\Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}005$, luego tenemos que buscar el valor de z tal que la probabilidad por debajo de ella sea 0,99 + 0,005 = 0,995 ($p[z \le z_{\alpha/2}] = 0{,}995 \Rightarrow z_{\alpha/2}$ = 2,575. El intervalo característico es ($\mu - z_{\alpha/2}\cdot\sigma$, $\mu + z_{\alpha/2}\cdot\sigma$) = (9,5 – 2,575·1,2 , 9,5 + 2,575·1,2) = (6,41, 12,59).

❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋

Teorema Central del límite.

⑤ *De una variable aleatoria x de distribución desconocida, media μ = 23 y desviación típica σ = 3,5 se extraen muestras de tamaño n. ¿Qué se puede decir de la distribución de las medias muestrales, $\bar{x}$:*

a) *en el caso de que n = 49?*

b) *en el caso de que n = 25?*

❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋

a) Como n = 49 > 30, es una distribución muestral de medias normal de parámetros:

❍ Media de la distribución = media de la población = μ(x) = μ = 23.

❍ Desviación típica de la distribución = σ(x) = $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{3{,}5}{\sqrt{49}} = \frac{3{,}5}{7} = 0{,}5$

Luego la distribución muestral es N(23, 0,5).

b) Como n = 25 < 30, no podemos asegurar que la distribución sea de tipo normal (a menos que la población de partida sea normal), pero sí sabemos sus parámetros:

❍ Media de la distribución = media de la población = $\mu(x) = \mu = 23$.

❍ Desviación típica de la distribución = $\sigma(x) = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{3,5}{\sqrt{25}} = \dfrac{3,5}{5} = 0,7$

❁❁❁❁❁✪❁❁❁❁❁❁

⑥ *Una variable aleatoria x se distribuye normal N(120, 30). ¿Qué se puede afirmar de la distribución de las medias $\overline{x}$ de las muestras de tamaño n:*

a) *si n = 36?*

b) *si n = 16?*

❁❁❁❁❁✪❁❁❁❁❁❁

Como la distribución inicial es N(120, 30), la distribución muestral de medias ($\overline{x}$) es:

$$N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \text{ para cualquier valor de n}$$

a) Si n = 36, la distribución muestral de medias es $N\left(120, \dfrac{30}{\sqrt{36}}\right) \equiv N(120, 5)$

b) Si n = 16, la distribución muestral de medias es $N\left(120, \dfrac{30}{\sqrt{16}}\right) \equiv N(120, 7,5)$

❁❁❁❁❁✪❁❁❁❁❁❁

⑦ *Di cómo se distribuyen las medias muestrales en cada uno de los siguienes casos:*

❁❁❁❁❁✪❁❁❁❁❁❁

		a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
POBLACIÓN	**Distribución**	Normal	Desc.	Normal	Desc.	Normal	Desc.	Desc.
	Media (μ)	20	20	3,75	3,75	112	112	3 512
	D. T. (σ)	4	4	1,2	1,2	15	15	550
Tam. muestral, n		16	100	4	50	100	100	40

a) Como la población es normal, la distribución muestral de medias también será normal de parámetros:

$$N\left(20, \frac{4}{\sqrt{16}}\right) \equiv N(20, 1)$$

b) Aunque la distribución es de tipo desconocido, como su tamaño n = 100 > 30 la distribución muestral de medias sea normal de parámetros:

$$N\left(20, \frac{4}{\sqrt{100}}\right) \equiv N(20, 0{,}4)$$

c) Como la población es normal, la distribución muestral de medias también será normal de parámetros:

$$N\left(3{,}75, \frac{1{,}2}{\sqrt{4}}\right) \equiv N(3{,}75, 0{,}6)$$

d) Aunque la distribución es de tipo desconocido, como su tamaño n = 50 > 30 la distribución muestral de medias sea normal de parámetros:

$$N\left(3{,}75, \frac{1{,}2}{\sqrt{50}}\right) \equiv N(3{,}75, 0{,}17)$$

e) Como la población es normal, la distribución muestral de medias también será normal de parámetros:

$$N\left(112, \frac{15}{\sqrt{100}}\right) \equiv N(112, 1{,}5)$$

f) Aunque la distribución es de tipo desconocido, como su tamaño n = 100 > 30 la distribución muestral de medias sea normal de parámetros:

$$N\left(112, \frac{15}{\sqrt{100}}\right) \equiv N(112, 1{,}5)$$

g) Aunque la distribución es de tipo desconocido, como su tamaño n = 40 > 30 la distribución muestral de medias sea normal de parámetros:

$$N\left(3512, \frac{550}{\sqrt{40}}\right) \equiv N(3512, 86{,}96)$$

Distribución de medias y proporciones muestrales

⑧ *Una variable aleatoria se distribuye $N(\mu, \sigma)$. Si se extraen muestras de tamaño n:*

a) *¿Qué distribución tiene la variable aleatoria media muestral, $\bar{x}$?*

b) *Si se toman muestras de tamaño n = 4 de una variable aleatoria x con distribución N(165, 12), calcula $P[\bar{x} > 173{,}7]$.*

a) Como la distribución poblacional es normal, la distribución muestral de medias es también normal: $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(165, \frac{12}{\sqrt{4}}\right) = N(165, 6)$.

b) $p(\bar{x} > 173,7) \overset{(1)}{=} p\left(z > \frac{173,7 - 165}{6}\right) = p(z > 1,45) = 1 - p(z \le 1,45) = 1 - 0,9265 = 0,0735$.

(1) tipificamos la variable media muestral ($\bar{x}$).

