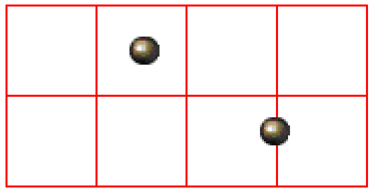
Para empezar reflexiona y resuelve

Cálculo de probabilidades

Calcula matemáticamente cuál es la probabilidad de que "no toque raya" en la cuadrícula de 3 cm × 3 cm una moneda de 1 cm de diámetro.



Área del cuadrado grande = $l^2 = 3^2 = 9$ cm^2
Área del cuadrado pequeño = $(3 - 1)^2 = 2^2 = 4$ cm^2

$$p(S) = \frac{4}{9} = 0,\widehat{4} \approx 44,4\%$$

¿De qué tamaño debe ser un disco para que la probabilidad de que "no toque raya" en una cuadrícula de 4 cm × 4 cm sea de 0,2?

Área del cuadrado grande = $4^2 = 16$ cm^2
Área del cuadrado pequeño = $(4 - d)^2$

p = $\frac{(4-d)^2}{16} = 0,2 \Rightarrow (4 - d)^2 = 3,2 \Rightarrow 4 - d = \pm\sqrt{3,2}\ \pm 1,8$

$4 - d = 1,8 \Rightarrow d = 2,2$ cm
$4 - d = -1,8 \Rightarrow d = 5,8$ cm, no vale porque es mayor que la cuadrícula.

Luego ha de tener un diámetro de 2,2 cm.

En una cuadrícula de 4 cm × 4 cm dejamos caer 5 000 veces una moneda y contabilizamos que "no toca raya" en 1 341. Estima cuál es el diámetro de la moneda.

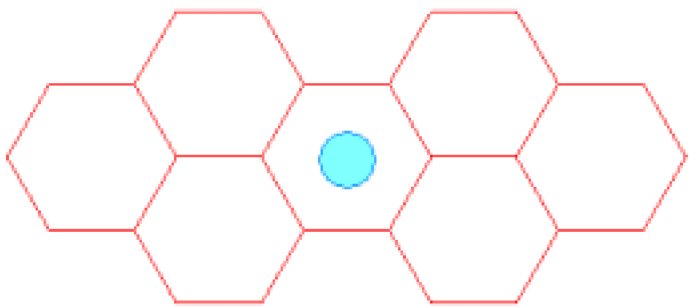
Área del cuadrado grande = $4^2 = 16$ cm^2
Área del cuadrado pequeño = $(4 - d)^2$

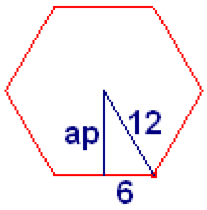
p = $\frac{1341}{5000} = 0,2682 =$

$$\frac{(4-d)^2}{16} \Leftrightarrow (4-d)^2 = 16 \cdot 0,2682 = 4,2912 \Leftrightarrow 4 - d = \pm\sqrt{4,2912} = \pm 2,0715 \Leftrightarrow \begin{cases} d = 6,07 \\ d = 1,9285 \end{cases}$$

El diámetro debe ser d = 1, 93 cm, ya que d= 6,07 cm no es válido.

Sobre un suelo de losetas hexagonales de 12 cm de lado se deja caer un disco de 10 cm de diámetro. ¿Cuál es la probabilidad de que "no toque raya"?



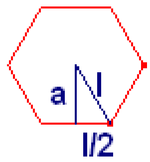


Como el área del polígono es $A = \frac{pxap}{2}$

Necesitamos hallar la apotema, la calculamos aplicando el teorema de Pitágoras: $ap = \sqrt{12^2 - 6^2} = \sqrt{144 - 36} = \sqrt{108} = 10{,}39$

Área del polígono grande = $A = \frac{6x12x10{,}39}{2} = 374{,}04 \text{ cm}^2$.

a = ap – 5 = 10,39 – 5 = 5,39 cm



aplicando Pitágoras: $l^2 = a^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \Leftrightarrow a = \sqrt{l^2 - \frac{l^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}l}{2} \Leftrightarrow l = \frac{2a}{\sqrt{3}} = \frac{2{\cdot}5{,}39}{\sqrt{3}} = 6{,}22$

Perímetro = 6·l = 6·6,22 = 37,34 cm.

Área del hexágono pequeño = $A_p = \frac{p{\cdot}a}{2} = \frac{37{,}34{\cdot}5{,}39}{2} = 100{,}64 \text{ cm}^2$

Probabilidad = $p = \frac{A_p}{A} = \frac{100{,}64}{374{,}04} = 0{,}27 = 27\%$

Ejercicios propuestos (Pág 240)

① Numeramos con 1, 2, 3 y 4 las cuatro caras alargadas de una regleta. Dejamos caer la regleta y anotamos el número de la cara superior.

a) ¿Cuál es el espacio muestral?

b) Escribe un suceso elemental y tres no elementales.

c) ¿Cuántos sucesos tiene esta experiencia?

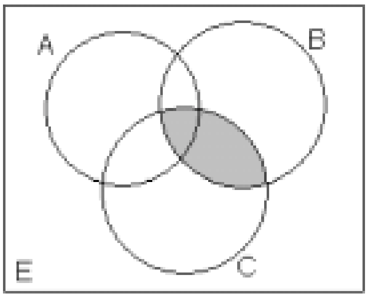
a) E = {1, 2, 3, 4}.

b) Elementales : { {1}, {2}, {3}, {4}}. No elementales : {{1, 2}, {2, 4}, {1, 2, 4}}.

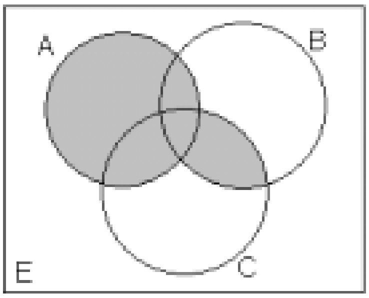
c) $2^n = 2^4 = 16$, que son { {1}, {2}, {3}, {4}, {1, 2}, {1, 3}, {1, 4}, {2, 3}, {2, 4}, {3, 4}, {1, 2, 3}, {1, 2, 4}, {1, 3, 4}, {2, 3, 4}, {1, 2, 3, 4}, ∅}

Ejercicios propuestos (Pág 241)

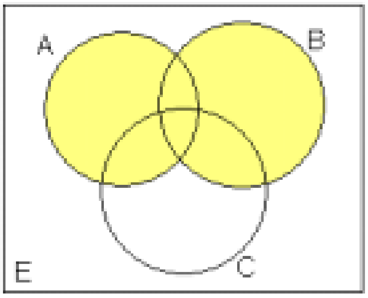
② Justifica gráficamente la siguiente igualdad: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$



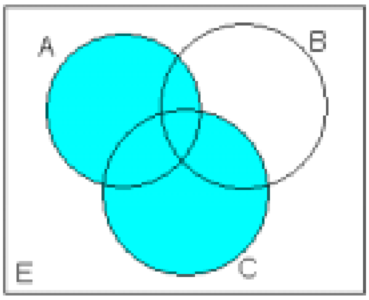
$B \cap C$



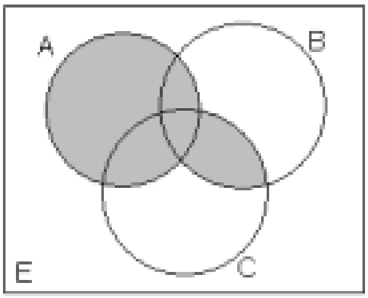
$A \cup (B \cap C)$



$(A \cup B)$

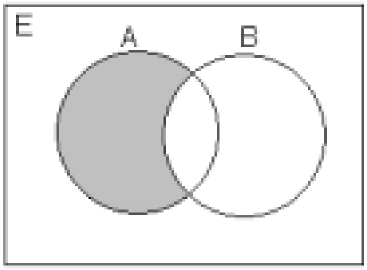


$(A \cup C)$

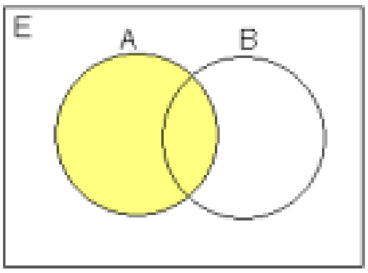


$(A \cup B) \cap (A \cup C)$

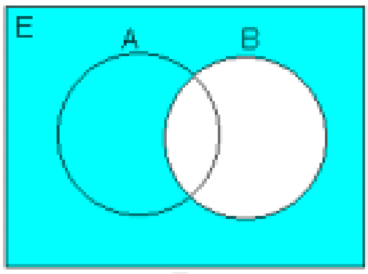
③ Justifica gráficamente la siguiente igualdad: $A - B = A \cap B'$



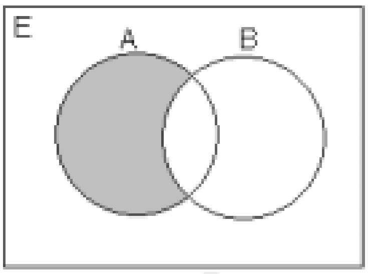
$A - B$



A



$\overline{B}$



$A \cap \overline{B}$

Ejercicios propuestos (Pág 245)

①. Lanzamos un dado "chapucero" 1000 veces. Obtenemos f(1) = 117, f(2) = 302, f(3) = 38, f(4) = 234, f(5) = 196, f(6) = 113. Estima las probabilidades de las distintas caras. ¿Cuáles son las probabilidades de los sucesos A = PAR, B = MENOR QUE 6, C = {1, 2}.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

Estimamos las probabilidades a partir de las frecuencias aplicando la regla de Laplace:

$$p(\text{salga } 1) = p(1) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casostotales}} = \frac{f(1)}{N} = \frac{117}{1000} = 0{,}117$$

$$p(\text{salga } 2) = p(2) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casostotales}} = \frac{f(2)}{N} = \frac{302}{1000} = 0{,}302$$

$$p(\text{salga } 3) = p(3) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casostotales}} = \frac{f(3)}{N} = \frac{38}{1000} = 0{,}038$$

$$p(\text{salga } 4) = p(4) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casostotales}} = \frac{f(4)}{N} = \frac{234}{1000} = 0{,}234$$

$$p(\text{salga } 5) = p(5) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casostotales}} = \frac{f(5)}{N} = \frac{196}{1000} = 0{,}196$$

$$p(\text{salga } 6) = p(6) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casostotales}} = \frac{f(6)}{N} = \frac{113}{1000} = 0{,}113$$

p(par) = $p(2\cup4\cup6)$= p(2) + p(4) + p(6) = 0,302 + 0,234 + 0,113 = 0,649.
p(menor que 6) = p(< 6) = p $(1\cup2\cup3\cup4\cup5)$ = p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) = 1 – p(6) = 1 – 0,113 = 0,887.
p(1, 2) = p(1) + p(2) = 0,117 + 0,302 = 0,419.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

②. ¿Cuál es la probabilidad de obtener 12 al multiplicar los resultados de dos dados correctos?

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

Elaboramos una tabla de multiplicación de las caras de los dos dados:

x	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

$$p(\text{obtener } 12) = \frac{\text{Casos en que sale 12}}{\text{Casos totales}} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

3. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar dos dados correctos la diferencia de sus resultados sea 3?

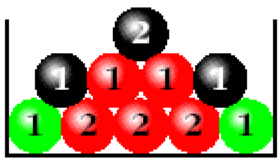
Elaboramos la tabla de diferencias de puntuaciones posibles entre dos dados:

-	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

$$p(\text{diferencia } 3) = \frac{\text{Casos en qu la diferencia es 3}}{\text{Casos totales}} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = 0{,}1\widehat{6} = 16{,}6\ \%.$$

Ejercicios propuestos (Pág 241)

1 Observa las bolas que hay en la urna:



a) Forma un cuadro de doble entrada en el que se repartan las bolas según el color (V, R, N) y el número (1, 2).

b) Calcula la probabilidad de ROJO, NEGRO, VERDE, 1 y 2, sin más que observar la composición de la urna.

c) Comprueba que las probabilidades obtenidas en b) se pueden obtener sumando filas o columnas del cuadro formado en a).

d) Calcula las siguientes probabilidades condicionadas:

P(1/ROJO), P(1/VERDE), P(1/NEGRO), P(2/ROJO), P(2/VERDE) y P(2/NEGRO).

e) Di si alguno de los caracteres ROJO, NEGRO, VERDE es independiente de 1 ó de 2.

a)

	V	R	N	Total
①	2	2	2	6
②	0	3	1	4
Total	2	5	3	10

b)

$$p(\text{ROJO}) = \frac{\text{Bolas rojas}}{\text{Total de bolas}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = 0{,}5\ (50\%)$$

$$p(\text{VERDE}) = \frac{\text{Bolas verdes}}{\text{Total de bolas}} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} = 0{,}2\ (20\%)$$

$$p(\text{NEGRO}) = \frac{\text{Bolas negras}}{\text{Total de bolas}} = \frac{3}{10} = 0{,}3\ (30\%)$$

$$p(①) = \frac{\text{Bolas con 1}}{\text{Total de bolas}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = 0{,}6\ (60\%)$$

$$p(②) = \frac{\text{Bolas con 2}}{\text{Total de bolas}} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} = 0{,}4\ (40\%)$$

c) Podemos contarlas de la urna o mirar en el cuadro del apartado a).

d) Las probabilidades condicionadas las podemos hallar directamente o mediante la fórmula.

$$p(1/\text{ROJO}) = \begin{cases} \dfrac{\text{Bolas ROJAS marcadas con 1}}{\text{Bolas ROJAS}} = \dfrac{2}{5} = 0{,}4 \Leftrightarrow (40\%) \\[2ex] \dfrac{p(1 \cap \text{ROJO})}{p(\text{ROJO})} = \dfrac{\dfrac{\text{Bolas ROJAS con 1}}{\text{Total bolas}}}{\dfrac{\text{Bolas ROJAS}}{\text{Total bolas}}} = \dfrac{2/10}{5/10} = \dfrac{2}{5} = 0{,}4 \Leftrightarrow (40\%) \end{cases}$$

$$p(1/\text{VERDE}) = \begin{cases} \dfrac{\text{Bolas VERDES marcadas con 1}}{\text{Bolas VERDES}} = \dfrac{2}{2} = 1 \Leftrightarrow (100\%) \\[2ex] \dfrac{p(1 \cap \text{VERDE})}{p(\text{VERDE})} = \dfrac{2/10}{2/10} = \dfrac{2}{2} = 1 \Leftrightarrow (100\%) \end{cases}$$

$$p(1/\text{NEGRO}) = \begin{cases} \dfrac{\text{Bolas NEGRAS marcadas con 1}}{\text{Bolas NEGRAS}} = \dfrac{2}{3} = 0{,}\widehat{6} \Leftrightarrow (66{,}\widehat{6}\%) \\[2ex] \dfrac{p(1 \cap \text{NEGRA})}{p(\text{NEGRA})} = \dfrac{2/10}{3/10} = \dfrac{2}{3} = 0{,}\widehat{6} \Leftrightarrow (66{,}\widehat{6}\%) \end{cases}$$

$$p(2/\text{ROJO}) = \begin{cases} \dfrac{\text{Bolas ROJAS marcadas con 2}}{\text{Bolas ROJAS}} = \dfrac{3}{5} = 0{,}6 \Leftrightarrow (60\%) \\[2ex] \dfrac{p(2 \cap \text{ROJO})}{p(\text{ROJO})} = \dfrac{3/10}{5/10} = \dfrac{2}{3} = 0{,}6 \Leftrightarrow (60\%) \end{cases}$$

$$p(2 / \text{VERDE}) = \begin{cases} \dfrac{\text{Bolas VERDES marcadas con 2}}{\text{Bolas VERDES}} = \dfrac{0}{2} = 0 \Leftrightarrow (0\%) \\ \dfrac{p(2 \cap \text{VERDE})}{p(\text{VERDE})} = \dfrac{0/10}{2/10} = \dfrac{0}{2} = 0 \Leftrightarrow (0\%) \end{cases}$$

$$p(2 / \text{NEGRO}) = \begin{cases} \dfrac{\text{Bolas NEGRAS marcadas con 2}}{\text{Bolas NEGRAS}} = \dfrac{1}{3} = 0,\hat{3} \Leftrightarrow (33,\hat{3}\%) \\ \dfrac{p(2 \cap \text{NEGRA})}{p(\text{NEGRA})} = \dfrac{1/10}{3/10} = \dfrac{1}{3} = 0,\hat{3} \Leftrightarrow (33,\hat{3}\%) \end{cases}$$

d) Ninguno es independiente pues $p(i/j) \neq p(i)$, para i = 1, 2 y j = ROJO, VERDE, NEGRO.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

Ejercicios propuestos (Pág 248)

①. *Calcula la probabilidad de obtener tres CUATROS al lanzar tres dados.*

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

$$p(3\ \text{Cuatros}) = p(4 \cap 4 \cap 4) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$$

ya que la probabilidad de que salga un 4 en un dado es = 1/6.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

②. *Calcula la probabilidad de no obtener NINGÚN SEIS al lanzar cuatro dados.*

(¿Cuál es la probabilidad de NO SEIS? Repite cuatro veces.)