❉❉❉❀❀✪❀❀❉❉❉

⑨ En una distribución N(20, 6), tomamos muestras de tamaño 64.
a) *¿Cuál es la distribución de las medias de las muestras?*
b) *¿Cuál es la probabilidad de extraer una muestra cuya media esté comprendida entre 19 y 21?*

❉❉❉❀❀✪❀❀❉❉❉

a) La distribución de las medias muestrales es normal ya que la población de partida también lo es, sus parámetros: $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(20, \frac{6}{\sqrt{64}}\right) = N(20, 0,75)$.

b) $p(19 < \bar{x} < 21) \overset{(1)}{=} p\left(\frac{19-20}{0,75} < z < \frac{21-20}{0,75}\right) = p(-1,333 < z < 1,33) = p(z < 1,33) – p(z< -1,33) = p(z < 1,33) – [1 – p(z < 1,33)] = 2· p(z < 1,33) – 1 = 2 · 0,9082 – 1 = 0,8164$.

❉❉❉❀❀✪❀❀❉❉❉

①⓪ Se sabe que el cociente intelectual de los alumnos de una universidad se distribuye según una ley normal de media 100 y varianza 729.
a) *Halla la probabilidad de que una muestra de 81 alumnos tenga un cociente intelectual medio inferior a 109.*
b) *Halla la probabilidad de que una muestra de 36 alumnos tenga un cociente intelectual medio superior a 109.*

❉❉❉❀❀✪❀❀❉❉❉

El cociente intelectual sigue una distruibución normal de media $\mu = 100$ y de desviación típica $\sigma = \sqrt{729} = 27$; es decir, x es N(100, 27).

a) Las medias en muestras de 81 alumnos se distribuirán según una normal de media $\mu(\bar{x}) = \mu = 100$ y de desviación típica $= \sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{27}{\sqrt{81}} = 3$; es decir, $\bar{x}$ es N(100, 3).

Luego $p[\bar{x} < 109] = p\left(z < \frac{109-100}{3}\right) = p[z < 3] = 0,9987$.

b) Las medias en muestras de 36 alumnos se distribuirán según una normal de media $\mu(\bar{x}) = \mu$ = 100 y de desviación típica = $\sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{27}{\sqrt{36}} = 4{,}5$; es decir, $\bar{x}$ es N(100, 4,5).

$p[\bar{x} > 109] = p\left(z > \frac{109-100}{4{,}5}\right) = p[z > 2] = 1 - p[z \le 2] = 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$.

❀❀❀❀❀❀✪❀❀❀❀❀❀

①① *El tiempo de espera, en minutos, de los pacientes en un servicio de urgencias, es N(14, 4).*

a) *¿Cómo se distribuye el tiempo medio de espera de 16 pacientes?*
b) *En una media jornada se ha atendido a 16 pacientes. ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo medio de su espera esté comprendido entre 10 y 15 minutos?*

❀❀❀❀❀❀✪❀❀❀❀❀❀

a) El tiempo medio de espera, $\bar{x}$, de 16 pacientes se distribuye según una normal de media $\mu(x) = \mu = 14$ y de desviación típica = $\sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{4}{\sqrt{16}} = 1$; es decir, $\bar{x}$ es N(14, 1).

b) $p[10 < \bar{x} < 15] = p\left(\frac{10-14}{1} < z < \frac{15-14}{1}\right) = p[-4 < z < 1] = p[z < 1] - p[z < -4] = 0{,}8413 - 0 = 0{,}8413$.

❀❀❀❀❀❀✪❀❀❀❀❀❀

①② *Se sabe que el peso en kilogramos de los alumnos de Bachillerato de Madrid es una variable aleatoria, x, que sigue una distribución normal de desviación típica igual a 5 kg. En el caso de considerar muestras de 25 alumnos, ¿qué distribución tiene la variable aleatoria media muestral,* $\bar{x}$ *?*

❀❀❀❀❀❀✪❀❀❀❀❀❀

Como el peso se distribuye normalmente, la distribución de muestras de tamaño 25 también se distribuirá normalmente, con media $\mu(x) = \mu$ y de desviación típica = $\sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{5}{\sqrt{25}} = 1$; es decir, $\bar{x}$ es N(μ, 1).

❀❀❀❀❀❀✪❀❀❀❀❀❀

①③ *En una ciudad, la altura media de sus habitantes tiene una desviación típica de 8 cm. Si la altura media de dichos habitantes fuera de 175 cm, ¿cuál sería la probabilidad de que la altura media de una muestra de 100 individuos tomada al azar fuera superior a 176 cm?*

❀❀❀❀❀❀✪❀❀❀❀❀❀

La altura en la población, x, sigue una distribución normal N(175, 8). Luego las muestras de tamaño n = 100, se distribuyen según una normal de media μ(x) = μ = 175 y de desviación típica = $\sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{8}{\sqrt{100}} = 0{,}8$; es decir, $\bar{x}$ es N(175, 0,8).

$p[\bar{x} > 176] = p\left(z > \frac{176-175}{0{,}8}\right) = p[z > 1{,}25] = 1 - P[z \le 1{,}25] = 1 - 0{,}8944 = 0{,}1056$.

Intervalos de confianza para la media

①④ La desviación típica de una variable estadística es σ = 5. Para estimar la media de dicha variable, extraemos una muestra aleatoria de tamaño n = 100 y obtenemos $\bar{x}$ = 2,8. Obtén un intervalo de confianza del 95% para estimar la media de la población, μ.

$1 - \alpha = 0{,}95$, $\alpha = 1 - 0{,}95 = 0{,}05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}025$, luego tenemos que buscar el valor de z tal que la probabilidad por debajo de ella sea 0,95 + 0,025 = 0,975 ($p[z \le z_{\alpha/2}] = 0{,}975 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$.