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

$$p(\text{no salga 6 en 1 dado}) = \frac{\text{Casos que no son 6}}{\text{Casos posiables}} = \frac{5}{6}$$

$$p(\text{NINGÚN 6, en cuatro dados}) = \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296} = 0,48 \Leftrightarrow (48\%)$$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

③. *Calcula la probabilidad de obtener ALGÚN SEIS al lanzar cuatro dados. (ALGÚN SEIS es el suceso contrario de NINGÚN SEIS.)*

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

p(Algún 6) = 1 – p(NINGÚN 6) = 1 – 0,48 = 0,52 (52 %).

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

④ Calcula la probabilidad de obtener ALGÚN SEIS al lanzar seis dedos.

$$\text{p(no salga 6 en 1 dado)} = \frac{\text{Casos que no son 6}}{\text{Casos posiables}} = \frac{5}{6}$$

$$\text{p(NINGÚN 6, en seis dados)} = \left(\frac{5}{6}\right)^6 = \frac{15625}{46656} = 0{,}335 \Leftrightarrow (33{,}5\%)$$

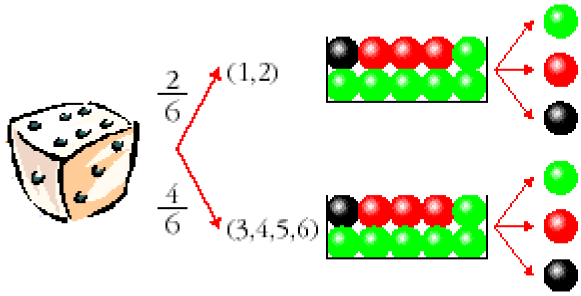
p(Algún 6, en seis dados) = 1 – p(NINGÚN 6) = 1 – 0,335 = 0,665 (66,5 %).

Ejercicios propuestos (Pág 249)

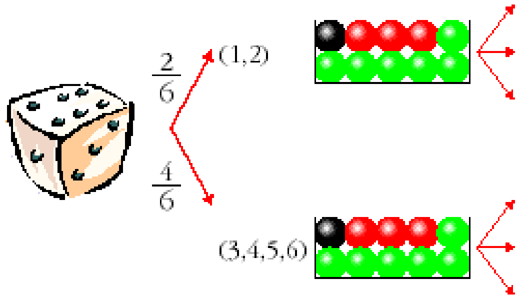
⑤ Tenemos un dado y las dos urnas descritas. Lanzamos el dado. Si sale 1 ó 2, acudimos a la urna I. Si sale 3, 4, 5 ó 6, acudimos a la urna II. Extraemos una bola de la urna correspondiente.

a) Completa las probabilidades en el diagrama en árbol.

b) Halla: P[{3, 4, 5, 6} y 🔴], P[🟢 /1], P[🔴 /5] y P[2 y 🟢].



a) Si llamamos S = {1, 2} y P = {3, 4, 5, 6}.



🟢 ⇒ $p(S\cap 🟢) = p(S)\cdot p(🟢/S) = \frac{1}{3}\cdot\frac{6}{10} = \frac{1}{5}$

🔴 ⇒ $p(S\cap 🔴) = p(S)\cdot p(🔴/S) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{10} = \frac{1}{10}$

⚫ ⇒ $p(S\cap ⚫) = p(S)\cdot p(⚫/S) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{10} = \frac{1}{30}$

🟢 ⇒ $p(P\cap 🟢) = p(P)\cdot p(🟢/P) = \frac{2}{3}\cdot\frac{6}{10} = \frac{2}{5}$

🔴 ⇒ $p(P\cap 🔴) = p(P)\cdot p(🔴/P) = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{10} = \frac{1}{5}$

⚫ ⇒ $p(P\cap ⚫) = p(P)\cdot p(⚫/P) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{10} = \frac{1}{15}$

b) $p(\{3, 4, 5, 6\}\text{ y } 🔴) = p(\{3, 4, 5, 6\} \cap 🔴) = p(P \cap 🔴) = p(P)\cdot p(🔴/P) = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{10} = \frac{1}{5}$

p[● /1] = $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ ya que cuando el dado sale 1, seleccionamos la primera urna y hay 6 bolas verdes de un total de 10.

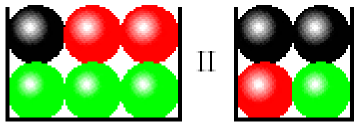
p[● /5] = $\frac{3}{10}$ ya que cuando el dado sale 5, seleccionamos la segunda urna y hay 3 bolas rojas de un total de 10.

p[2 y ●] = p(2 ∩ ●) = p(2) ·p(●/2) = $\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{10} = \frac{1}{5}$.

****

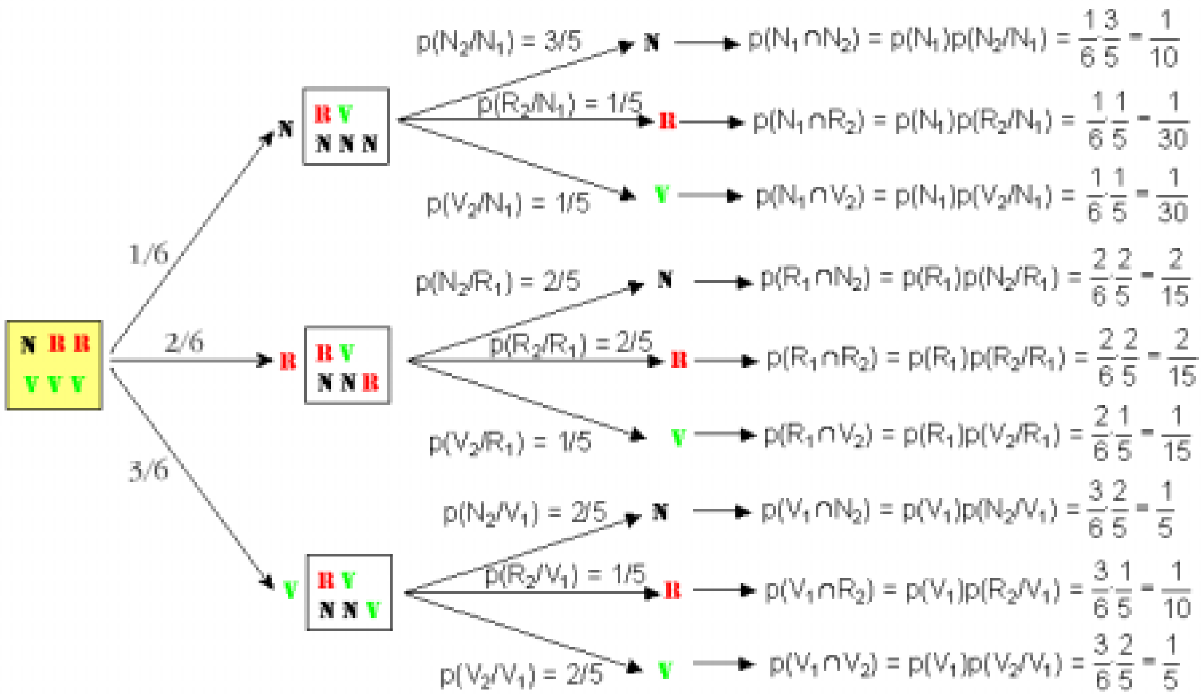
Ejercicios propuestos (Pág 251)

① Tenemos dos urnas. La experiencia consiste en extraer una bola de I, introducirla en II, remover y extraer, finalmente, una bola de II. Calcular la probabilidad de que la segunda bola extraída sea:

I  II

a) Roja. **b)** Verde. **c)** Negra.