Luego el intervalo característico es:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(2{,}8 - 1{,}96\cdot\frac{5}{\sqrt{100}},\ 2{,}8 + 1{,}96\cdot\frac{5}{\sqrt{100}}\right) = (1{,}82,\ \ 3{,}78)$$

①⑤ Los estudiantes de Bachillerato de una cierta comunidad autónoma duermen un número de horas diarias que se distribuye según una ley normal de media μ desconocida y de desviación típica 3. A partir de una muestra de tamaño 30 se ha obtenido una media muestral igual a 7 horas. Halla un intervalo de confianza al 90% para la media de horas de sueño, μ.

$1 - \alpha = 0{,}90$, $\alpha = 1 - 0{,}90 = 0{,}10 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}05$, luego tenemos que buscar el valor de z tal que la probabilidad por debajo de ella sea 0,90 + 0,05 = 0,95 ($p[z \le z_{\alpha/2}] = 0{,}95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}645$.

Luego el intervalo característico es:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(7 - 1{,}645\cdot\frac{3}{\sqrt{30}},\ 7 + 1{,}645\cdot\frac{3}{\sqrt{30}}\right) = (6{,}1,\ \ 7{,}9)$$

①⑥ *En una muestra de 50 jóvenes encontramos que la dedicación media diaria de ocio es de 400 minutos y su desviación típica de 63 minutos. Calcula el intervalo de confianza de la media de la población al 95% de nivel de confianza.*

1 - α = 0, 95, α = 1 – 0,95 = 0,05 $\Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}025$, luego tenemos que buscar el valor de z tal que la probabilidad por debajo de ella sea 0,95 + 0,025 = 0,975 ($p[z \le z_{\alpha/2}] = 0{,}975 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$.

Luego el intervalo característico es:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\cdot\frac{s}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z_{\alpha/2}\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}\right) = \left(400 - 1{,}96\cdot\frac{63}{\sqrt{50}},\ 400 + 1{,}96\cdot\frac{63}{\sqrt{50}}\right) = (382{,}54,\ \ 417{,}46)$$

PARA RESOLVER

①⑦ *Las notas en un cierto examen se distribuyen normal con media μ = 5,3 y desviación típica σ = 2,4. Halla la probabilidad de que un estudiante tomado al azar tenga una nota:*

a) *Superior a 7.*
b) *Inferior a 5.*
c) *Comprendida ente 5 y 7.*
Tomamos al azar 16 estudiantes.
Halla la probabilidad de que la media de las notas de estos 16 estudiantes:
d) *Sea superior a 7.*
e) *Sea inferior a 5.*
f) *Esté comprendida entre 5 y 7.*
g) *Halla k para que el intervalo (5,3 – k; 5,3 + k) contenga al 95% de las notas.*
h) *Halla b para que el intervalo (5,3 – b; 5,3 + b) contenga al 95% de las notas medias de las muestras de 16 individuos.*

Distribución de la notas: N(5,3, 2,4)

a) $p[x > 7] = p\left(z > \frac{7 - 5{,}3}{2{,}4}\right) = p[z > 0{,}71] = 1 - p[z \le 0{,}71] = 1 - 0{,}7612 = 0{,}2388.$

b) $p[x < 5] = p\left(z < \frac{5 - 5{,}3}{2{,}4}\right) = p[z < -0{,}13] = p[z > 0{,}13] = 1 - p[z \le 0{,}13] = 1 - 0{,}5517 = 0{,}4483.$

c) p[5 < x < 7] = $p\left(\frac{5-5,3}{2,4} < z < \frac{7-5,3}{2,4}\right)$ = p[–0,13 < z < 0,71] = p[z < 0,71] – p[z < –0,013] = p[z < 0,71] –[1 – p[z ≤ 0,13]] = 0,7612 – 0,4483 = 0,3129.

Las medias de las notas de 16 estudiantes se distribuyen N(5,3; $\frac{2,4}{\sqrt{16}}$); es decir, la distribución muestral de medias es N(5,3; 0,6).

d) p[$\bar{x}$ > 7] = $p\left(z > \frac{7-5,3}{0,6}\right)$ = p[z > 2,83] = 1 – p[z ≤ 2,83] = 1 – 0,9977 = 0,0023.

e) p[$\bar{x}$ < 5] = $p\left(< \frac{5-5,3}{0,6}\right)$ = p[z < –0,5] = p[z > 0,5] = 1 – p[z ≤ 0,5] = 1 – 0,6915 = 0,3085.

f) p[5 < $\bar{x}$ < 7] = $p\left(\frac{5-5,3}{0,6} < z < \frac{7-5,3}{0,6}\right)$ = p[–0,5 < z < 2,83] = p[z < 2,83] – p(z < –0,5] = 0,9977 – 0,3085 = 0,6892.

g) Es un intervalo característico para la media de la población, por tanto: k = $z_{\alpha/2} \cdot \sigma$
Como 1 – α = 0,95 ⇒ $z_{\alpha/2}$ = 1,96. luego k = 1,96 · 2,4 = 4,704.

h) Es un intervalo característico para las medias muestrales, en muestras de tamaño 16, por tanto:
b = $z_{\alpha/2}$ · 0,6. Como 1 – α = 0,95 → $z_{\alpha/2}$ = 1,96. luego b = 1,96 · 0,6 = 1,176.

❁❁❁❁❁✪❁❁❁❁❁❁

⑱ *La estatura de los jóvenes de una ciudad sigue una distribución N (μ, σ). Si el 90% de las medias de las muestras de 81 jóvenes están en (173,4; 175,8), halla μ y σ.*

❁❁❁❁❁✪❁❁❁❁❁❁

1 - α = 0,90, α = 1 – 0,90 = 0,10 ⇒ $\frac{\alpha}{2} = 0{,}05$, luego tenemos que buscar el valor de z tal que la probabilidad por debajo de ella sea 0,90 + 0,05 = 0,95 (p[z ≤ $z_{\alpha/2}$] = 0,95 ⇒ $z_{\alpha/2}$ = 1,645.