****



a) Sea R_2 = suceso consistente en extraer la segunda bola Roja. Tenemos que tener en cuenta que la primera bola pasada de la primera urna a la segunda puede ser negra (N_1), roja (R_1) o verde (V_1), es decir que la segunda roja (R_2) viene condicionada por la bola que se haya pasado en primer lugar:

p(roja la segunda) = p(R_2) =p((pasada a II N y 2ªR) ó (pasada a II R y 2ªR) ó (pasada a II V y 2ªR) = $p((N_1 \cap R_2) \cup (R_1 \cap R_2) \cup (V_1 \cap R_2)) = p(N_1 \cap R_2) + p(R_1 \cap R_2) + p(V_1 \cap R_2) = p(N_1)\cdot p(R_2/N_1) + p(R_1)\cdot p(R_2/R_1) + p(V_1)\cdot p(R_2/V_1) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5} + \frac{2}{6}\cdot\frac{2}{5} + \frac{3}{6}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{30} + \frac{4}{30} + \frac{3}{30} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$.

b) p(verde la segunda) = p(V_2) =p((pasada a II N y 2ªV) ó (pasada a II R y 2ªV) ó (pasada a II V y 2ªV) = $p((N_1\cap V_2)\cup (R_1\cap V_2)\cup (V_1\cap V_2)) = p(N_1\cap V_2)+p(R_1\cap V_2)+p(V_1\cap V_2) = p(N_1)\cdot p(V_2/N_1) + p(R_1)\cdot p(V_2/R_1) + p(V_1)\cdot p(V_2/V_1) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}+\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}+\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}=\frac{1}{30}+\frac{2}{30}+\frac{6}{30}=\frac{9}{30}=\frac{3}{10}$.

c) p(negra la segunda) = p(N_2) =p((pasada a II N y 2ªN) ó (pasada a II R y 2ªN) ó (pasada a II V y 2ªN) = $p((N_1\cap N_2)\cup R_1\cap N_2)\cup (V_1\cap N_2)) = p(N_1\cap N_2)+p(R_1\cap N_2)+p(V_1\cap N_2) = p(N_1)\cdot p(N_2/N_1) + p(R_1)\cdot p(N_2/R_1) + p(V_1)\cdot p(N_2/V_1) = \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{5}+\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{5}+\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}=\frac{3}{30}+\frac{4}{30}+\frac{6}{30}=\frac{13}{30}$.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

Ejercicios propuestos (Pág 253)

① *En el ejercicio propuesto del apartado anterior, calcular:*

a) *Sabiendo que la segunda bola ha sido negra, ¿cuál es la probabilidad de que la primera también lo fuera? P[1ª **N** /2ª **N**].*

b) *Sabiendo que la segunda bola ha sido roja, ¿cuál es la probabilidad de que la primera haya sido negra? P[1ª **N**/2ª **R**].*

c) *¿Cuál es la probabilidad de que la primera fuera verde siendo verde la segunda? P[1ª **V** /2ª **V**].*

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

Se trata de aplicar el teorema de Bayas pues es una probabilidad a posteriori

a) p[1ª **N** /2ª **N**] = $p(N_1/N_2) = \frac{p(N_1\cap N_2)}{p(N_2)}=\frac{p(N_1)\cdot p(N_2/N_1)}{p(N_2)}=\frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{5}}{\frac{13}{30}}=\frac{3/30}{13/30}=\frac{3}{13}$.

b) p[1ª **N**/2ª **R**] = $p(N_1/R_2) = \frac{p(N_1\cap R_2)}{p(R_2)}=\frac{p(N_1)\cdot p(R_2/N_1)}{p(R_2)}=\frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}}{\frac{4}{15}}=\frac{1/30}{8/30}=\frac{1}{8}$.

c) p[1ª **V**/2ª **V**] = $p(V_1/V_2) = \frac{p(V_1\cap V_2)}{p(V_2)}=\frac{p(V_1)\cdot p(V_2/V_1)}{p(V_2)}=\frac{\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}}{\frac{3}{10}}=\frac{6/30}{9/30}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

Ejercicios Y problemas propuestos (Pág 257)

PARA PRACTICAR

① Lanzamos un dado y una moneda. Los posibles resultados son (1, C), (1, +), (2, C)...

a) Describe el espacio muestral con los doce elementos de los que consta.

Sean los sucesos:

A = "Sacar uno o dos en el dado"
B = "sacar + en la moneda"
D = [(1, C), (2, +), (3, C), (3, +), (6, +)]

b) Describe los sucesos A y B mediante todos los elementos.

c) Halla A∪B, A∩B, A∪D'

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

a) E = {(1, C), (1, +), (2, C), (2, +), (3, C), (3, +), (4, C), (4, +), (5, C), (5, +), (6, C), (6, +)}.

b) A = {(1, C), (1, +), (2, C), (2, +)}. B = {(1, +), (2, +), (3, +), (4, +), (5, +), (6, +)}

c) A∪B = { (1, C), (1, +), (2, C), (2, +), (3, +), (4, +), (5, +), (6, +)}.
A∩B = {(1, +), (2, +)}.

Para hallar A∪D', necesitamos D' = {(1, +), (2, C), (4, C), (4, +), (5, C), (5, +), (6, C)}.

Ya podemos hallar A∪D' = { (1, C), (1, +), (2, C), (2, +), (4, C), (4, +), (5, C), (5, +), (6, C)}.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

② Sea $U = \{a_1, a_2, a_3\}$ el espacio de sucesos elementales de un experimento aleatorio. ¿Cuáles de estas funciones definen una función de probabilidad? Justifica la respuesta.

a) $P[a_1] = 1/2$, $P[a_2] = 1/3$, $P[a_3] = 1/6$

b) $P[a_1] = 3/4$, $P[a_2] = 1/4$, $P[a_3] = 1/4$

c) $P[a_1] = 1/2$, $P[a_2] = 0$, $P[a_3] = 1/2$

d) $P[a_1] = 2/3$, $P[a_2] = 1/3$, $P[a_3] = 1/3$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

Para que sea distribución de probabilidad, ha de cumplirse:

$0 \leqslant p(i) \leqslant 1$ y además $\sum p(a_i) = 1$

Todas las probabilidades cumplen la primera condición están comprendidas entre 0 y 1 (ambos incluidos), tenemos que comprobar la segunda condición:

a) $\sum p(a_i) = p[a_1] + p[a_2] + p[a_3] = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3+2+1}{6} = \frac{6}{6} = 1 \Rightarrow$ Sí es función de probabilidad.

b) $\sum p(a_i) = p[a_1] + p[a_2] + p[a_3] = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} > 1 \Rightarrow$ No es función de probabilidad.

c) $\sum p(a_i) = p[a_1] + p[a_2] + p[a_3] = \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow$ Sí es función de probabilidad.

d) $\sum p(a_i) = p[a_1] + p[a_2] + p[a_3] = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2+1+1}{3} = \frac{4}{3} > 1 \Rightarrow$ No es función de probabilidad.

❸ *Determina si son compatibles o incompatibles los sucesos A y B, sabiendo que: P [A] = 1/4, P [B] = 1/2, P[AUB] = 2/3*

Para que dos sucesos sean incompatibles (no tengan nada en común) su intersección ha de ser nula, $p(A \cap B) = 0$.

Como $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ si despejamos :

$$p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{3+6-8}{12} = \frac{1}{12} \neq 0 \Rightarrow \text{A y B son compatibles.}$$

❹ *Una experiencia aleatoria consiste en preguntar a tres personas distintas, elegidas al azar, si son partidarias o no de consumir un determinado producto.*

a) *Escribe el espacio muestral asociado a dicho experimento utilizando la letra "s" para las respuestas afirmativas y la "n" para las negativas.*

b) *¿Qué elementos del espacio muestral anterior constituyen el suceso "al menos dos de las personas son partidarias de consumir el producto"?*

c) *Describe el suceso contrario de "más de una persona es partidaria de consumir el producto".*

a) E = {(s, s, s), (s, s, n), (s, n, s), (n, s, s), (s, n, n), (n, s, n), (n, n, s), (n, n, n)}

b) {*Al al menos dos de las personas son partidarias de consumir el producto*} = {(s, s, s), (s, s, n), (s, n, s), (n, s, s)}

c) Lo contrario de {"*más de una persona es partidaria de consumir el producto*"} es {"*menos de una persona (es decir una o ninguna) es partidaria de consumir el producto*"} = {(s, n, n), (n, s, n), (n, n, s), (n, n, n)}.