Luego el intervalo característico es:

$$\left(\mu - z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(\mu - 1{,}645\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + 1{,}645\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

La media es valor central $\mu = \frac{173{,}4+175{,}8}{2} = 174{,}6$

Además $1{,}645\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{175{,}8-173{,}4}{2} = 1{,}2 \Leftrightarrow \sigma = \frac{1{,}2\sqrt{81}}{1{,}645} = 6{,}565$

❶❾ *Si la distribución de la media de las alturas en muestras de tamaño 49 de los niños de 10 años tiene como media 135 cm y como desviación típica 1,2 cm, ¿cuánto valen la media y la varianza de la altura de los niños de esa ciudad?*

Si la media en la población es μ y la desviación típica es σ, entonces, la distribución de las medias muestrales es N(μ, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$) luego μ = 135 cm 7 $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}2 \Leftrightarrow \sigma = 1{,}2 \cdot \sqrt{49}$ = 1,2 · 7 = 8,4 cm.
Por tanto, la media es μ = 135 cm y la varianza es $\sigma^2 = 8{,}4^2 = 70{,}56$.

❷⓪ *Los paquetes recibidos en un almacén tienen un peso medio de 300 kg y una desviación típica de 50 kg. ¿Cuál es la probabilidad de que 25 de los paquetes, elegidos al azar, excedan el límite de carga del montacargas donde se van a meter, que es de 8 200 kg?*

Sabemos que la suma de los pesos de n de esas bolsas tomadas al azar sigue una distribución normal de media nμ y de desviación típica σ , es decir la distribución de Σxi es N(nμ, σ $\sqrt{n}$)
En nuestro caso: Σxi es N(25 · 300; 50$\sqrt{25}$); es decir N(7 500; 250) y tenemos que calcular:

$$p\left(\sum_{i=1}^{25} x_i > 8200\right) = p\left(z > \frac{8200 - 7500}{250}\right) = p(z > 2{,}8) = 1 - p(z \leq 2{,}8) = 1 - 0{,}9974 = 0{,}0026.$$

❷❶ *El peso de los perros adultos de una cierta raza es una variable aleatoria que se distribuye normalmente con una media de 7,4 kg y una desviación típica de 0,6 kg. Si consideramos muestras de 30 de estos animales*

a) *¿Cuál es la distribución de la media muestral, $\bar{x}$?*
b) *Calcula $P[6{,}5 < \bar{x} < 7{,}5]$.*
c) *¿Cuál es la distribución de la suma de los pesos de los 30 animales de las muestras?*
d) *Calcula* $p\left(\sum_{i=1}^{30} x_i > 225\right)$

Si llamamos x = "peso de los perros", la variable x se distribuye según N(7,4, 0,6).

a) Las medias muestrales ($\bar{x}$) de tamaño n = 30 se distribuyen según $N\left(7{,}4, \frac{0{,}6}{\sqrt{30}}\right)$ = N(7,4, 0,109).

b) p (6,5 < $\bar{x}$ < 7,5) = $p\left(\frac{6{,}5-7{,}4}{0{,}109} < z < \frac{7{,}5-7{,}4}{0{,}109}\right)$ = p (–8,18 < z < 0,91) = p (z < 0,91) – p(z < -8,18) = 0,8186 – 0 = 0,8186.

c) La suma de los pesos de 30 personas se distribuye según N(nμ, $\sigma\sqrt{n}$), en nuestro caso N(30·7,4, 0,6·$\sqrt{30}$) = N(222, 3,29).

d) $p\left(\sum_{i=1}^{30} x_i > 225\right) = p\left(z > \frac{225-222}{3{,}29}\right)$ = p(z > 0,91) = 1 – p (z ≤ 0,91] = 1 – 0,8186 = 0,1814

❃❃❃❃❃✪❃❃❃❃❃

②② *Se supone que el peso medio de las sandías de cierta variedad sigue una distribución normal con μ = 6 kg y σ = 1 kg. Si empaquetamos las sandías en cajas de 8 unidades:*

a) *Halla la probabilidad de que la media de los pesos de las sandías de una caja sea menor que 5,5 kg.*

b) *Calcula la probabilidad de que entre las 8 sandías de una de las cajas pesen más de 50 kg.*

❃❃❃❃❃✪❃❃❃❃❃

a) Si hacemos x = “peso de las sandías, la distribución de x N(6, 1) y, por tanto, la distribución de las medias muestrales ($\bar{x}$) de tamaño n = 8 es $N\left(6, \frac{1}{\sqrt{8}}\right)$ = N(6, 0,35).

Se nos pide:

P($\bar{x}$ <5,5) = $p\left(z < \frac{5{,}5-6}{0{,}35}\right)$ = p [z < –1,43] = p [z > 1,43] = 1 – p [z ≤ 1,43] = 1 – 0,9236 = 0,0764.

b) La suma de los pesos de 8 sandías se distribuye según N(nμ, $\sigma\sqrt{n}$), en nuestro caso N(8·6, 1·$\sqrt{8}$) = N(48, 2,83), ahora podemos hallar:

$p\left(\sum_{i=1}^{8} x_i > 50\right) = p\left(z > \frac{50-48}{2{,}83}\right)$ = p (z > 0,71) = 1 – p [z ≤ 0,71] = 1 – 0,7612 = 0,2388.