❺ En familias de tres hijos, se estudia la distribución de sus sexos. Por ejemplo (V, M, M) significa que el mayor es varón y los otros dos mujeres. ¿Cuántos elementos tiene el espacio muestral E? Describe los siguientes sucesos: A = "La menor es mujer", B = "El mayor es varón". ¿En qué consiste A U B?

El espacio muestral tiene $2^3 = 8$ sucesos.

A = { La menor es mujer} = {(V, V, M), (V, M, M,), (M, V, M), (M, M, M)}

B = { "El mayor es varón" } = {(V, V, V), (V, V, M), (V, M, V), (V, M, M)}

A ∪ B = {"O la menor es mujer, o el mayor es varón" }= {(V, V, M), (V, M, M,), (M, V, M), (M, M, M), (V, V, V), (V, M, V)}

❻ Se lanzan dos dados calcula la probabilidad de que la mayor de las puntuaciones sea un 1, un 2, un un 4, un 5, un 6.

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

P [La mayor de las puntuaciones sea un 1] = 1/36.
P [La mayor de las puntuaciones sea un 2] = 3/36 = 1/12.
P [La mayor de las puntuaciones sea un 3] = 5/36.
P [La mayor de las puntuaciones sea un 4] = 7/36.
P [La mayor de las puntuaciones sea un 5] = 9/36 = ¼.
P [La mayor de las puntuaciones sea un 6] = 11/36.

⑦ Una clase se compone de veinte alumnos y diez alumnas. La mitad de las alumnas y la mitad de los alumnos aprueban las matemáticas. Calcula la probabilidad de que, al elegir una persona al azar, resulte ser:

a) Alumna o que aprueba las matemáticas.
b) Alumno que suspenda las matemáticas.
c) Sabiendo que es alumno, ¿cuál es la probabilidad de que apruebe las matemáticas?
d) ¿Son independientes los sucesos ALUMNO y APRUEBA MATEMÁTICAS?

	Alumnos (V)	Alumnas(M)	Total
Aprueban Mat.(A)	10	5	15
Suspenden Mat.(A')	10	5	15
Total	20	10	30

a) p (Sea alumna ó apruebe matemáticas) = $p(M\cup A) = p(M) + p(A) - p(M\cap A) =$

$$= \frac{10}{30}+\frac{15}{30}-\frac{5}{30}=\frac{20}{30}=\frac{2}{3}.$$

b) p(sea varón y suspenda) = $p(V\cap A') = \frac{10}{30}=\frac{1}{3}$.

c) p(apruebe sabiendo que es varón) = p(apruebe/varón) = $p(A/V) = \frac{p(A\cap V)}{p(V)}=\frac{10/30}{20/30}=\frac{1}{2}$.

d) Una forma de comprobarlo es ver si la probabilidad de la intersección es o no igual al producto de las probabilidades:

$p(V\cap A) = \frac{10}{30}=\frac{1}{3}$.

p(alumno) = $p(V) = \frac{20}{30}=\frac{2}{3}$, p(aprobar) = $p(A) = \frac{15}{30}=\frac{1}{2}$, luego $p(V)\cdot p(A) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3} = p(V\cap A)$, luego sí son independientes.

⑧ Di cuál es el espacio muestral correspondiente a las siguientes experiencias aleatorias. Si es finito y tiene pocos elementos, dilos todos, y si tiene muchos, descríbelo y di el número total.

a) Extraemos una carta de una baraja española y anotamos el número.
b) Extraemos una carta de una baraja española y anotamos el palo.
c) Extraemos dos cartas de una baraja española y anotamos el palo de cada una.
d) Lanzamos seis monedas distintas y anotamos el resultado.
e) Lanzamos seis monedas distintas y anotamos el número de caras.

a) E = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12}.

b) E = {OROS, COPAS, ESPADAS, BASTOS}.

c) Si llamamos: *O* = OROS; *C* = COPAS; *E* = ESPADAS; *B* = BASTOS.
Entonces:
E = {(*O*, *O*), (*O*, *C*), (*O*, *E*), (*O*, *B*), (*C*, *O*), (*C*, *C*), (*C*, *E*), (*C*, *B*), (*E*, *O*), (*E*, *C*), (*E*, *E*), (*E*, *B*), (*B*, *O*), (*B*, *C*), (*B*, *E*), (*B*, *B*)}.

d) E tiene $2^6 = 64$ sucesos elementales. Cada suceso elemental está compuesto por seis resultados que pueden ser cara o cruz:
$(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6)$ en donde s_i puede ser cara o cruz. Por ejemplo: (C, +, C, C, +, C) es uno de los 64 elementos de *E*.

e) *E* = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}

Para Resolver

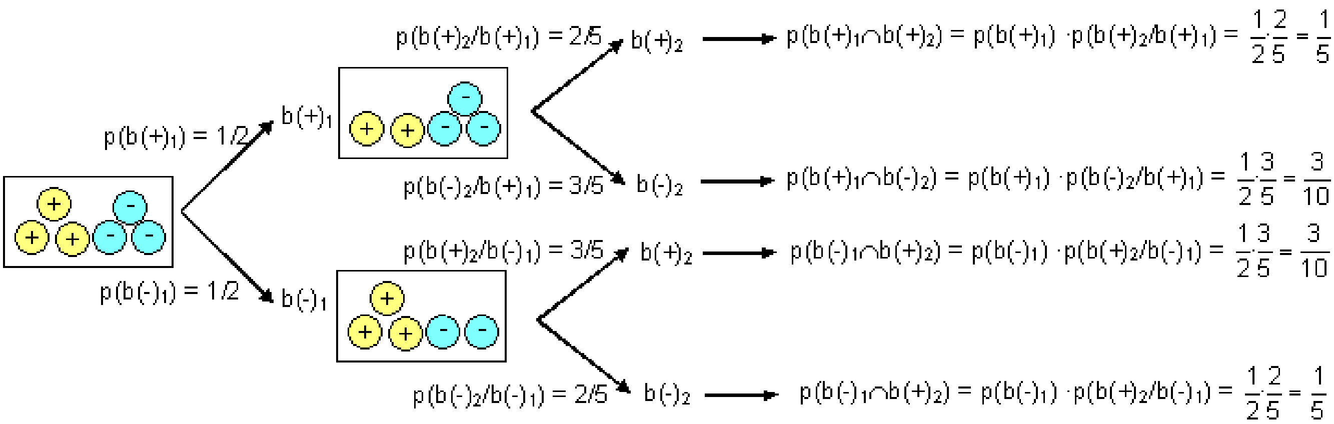
9 *En una caja hay seis bolas numeradas, tres de ellas con números positivos y las otras tres con números negativos. Se extrae una bola y después otra, sin reemplazamiento. .*

a) *Calcula la probabilidad de que el producto de los números obtenidos sea positivo.*

b) *Calcula la probabilidad de que el producto de los números obtenidos sea negativo.*

Lo primero es confeccionar el diagrama en árbol de la experiencia, para lo cual establecemos los símbolos:

$b(+)_1$ = Salir bola + en primera extracción.
$b(-)_2$ = Sacar bola negativa en segunda extracción.



a) p(producto positivo) = p(si los dos son positivas o ambas negativas) = $p((b(+)_1 \cap b(+)_2) \cup (b(-)_1 \cap b(-)_2))$ = $p((b(+)_1 \cap b(+)_2) + p(b(-)_1 \cap b(-)_2))$ = $p(b(+)_1) \cdot p(b(+)_2/b(+)_1)$ + $p(b(-)_1) \cdot p(b(-)_2/b(-)_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5} = 0{,}4 \Leftrightarrow (40\%)$.

b) p(producto negativo) = p(si luna de las dos es negativa) = $p((b(+)_1 \cap b(-)_2) \cup (b(-)_1 \cap b(+)_2))$ = $p((b(+)_1 \cap b(-)_2) + p(b(-)_1 \cap b(+)_2))$ = $p(b(+)_1) \cdot p(b(-)_2/b(+)_1)$ + $p(b(-)_1) \cdot p(b(+)_2/b(-)_1)$ = $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = 0{,}6 \Leftrightarrow (60\%)$.

11 *En una cierta ciudad, el 40% de la población tiene cabellos castaños, el 25% tiene los ojos castaños y el 15% tiene cabellos y ojos castaños. Se escoge una persona al azar:*

a) *Si tiene cabellos castaños, ¿cuál es la probabilidad de que también tenga ojos castaños?*

b) *Si tiene ojos castaños, ¿cuál es la probabilidad de que tenga cabellos castaños?*

c) *¿Cuál es la probabilidad de que no tenga cabellos ni ojos castaños?*

	Ojos castaños (C)	Ojos no castaños (C')	Total
Pelo castaño(P)	15	25	40
Pelo no castaño(P')	10	50	60
Total	25	75	100

a) p(Ojos castaños/ si pelo castaño) = p(C/P) = $\begin{cases} \frac{15}{40} = \frac{3}{8} \\ \frac{p(C \cap P)}{p(P)} = \frac{15/100}{40/100} = \frac{15}{40} = \frac{3}{8} \end{cases}$.

b) p(Pelo castaño/ si ojos castaños) = p(P/C) = $\begin{cases} \frac{15}{25} = \frac{3}{5} \\ \frac{p(P \cap C)}{p(C)} = \frac{15/100}{25/100} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5} \end{cases}$.

c) p(ni cabellos ni ojos castaños) = $p(C' \cap P') = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$.

11 Dos personas juegan a obtener la puntuación más alta lanzando sus dados A y B. El dado A tiene cuatro caras con la puntuación 6 y las otras dos caras con la puntuación 10. El dado B tiene una cara con la puntuación 3, cuatro caras con puntuación 6 y la otra con puntuación 12. ¿Qué jugador tiene más probabilidad de ganar?

B \ A	6	6	6	6	10	10
3	A	A	A	A	A	A
6	X	X	X	X	A	A
6	X	X	X	X	A	A
6	X	X	X	X	A	A
6	X	X	X	X	A	A
12	B	B	B	B	B	B

Hay 36 casos, en 14 gana A, en 6 gana B y en 16 hay empate(X).

$$p(A) = \frac{\text{GanaA}}{\text{Total}} = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}, \quad p(B) = \frac{\text{GanaB}}{\text{Total}} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

12 De los sucesos A y B se sabe que: P [A] = 2/5 , P [B] = 1/3 y P [A' ∩ B'] = 1/3. Halla P[A∪B] y P[A∩B].

Según una de las leyes de Morgan:

$$p(\overline{A} \cap \overline{B}) = p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(A \cup B) \Rightarrow p(A \cup B) = 1 - p(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \Rightarrow p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B) = \frac{2}{5} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{6+5-10}{15} = \frac{1}{15}$$

13 Sean A y B dos sucesos de un espacio de probabilidad, de manera que:

P[A] = 0,4, P[B] = 0,3 y P[A∩B] = 0,1

Calcula razonadamente:

a) p[A∪B] **b)** p[A'∪B'] **c)** p [A/B] **d)** p [A' ∩ B']

a) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0{,}4 + 0{,}3 - 0{,}1 = 0{,}6$ (60 %).

b) $p(\overline{A} \cup \overline{B}) = p(\overline{A \cap B}) = 1 - p(A \cap B) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$ (90 %).

c) $p(A/B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)} = \dfrac{0{,}1}{0{,}3} = \dfrac{1}{3} = 0{,}33\ldots$ (33,3 %).

d) $p(\overline{A} \cap \overline{B}) = p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(A \cup B) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$ (40 %).

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

14 A, B, y C son tres sucesos de un mismo espacio muestral. Expresa en función de ellos los sucesos:

a) Se realiza alguno de los tres.
b) No se realiza ninguno de los tres.
c) Se realizan los tres.
d) Se realizan dos de los tres.
e) Se realizan, al menos, dos de los tres.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

a) $A \cup B \cup C$
b) $A' \cap B' \cap C'$
c) $A \cap B \cap C$
d) $(A \cap B \cap C') \cup (A \cap B' \cap C) \cup (A' \cap B \cap C)$
e) $(A \cap B \cap C') \cup (A \cap B' \cap C) \cup (A' \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C)$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

15 Un examen consiste en elegir al azar dos temas de entre los diez del programa y desarrollar uno de ellos.

a) Un alumno sabe 6 temas. ¿Qué probabilidad tiene de aprobar el examen?
b) ¿Qué probabilidad tiene el mismo alumno de saberse uno de los temas elegidos y el otro no?

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

A = suceso consistente en aprobar
S_1 = Se sabe el primer tema.
S_2 = Se sabe el segundo tema.
N_1 = No se sabe el primer tema.
N_2 = No se sabe el segundo tema.

a) p(Aprobar) = 1 – p(suspender) = 1 – $p(N_1 \cap N_2)$ = 1 - $\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9} = 1 - \frac{2}{15} = \frac{13}{15} \approx 0{,}87 \Leftrightarrow (87\%)$.

b) p(saber uno de los dos temas) = $p((S_1 \cap N_2) \cup (N_1 \cap S_2)) = p(S_1 \cap N_2) + p(N_1 \cap S_2) =$ $p(S_1)\cdot p(N_2/S_1) + p(N_1)\cdot p(S_2/N_1) = \frac{6}{10}\cdot\frac{4}{9} + \frac{4}{10}\cdot\frac{6}{9} = \frac{4}{15} + \frac{4}{15} = \frac{8}{15} \approx 0{,}53 \Leftrightarrow (53\%)$

16 *Se lanza un dado dos veces. Calcula la probabilidad de que en la segunda tirada se obtenga un valor mayor que en la primera.*

Confeccionamos una tabla en donde ponemos ❶ si es mayor la puntuación de la primera tirada, ❷ si es mayor la puntuación de la 2ª tirada y ⓿ si son iguales

	1	2	3	4	5	6
1	⓿	❷	❷	❷	❷	❷
2	❶	⓿	❷	❷	❷	❷
3	❶	❶	⓿	❷	❷	❷
4	❶	❶	❶	⓿	❷	❷
5	❶	❶	❶	❶	⓿	❷
6	❶	❶	❶	❶	❶	⓿

p(2ª mayor que primera) = p(❷) = $\frac{15}{36} = \frac{5}{12} \approx 0{,}42 \Leftrightarrow (42\%)$

17 *Un estudiante hace dos pruebas en un mismo día. La probabilidad de que pase la primera prueba es 0,6. La probabilidad de que pase la segunda es 0,8 y la de que pase ambas es 0,5. Se pide:*

a) *Probabilidad de que pase al menos una prueba.*
b) *Probabilidad de que no pase ninguna prueba.*
c) *¿Son las pruebas sucesos independientes?*
d) *Probabilidad de que pase la segunda prueba en caso de no haber superado la primera.*

p(pase la primera prueba) = $p(p_1) = 0{,}6$.
p(pase la segunda prueba) = $p(p_2) = 0{,}8$
p(pase las dos) = $p(p_1 \cap p_2) = 0{,}5$.

a) p(pase al menos una) = $p(p_1 \cup p_2) = p(p_1) + p(p_2) - p(p_1 \cap p_2) = 0{,}6 + 0{,}8 – 0{,}5 = 0{,}9$.

b) p(no pase ninguna prueba) = $p(\overline{p_1} \cap \overline{p_2}) = p(\overline{p_1 \cup p_2}) =$ 1 – p(pruebe alguna) = 1 – 0,9 = 0,1.

c) Si son independientes ha de cumplirse $p(p_1 \cap p_2) = p(p_1) \cdot p(p_2)$, comprobémoslo: $p(p_1) \cdot p(p_2) = 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}48 \neq 0{,}5 = p(p_1 \cap p_2)$, luego no son independientes, son dependientes.

d) p(pase la 2ª/ no habiendo pasado la 1ª) = $p(p_1/\overline{p_2}) = \dfrac{p(p_1 \cap \overline{p_2})}{p(\overline{p_2})} = \dfrac{0{,}3}{0{,}4} = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$

$$p(p_1 \cap \overline{p_2}) = p(p_1 - p_2) = p(p_1) - p(p_1 \cap p_2) = 0{,}8 - 0{,}5 = 0{,}3$$

$$p(\overline{p_2}) = 1 - p(p_2) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$$

****

18 En una comarca hay dos periódicos: El Progresista y El Liberal. Se sabe que el 55% de las personas de esa comarca lee El Progresista (P), el 40% lee El Liberal (L) y el 25% no lee ninguno de ellos.