❃❃❃❃❃✪❃❃❃❃❃

②③ *Para estimar la estatura media de los jóvenes entre 15 y 25 años de una localidad, se ha medido a 40 de estos jóvenes, obteniéndose los siguientes resultados:*

ESTATURA(CM)	[148, 153)	[153, 158)	[158, 163)	[163, 168)	[168, 173)	[173, 168)
Nº jóvenes	2	4	11	14	5	4

Estima, con un nivel de confianza del 99%, el valor de la estatura media de los jóvenes entre 15 y 25 años de dicha localidad.

Para hallar la media y desviación típica muestrales ampliamos la tabla añadiendo filas:

ESTA(cm)	[148, 153)	[153, 158)	[158, 163)	[163, 168)	[168, 173)	[173, 178)	Sumas
Marca de clase (x_i)	150,5	155,5	160,5	165,5	170,5	175,5	
Nº jóvenes(f_i)	2	4	11	14	5	4	**40**
$x_i \cdot f_i$	301	622	1765,5	2317	852,5	702	**6560**
$x_i^2 \cdot f_i$	45 300,5	96 721	283 362,75	383 463,5	145 351,25	12 3201	**1 077 400**

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot f_i}{N} = \frac{6560}{40} = 164 \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 \cdot f_i}{N} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{1077400}{40} - 164^2} = \sqrt{39} = 6{,}245$$

1 - α = 0, 99, α = 1 – 0,99 = 0,01 $\Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}005$, luego tenemos que buscar el valor de z tal que la probabilidad por debajo de ella sea 0,99 + 0,005 = 0,995 ($p[z \le z_{\alpha/2}] = 0{,}995 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}575$.

Luego el intervalo característico es:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right) = \left(164 - 2{,}575 \cdot \frac{6{,}245}{\sqrt{40}}, 164 + 2{,}575 \cdot \frac{6{,}245}{\sqrt{40}}\right) = (161{,}46,\ \ 166{,}54)$$

②④ *Se desea estudiar el gasto semanal de fotocopias, en céntimos de euro, de los estudiantes de bachillerato de cierta comunidad. Para ello, se ha elegido una muestra aleatoria de 9 de estos estudiantes, resultando los valores siguientes para estos gastos:*

100; 150; 90; 70; 75; 105; 200; 120; 80

Se supone que la variable objeto del estudio sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica igual a 12. Determina un intervalo de confianza al 95% para la media del gasto semanal en fotocopias por estudiante.

Hallamos la media de la muestra:

$$\bar{x} = \frac{100+150+90+70+75+105+200+120+80}{9} = \frac{990}{9} = 110$$

1 - α = 0, 95, α = 1 – 0,95 = 0,05 $\Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}025$, luego tenemos que buscar el valor de z tal que la probabilidad por debajo de ella sea 0,95 + 0,025 = 0,975 ($p[z \le z_{\alpha/2}] = 0{,}975 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$.

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(110 - 1{,}96\cdot\frac{12}{\sqrt{9}},\ 110 + 1{,}96\cdot\frac{12}{\sqrt{9}}\right) = (102{,}16,\ \ 117{,}84)$$

❉❉❉❉❉✪❉❉❉❉❉

②⑤ *Se ha tomado una muestra aleatoria de 100 individuos a los que se ha medido el nivel de glucosa en sangre, obteniéndose una media muestral de 110 mg/cm^3. Se sabe que la desviación típica de la población es de 20 mg/cm^3.*

a) *Obtén un intervalo de confianza, al 90%, para el nivel de glucosa en sangre en la población.*
b) *¿Qué error máximo se comete con la estimación anterior?*

❉❉❉❉❉✪❉❉❉❉❉

Media muestral = x = 110 mg/cm^3, Desviación típica poblacional = σ = 20 mg/cm^3.

a)

1 - α = 0,90, α = 1 – 0,90 = 0,10 $\Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}05$, luego tenemos que buscar el valor de z tal que la probabilidad por debajo de ella sea 0,90 + 0,05 = 0,95 ($p[z \le z_{\alpha/2}] = 0{,}95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}645$.

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(110 - 1{,}645\cdot\frac{20}{\sqrt{100}},\ 110 + 1{,}645\cdot\frac{20}{\sqrt{100}}\right) = (106{,}71,\ \ 113{,}29)$$

b) El error máximo es la mitad de la longitud del intervalo de confianza, es decir:

$$E = 1{,}645 \cdot \frac{20}{\sqrt{100}} = 1{,}645 \cdot 2 = 3{,}29\,.$$

❉❉❉❉❉✪❉❉❉❉❉

②⑥ *La duración de las bombillas fabricadas por una empresa sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica 50 horas. Para estimar la duración se experimenta con una muestra de tamaño n. Calcular el valor de n para que, con un nivel de confianza del 95%, se consiga un error en la estimación inferior a 5 horas.*

❉❉❉❉❉✪❉❉❉❉❉

1 - α = 0, 95, α = 1 – 0,95 = 0,05 $\Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}025$, luego tenemos que buscar el valor de z tal que la probabilidad por debajo de ella sea 0,95 + 0,025 = 0,975 ($p[z \le z_{\alpha/2}] = 0{,}975 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$.

$$E = z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow n > \left(\frac{z_{\alpha/2}\cdot\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{1{,}96\cdot 50}{5}\right)^2 = 384{,}16 \Rightarrow n > 385 \text{ bombillas}$$

㉗ *La media de las estaturas de una muestra aleatoria de 400 personas de una ciudad es 1,75 m. Se sabe que la estatura de las personas de esa ciudad es una variable aleatoria que sigue una distribución normal con varianza σ^2 = 0,16 m^2.*

a) *Construye un intervalo, de un 95% de confianza, para la media de las estaturas de la población.*

b) *¿Cuál sería el mínimo tamaño muestral necesario para que pueda decirse que la verdadera media de las estaturas está a menos de 2 cm de la media muestral, con una confianza del 90%?*

n = 400; $\bar{x}$ = 1,75 m; σ^2 = 0,16 $\Rightarrow$ $\sigma = \sqrt{0{,}16}$ = 0,4 m.

a) 1 - α = 0, 95, α = 1 – 0,95 = 0,05 $\Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}025$, luego tenemos que buscar el valor de z tal que la probabilidad por debajo de ella sea 0,95 + 0,025 = 0,975 ($p[z \le z_{\alpha/2}] = 0{,}975 \Rightarrow z_{\alpha/2}$ = 1,96.