Expresa en función de P y L estos sucesos:

a) Leer los dos periódicos.

b) Leer sólo El Liberal.

c) Leer sólo El Progresista.

d) Leer alguno de los dos periódicos.

e) No leer ninguno de los dos.

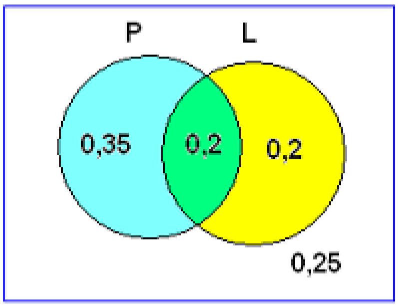
f) Leer sólo uno de los dos.

g) Calcula las probabilidades de: P, L, $P \cap L$, $P \cup L$, $P - L$, $L - P$, $(L \cup P)'$, $(L \cap P)'$.

h) Sabemos que una persona lee El Progresista. ¿Qué probabilidad hay de que, además, lea El Liberal? ¿Y de que no lo lea?

****

Datos :



p(leer el *Progresista*) = p(P) = 0,55
p(leer el *Liberal*) = p(L) = 0,4.
P(no leer ninguno) = $p(\overline{L} \cap \overline{P}) = p(\overline{L \cup P}) = 1 - p(L \cup P) = 0{,}25$.

Luego, podemos hallar la probabilidad de la unión :

$$p(L \cup P) = 1 - p(\overline{L \cup P}) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$$

y, conocida la probabilidad de la unión, la de la intersección:

$$p(L \cup P) = p(L) + p(P) - p(L \cap P) \Leftrightarrow p(L \cap P) = p(L) + p(P) - p(L \cup P) = 0{,}55 + 0{,}4 - 0{,}75 = 0{,}2$$

a) p(Leer los dos periódicos) = $p(L \cap P)$ = 0,2 (zona verde).

b) p(Leer sólo el *Liberal*) = p(L – P) = p(L) – p(L∩P) = 0,4 – 0,2 = 0,2 (zona amarilla).

c) p(Leer sólo el *Progresista*) = p(P – L) = p(P) - p(L∩P) = 0,55 – 0,2 = 0,35 (zona azul).

d) p(Leer alguno de los dos) = p(L∪P) = 0,75 (suma de todo, hallado más arriba).

e) p(No leer ninguno de los dos) = 0,25 (dato del problema).

f) p(Leer sólo uno de los dos) = p((L – P) ∪(P – L)) = p((L∩P')∪(P∩L')) = p(L∩P') + p(P∩L') = 0,35 + 0,2 = 0,55.

g) p(P) = 0,55. p(L) = 0,4. p(L∩P) = 0,2. p(L∪P) = 0,75.

p(P – L) = p(P) - p(L∩P) = 0,55 – 0,2 = 0,35.

p(L – P) = p(L) – p(L∩P) = 0,4 – 0,2 = 0,2.

$p(\overline{L \cup P}) = 1 - p(L \cup P) = 1 - 0{,}75 = 0{,}25.$

$p(\overline{L \cap P}) = 1 - p(L \cap P) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8.$

h) $p(L/P) = \frac{p(L \cap P)}{p(P)} = \frac{0{,}2}{0{,}55} = \frac{20}{55} = \frac{4}{11}$ $p(L'/P) = \frac{p(L' \cap P)}{p(P)} = \frac{0{,}35}{0{,}55} = \frac{35}{55} = \frac{7}{11}$ = 1- p(L/P) = $= 1 - \frac{4}{11}$.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

19 *Una urna A tiene 3 bolas blancas y 7 negras. Otra urna B tiene 9 bolas blancas y 1 negra. Escogemos una de las urnas al azar y de ella extraemos una bola. Calcula:*

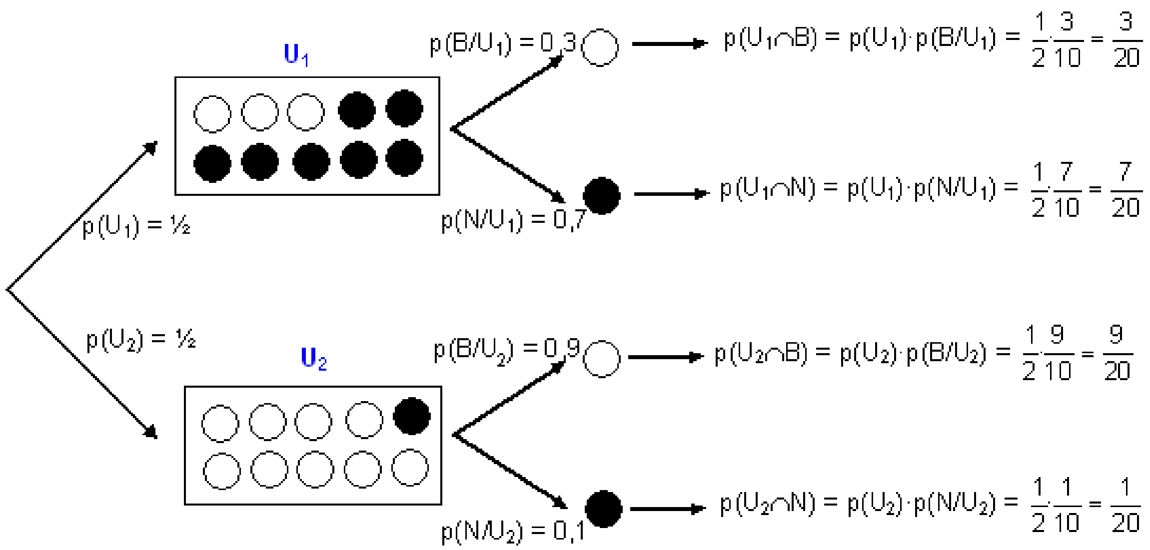
a) *P[BLANCA/A]* **b)** *P[BLANCA/B]* **c)** *P[A y BLANCA]*

d) *P[B y BLANCA]* **e)** *P [BLANCA]*

f) *Sabiendo que la bola obtenida ha sido blanca, ¿cuál es la probabilidad de haber escogido la urna B?*

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

Confeccionamos primero el diagrama en árbol, muy útil para resolver este tipo de problemas:



Urna primera = A = U_1, la segunda urna = B = U_2
Bola blanca = B y bola negra = N.

a) p(BLANCA/A) = p(B/U_1) = $\frac{3}{10} = 0{,}3$ que es la probabilidad de seleccionar una bola blanca si hemos elegido la primera urna.

b) p(BLANCA/B) = p(B/U_2) = $\frac{9}{10} = 0{,}9$ que es la probabilidad de seleccionar una bola blanca si hemos elegido la segunda urna.

c) p(A y BLANCA) = $p(U_1 \cap B) = p(U_1) \cdot p(B/U_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10} = \frac{3}{20}$.

d) p(B y BLANCA) = $p(U_2 \cap B) = p(U_2) \cdot p(B/U_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{10} = \frac{9}{20}$.

e) p(BLANCA) = p(B) = p(sea blanca y procedente de la primera urna ó balnca y procedente de la segunda urna) = $p((U_1 \cap B) \cup (U_2 \cap B)) = p(U_1 \cap B) + p(U_2 \cap B) = p(U_1) \cdot p(B/U_1) + p(U_2) \cdot p(B/U_2) = \frac{3}{20} + \frac{9}{20} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} = 0{,}6 \Leftrightarrow (60\%)$.

f) p(B/Blanca) = p(U_2/B) = $\frac{p(U_2 \cap B)}{p(B)} = \frac{p(U_2) \cdot p(B/U_2)}{p(B)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{10}}{\frac{3}{5}} = \frac{\frac{9}{20}}{\frac{12}{20}} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} = 0{,}75$.