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(1{,}75 - 1{,}96\cdot\frac{0{,}4}{\sqrt{400}}, 1{,}75 + 1{,}96\cdot\frac{0{,}4}{\sqrt{400}}\right) = (1{,}71,\ \ 1{,}79)$$

b) 1 - α = 0,90, α = 1 – 0,90 = 0,10 $\Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}05$, luego tenemos que buscar el valor de z tal que la probabilidad por debajo de ella sea 0,90 + 0,05 = 0,95 ($p[z \le z_{\alpha/2}] = 0{,}95 \Rightarrow z_{\alpha/2}$ = 1,645.

$$\text{Como } E = z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow n > \left(\frac{z_{\alpha/2}\cdot\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{1{,}645\cdot 0{,}4}{0{,}02}\right)^2 = 1082{,}41 \Rightarrow n > 1083 \text{ personas}$$

㉘ *Las medidas de los diámetros de una muestra al azar de 200 cojinetes de bolas, hechos por una determinada máquina dieron una media de 2 cm y una desviación típica de 0,1 cm. Halla los intervalos de confianza del 68,26% , 95,44% , 99,73% para el diámetro medio de todos los cojinetes.*

n = 200, $\bar{x}$ = 2 cm, s = 0,1 cm

♦ $1 - \alpha = 0,6826$, $\alpha = 1 - 0,6826 = 0,3174 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,1587$, luego tenemos que buscar el valor de z tal que la probabilidad por debajo de ella sea 0,6826 + 0,1587 = 0,8413 ($p(z \le z_{\alpha/2}) = 0,8413$ $\Rightarrow z_{\alpha/2} = 1$.

$$I.C. \equiv \left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}\right) = \left(2 - 1\cdot\frac{0,1}{\sqrt{200}}, 2 + 1\cdot\frac{0,1}{\sqrt{200}}\right) = (1,9293,\ 2,0071)$$

♦ $1 - \alpha = 0,9544$, $\alpha = 1 - 0,9544 = 0,0456 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,0228$, luego tenemos que buscar el valor de z tal que la probabilidad por debajo de ella sea 0,9544 + 0,0228 = 0,9772 ($p(z \le z_{\alpha/2}) = 0,9772$ $\Rightarrow z_{\alpha/2} = 2$.

$$I.C. \equiv \left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}\right) = \left(2 - 2\cdot\frac{0,1}{\sqrt{200}}, 2 + 2\cdot\frac{0,1}{\sqrt{200}}\right) = (1,986,\ 2,014)$$

♦ $1 - \alpha = 0,9973$, $\alpha = 1 - 0,9973 = 0,0027 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,00135$, luego tenemos que buscar el valor de z tal que la probabilidad por debajo de ella sea 0,9973 + 0,00135 = 0,99865 ($p(z \le z_{\alpha/2}) = 0,99865 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 3$.

$$I.C. \equiv \left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}\right) = \left(2 - 3\cdot\frac{0,1}{\sqrt{200}}, 2 + 3\cdot\frac{0,1}{\sqrt{200}}\right) = (1,979,\ 2,021)$$

❋❋❋❀❀✪❀❀❀❋❋❋

②⑨ *El peso, en kg, de los jóvenes entre 16 y 20 años de una cierta ciudad es una variable aleatoria, x, que sigue una distribución normal con $\sigma^2 = 25$.*

a) *Si consideramos muestras de 25 jóvenes, ¿cuál es la distribución que tiene la variable aleatoria media muestral?*

b) *Si se desea que la media de la muestra no difiera en más de 1 kg de la media de la población, con probabilidad 0,95, ¿cuántos jóvenes se deberían tomar en la muestra?*

❋❋❋❀❀✪❀❀❀❋❋❋

a) $\sigma^2 = 25$, $\sigma = 5$, $n = 25$. La media muestral ($\overline{x}$) se distribuye según una $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(\mu, \frac{5}{\sqrt{25}}\right) =$ N(μ, 1).

b) $1 - \alpha = 0,95$, $\alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025$, luego tenemos que buscar el valor de z tal que la probabilidad por debajo de ella sea 0,95 + 0,025 = 0,975 ($p[z \le z_{\alpha/2}] = 0,975 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$.

$$\text{Como } E = z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow n > \left(\frac{z_{\alpha/2}\cdot\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{1,96\cdot 5}{1}\right)^2 = 96,04 \Rightarrow n > 97 \text{ jóvenes}$$

❋❋❋❀❀✪❀❀❀❋❋❋

③⓪ *Una variable aleatoria, x, tiene una distribución normal, siendo su desviación típica igual a 3.*

a) *Si se consideran muestras de tamaño 16, ¿qué distribución sigue la variable aleatoria media muestral?*

b) *Si se desea que la media de la muestra no difiera en más de una unidad de la media de la población, con probabilidad 0,99, ¿cuántos elementos, como mínimo, se deberían tomar en la muestra?*

$N(\mu, 3)$

a) n = 16. Como la población es normal, la distribución muestral de tamaño n = 16 también lo será: $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(\mu, \frac{3}{\sqrt{16}}\right) = N\left(\mu, \frac{3}{4}\right)$.

b) E < 1.

1 - α = 0, 99, α = 1 – 0,99 = 0,01 $\Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}005$, luego tenemos que buscar el valor de z tal que la probabilidad por debajo de ella sea 0,99 + 0,005 = 0,995 ($p(z \le z_{\alpha/2}) = 0{,}995 \Rightarrow z_{\alpha/2}$ = 2,575.

$$\text{Como } E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow n > \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2{,}575 \cdot 3}{1}\right)^2 = 59{,}68 \Rightarrow n > 60 \text{ elementos}$$

③① *El tiempo de vida de una clase de depuradoras de agua utilizadas en una planta industrial se distribuye normalmente, con una desviación típica de 2 000 horas. En un ensayo realizado con una muestra aleatoria de 9 depuradoras, se obtuvieron los siguientes tiempos de vida en miles de horas:*

9,5 10 7,5 10,5 16,5 10 12 32 18

a) *Halla un intervalo de confianza al 99% para la vida media de las depuradoras.*

b) *¿Cuál es el error máximo que se comete con la estimación anterior para la media?*

c) *Calcula el tamaño mínimo que debería tener la muestra, en el caso de admitir un error máximo de 500 horas, con un grado de confianza del 95%.*

$N(\mu, 2\,000)$, n = 9, $\bar{x} = \frac{9{,}5 + 10 + 7{,}5 + 10{,}5 + 16{,}5 + 10 + 12 + 32 + 18}{9} = \frac{126}{9} = 14$

a) 1 - α = 0, 99, α = 1 – 0,99 = 0,01 $\Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}005$, luego tenemos que buscar el valor de z tal que la probabilidad por debajo de ella sea 0,99 + 0,005 = 0,995 ($p(z \le z_{\alpha/2}) = 0{,}995 \Rightarrow z_{\alpha/2}$ = 2,575.

$$I.C.\equiv\left(\bar{x}-z_{\alpha/2}\cdot\frac{s}{\sqrt{n}},\ \bar{x}+z_{\alpha/2}\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}\right)=\left(14000-2{,}575\cdot\frac{2000}{\sqrt{9}},\ 14000+2{,}575\cdot\frac{2000}{\sqrt{9}}\right)=$$ (12 283,33, 15 716,7).

b) $E=z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=2{,}575\cdot\frac{2000}{\sqrt{9}}<1716{,}7$ horas.

c) E < 500 horas.

1 - α = 0, 95, α = 1 – 0,95 = 0,05 $\Rightarrow\frac{\alpha}{2}=0{,}025$, luego tenemos que buscar el valor de z tal que la probabilidad por debajo de ella sea 0,95 + 0,025 = 0,975 ($p[z\le z_{\alpha/2}]=0{,}975\Rightarrow z_{\alpha/2}=1{,}96$.

Como $E=z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Leftrightarrow n>\left(\frac{z_{\alpha/2}\cdot\sigma}{E}\right)^2=\left(\frac{1{,}96\cdot2000}{500}\right)^2=61{,}47\Rightarrow n>62$ elementos.

❉❉❉❁❁✪❁❁❁❉❉❉

32 Al medir el tiempo de reacción, un psicólogo estima que la desviación típica del mismo es de 0,5 segundos. ¿Cuál será el número de medidas que deberá hacer para que sea del 95% la confianza de que el error de su estimación no excederá de 0,05 segundos?

❉❉❉❁❁✪❁❁❁❉❉❉

σ = 0,5 seg., E < 0,05 seg.

1 - α = 0, 95, α = 1 – 0,95 = 0,05 $\Rightarrow\frac{\alpha}{2}=0{,}025$, luego tenemos que buscar el valor de z tal que la probabilidad por debajo de ella sea 0,95 + 0,025 = 0,975 ($p[z\le z_{\alpha/2}]=0{,}975\Rightarrow z_{\alpha/2}=1{,}96$.

Como $E=z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Leftrightarrow n>\left(\frac{z_{\alpha/2}\cdot\sigma}{E}\right)^2=\left(\frac{1{,}96\cdot0{,}5}{0{,}05}\right)^2=384{,}16\Rightarrow n>385$ medidas.

❉❉❉❁❁✪❁❁❁❉❉❉

33 Al medir el diámetro de los cojinetes producidos por una empresa, se estima que la desviación típica de dicho diámetro es de 0,05 cm. Se han hecho 121 mediciones.¿Se puede afirmar, con el 99% de confianza, que el error en la estimación de la media no excederá a 0,01 cm?

❉❉❉❁❁✪❁❁❁❉❉❉

σ = 0,05 cm, n = 121

1 - α = 0, 99, α = 1 – 0,99 = 0,01 $\Rightarrow\frac{\alpha}{2}=0{,}005$, luego tenemos que buscar el valor de z tal que la probabilidad por debajo de ella sea 0,99 + 0,005 = 0,995 ($p(z\le z_{\alpha/2})=0{,}995\Rightarrow z_{\alpha/2}=$ 2,575.

Como $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}575 \cdot \frac{0{,}05}{\sqrt{121}} = 0{,}0117 > 0{,}01$ no podemos afirmar que el error en la estimación de la media no excederá a 0,01.

❀❀❀❀❀❀❀❀❀❀❀❀

③④ Las ventas mensuales de una tienda de electrodomésticos se distribuyen según una ley normal, con desviación típica 900 €. En un estudio estadístico de las ventas realizadas en los últimos nueve meses, se ha encontrado un intervalo de confianza para la media mensual de las ventas, cuyos extremos son 4 663€ y 5 839€.

a) *¿Cuál ha sido la media de las ventas en estos nueve meses?*
b) *¿Cuál es el nivel de confianza para este intervalo?*

❀❀❀❀❀❀❀❀❀❀❀❀

a) La media de las ventas será el punto medio del intervalo característico:

$\bar{x} = \frac{4663 + 5839}{2} = 5251\,€$.

b) Queremos saber el valor de z y a partir de el el valor de (1 - α), para ello tenemos n = 9, σ = 900 € y el error máximo admisible que hallamos a partir de la mitad de la amplitud de la amplitud del intervalo característico: $E = \frac{5839 - 4663}{2} = 588$.

Despejamos z de la fórmula del error máximo:

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow z_{\alpha/2} = \frac{E\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{588 \cdot \sqrt{9}}{900} = \frac{1764}{900} = 1{,}96$$

Ahora buscamos en la tabla normal la probabilidad correspondiente a este valor de z = 1,96 y el nivel de confianza es del 95 %.

❀❀❀❀❀❀❀❀❀❀❀❀

③⑤ Se supone que los gastos corrientes por empleado de los distintos departamentos de una empresa siguen una distribución normal con desviación típica 500€. De los datos disponibles para 16 departamentos, se ha obtenido el siguiente intervalo de confianza para estimar la media del gasto corriente por empleado de la empresa: (1 928,125; 2 571,875) ¿Cuál es el nivel de confianza, 1 -α, con el que se ha hecho la estimación?

❀❀❀❀❀❀❀❀❀❀❀❀

Queremos saber el valor de z y a partir de el el valor de (1 - α), para ello tenemos n = 16, σ = 500 € y el error máximo admisible que hallamos a partir de la mitad de la amplitud de la amplitud del intervalo característico: E = $\frac{2571{,}875-1928{,}124}{2}=321{,}876$.

Despejamos z de la fórmula del error máximo:

$$E=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Leftrightarrow z_{\alpha/2}=\frac{E\sqrt{n}}{\sigma}=\frac{321{,}876\cdot\sqrt{16}}{500}=\frac{1287{,}502}{500}=2{,}575$$

Ahora buscamos en la tabla normal la probabilidad correspondiente a este valor de z = 2,575 y se corresponde con un nivel de confianza es del 99 %.

CUESTIONES TEÓRICAS

***36* Con una muestra de 500 individuos hemos estimado, con un nivel de confianza del 90%, que la estatura media de los soldados de un cierto reemplazo está entre 174,3 cm y 175,1 cm (problema de la página inicial, pág. 290).**

a) *Si la desviación típica de la población era desconocida, averigua la media, $\bar{x}$, y la desviación típica, s, de la muestra.*

b) *¿Cuál sería el intervalo si la muestra fuera de tamaño la cuarta parte (500 : 4 = 125) y mantuviéramos el nivel de confianza?*

a) Como el intervalo de confianza es simétrico y centrado en la media, esta la podemos hallar mediante la media aritmética de los extremos (punto medio):

$$\bar{x}=\frac{174{,}3+175{,}1}{2}=174{,}7\text{ cm}$$

El error máximo admisible es la semiamplitud del intervalo: E = $\frac{175{,}1-174{,}3}{2}=0{,}4$

Por otro lado, si el nivel de confianza es del 90% 1- α = 0,90 $\Rightarrow$ α = 0,1 y $\frac{\alpha}{2}=0{,}05$ teniendo que hallar el valor de z correspondiente a 0,90 + 0,05 = 0,95 que en la tabla normal es $z_{\alpha/2}$ = 1,645.

Con estos datos podemos hallar la desviación típica muestral :

$$E=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}\Leftrightarrow s=\frac{E\sqrt{n}}{z_{\alpha/2}}=\frac{0{,}4\sqrt{500}}{1{,}645}=5{,}437$$

b) Si el tamaño muestral se reduce a la cuarta parte, como la semiamplitud del intervalo depende del tamaño n:

$$E=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}=1{,}645\frac{0{,}4}{\sqrt{\frac{500}{4}}}=0{,}8$$

Para hallar el intervalo sumamos y restamos a la media ($\overline{x} =$ 174,7) el error o semiamplitud del intervalo: (174,7 – 0,8, 174,7 + 0,8) = (173,9; 175,5).

❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊

37 Supongamos que, a partir de una muestra aleatoria de tamaño n = 25, se ha calculado el intervalo de confianza para la media de una población normal, obteniéndose una amplitud igual a ± 4. Si el tamaño de la muestra hubiera sido n = 100, permaneciendo invariables todos los demás valores que intervienen en el cálculo, ¿cuál habría sido la amplitud del intervalo?

❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊

Para n = 25, La semiamplitud del intervalo es E = $z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$ = 4, luego si n = 100:

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{100}} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{4 \cdot 25}} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{2 \cdot \sqrt{n}} = \frac{1}{2}\left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \right) = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$$

Luego la amplitud sería ± 2.

❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊

38 A partir de una muestra aleatoria, hemos estimado el peso de los toros de una manada mediante el intervalo (443, 528). ¿Cuál es la media de la muestra obtenida?

❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊

El intervalo está centrado en la media luego la media es el centro del intervalo:

$$\overline{x} = \frac{443 + 528}{2} = 485{,}5$$

❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊

39 Mediante una muestra de 100 individuos estimamos la estatura de un colectivo de personas con un nivel de confianza del 95%. El error máximo admisible obtenido es E = 1,274. ¿Cuál es la desviación típica de la muestra obtenida?

❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊

n = 100, E = 1,274, nivel de confianza = 0,95, luego $z_{\alpha/2}$ = 1,96.

Con los datos anteriores hallamos la desviación típica de la fórmula del error máximo:

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow s = \frac{E\sqrt{n}}{z_{\alpha/2}} = \frac{1{,}274 \cdot \sqrt{100}}{1{,}96} = 6{,}5$$

❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