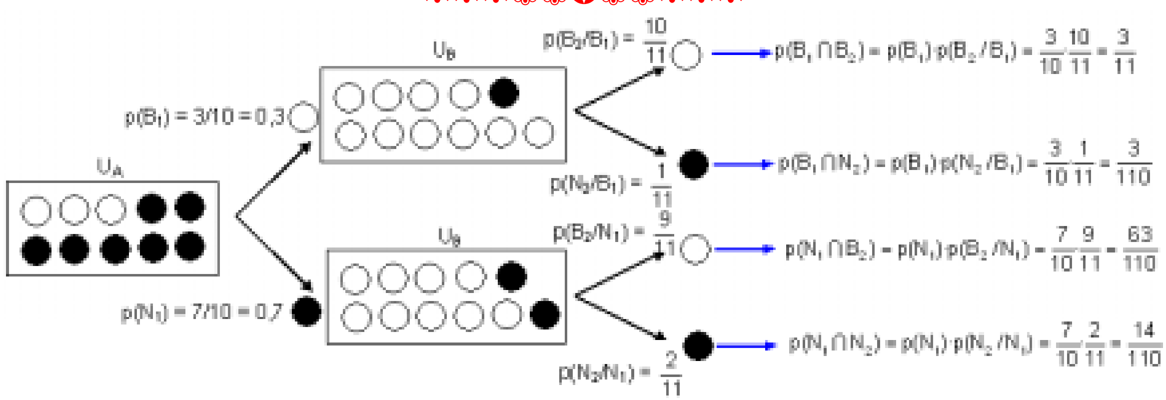
❋❋❋❁❁✪❁❁❋❋❋

20 *Tenemos las mismas urnas del ejercicio anterior. Sacamos una bola de A y la echamos en B y, a continuación, sacamos una bola de B.*

a) *¿Cuál es la probabilidad de que la segunda bola sea negra?*

b) *Sabiendo que la segunda bola ha sido negra, ¿cuál es la probabilidad de que también la primera fuese negra?*

❋❋❋❁❁✪❁❁❋❋❋



a) Es un problema de probabilidad total, se nos pide la probabilidad de que la 2ª bola sea negra (si la 1ª pasada ha sido blanca o ha sido negra) es decir la suma de todas las ramas que conducen a que la 2ª bola es negra:

p(2ª bola negra) = p(N_2) = p((2ª bola negra y 1ª blanca) ó (2ª bola negra y 1ª negra)) = $p((B_1 \cap N_2) \cup (N_1 \cap N_2)) = p(B_1 \cap N_2) + p(N_1 \cap N_2) = p(B_1) \cdot p(N_2/B_1) + p(N_1) \cdot p(B_2/N_1) = \frac{3}{110} + \frac{14}{110} = \frac{17}{110}$.

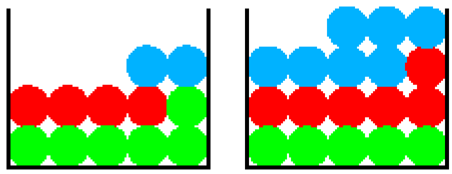
b) Ahora es el típico caso de uso del teorema de Bayes:

p(1ª negra si la 2ª ha sido negra) = $p(N_1/N_2) = \frac{p(N_1 \cap N_2)}{p(N_2)} = \frac{p(N_1) \cdot p(N_2/N_1)}{p(B_1) \cdot p(N_2/B_1) + p(N_1) \cdot p(N_2/N_1)} = \frac{14/110}{17/110} = \frac{14}{17}$.

Observa que es el cociente de probabilidad de la rama que lleva a las dos negras dividido por la suma de probabilidades de todas las ramas que conducen a la segunda negra.

---

21 *Tenemos dos urnas con estas composiciones:*



Extraemos una bola de cada urna. ¿Cuál es la probabilidad de que sean del mismo color? ¿Y la probabilidad de que sean de distinto color?

---

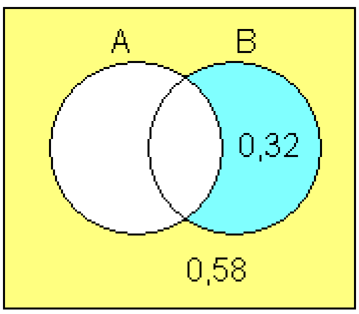
p(mismo color) = p(las dos rojas ó las dos azules ó las dos verdes) = $p((R_I \cap R_{II})\ (A_I \cap A_{II}) \cup (V_I \cap V_{II})) = p(R_I \cap R_{II}) + p(A_I \cap A_{II}) + p(V_I \cap V_{II}) = p(R_I) \cdot p(R_{II}/R_I) + p(A_I) \cdot p(A_{II}/A_I) + p(V_I) \cdot p(V_{II}/V_I)$

$= \frac{4}{12} \cdot \frac{6}{18} + \frac{2}{12} \cdot \frac{7}{18} + \frac{6}{12} \cdot \frac{5}{18} = \frac{24}{216} + \frac{14}{216} + \frac{30}{216} = \frac{68}{216} = \frac{17}{54}$

p(distinto color) = 1 – p(mismo color) = $1 - \frac{17}{54} = \frac{37}{54}$.

---

22 *Un aparato eléctrico está constituido por dos componentes A y B. Sabiendo que hay una probabilidad de 0,58 de que no falle ninguno de los componentes y que en el 32% de los casos falla B no habiendo fallado A, determina, justificando la respuesta, la probabilidad de que en uno de tales aparatos no falle la componente A.*

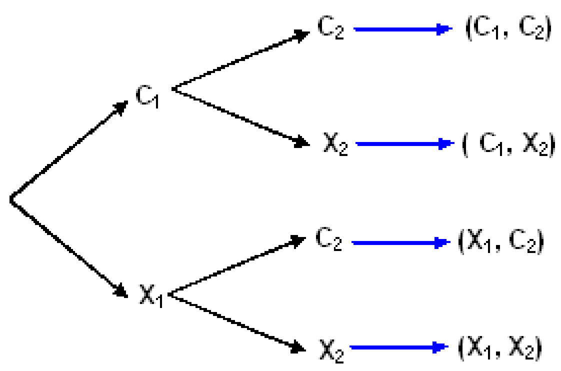


Sea : A = "falla A" y B = "falla B" ⇒ p(no falle ninguno) = p (A'∩B') = 0,58 p(falla B y no falla A) = p (B∩A').

p(no falle la componente A) = p(A') = p((A'∩B')∪(B∩A')) = p(A'∩B') + p(B∩A') = 0,58 + 0,32 = 0,90 (la parte amarilla + la parte azul = no es A).

---

23 *Dos jugadores arrojan a la vez dos monedas cada uno. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos obtengan el mismo número de caras (cero, una o dos)? Razónalo.*



p(mismo número de caras) = p (los dos no saquen ninguna cara ó los dos saquen 1 cara ó los dos saquen 2 caras) = $p((0\cap0)\cup(1\cap1)\cup(2\cap2))$ = $p(0\cap0)+p(1\cap1)+p(2\cap2)$ = $[p(0)]^2 + [p(1)]^2 + [p(2)]^2$ =

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} =$$

0,375 (37,5 %).

Ya que, según vemos en el diagrama en árbol: p(un jugador no saque ninguna cara al lanzar dos monedas, que sería lo mismo que sacar dos cruces) = p(0) = $p(X_1, X_2)$ = ¼

p(un jugador saque una cara al lanzar dos monedas) = $p((C_1, X_2) \cup (X_1, C_2))$ = ½ + ½ = ¼

p(un jugador saque 2 caras al lanzar dos monedas) = $p(C_1, C_2)$ = ¼.

24 *Se lanza un dado repetidas veces y estamos interesados en el número de tiradas precisas para obtener un 6 por primera vez.*

a) *¿Cuál es el espacio muestral?*

b) *¿Cuál es la probabilidad de que el primer 6 se obtenga en la séptima tirada?*

a) E = {1, 2, 3, 4, 5, …} ya que el primer seis puede salir en la primera, segunda, tercera, … tiradas.

b) p(el primer 6 salga en la séptima tirada) = p(en las 6 primeras tiradas no salga un 6 y salga en la séptima) = $p(6'\cap6'\cap 6'\cap 6'\cap 6'\cap 6'\cap 6) = \left(\frac{5}{6}\right)^6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5^6}{6^7} = \frac{15625}{279936}$ = 0,055 (5,5 %).

25 *Un producto está formado de dos partes: A y B. El proceso de fabricación es tal, que la probabilidad de un defecto en A es 0,06 y la probabilidad de un defecto en B es 0,07. ¿Cuál es la probabilidad de que el producto no sea defectuoso?*

p(ningún defecto) = p (no tenga defectos en A y no tenga defectos en B) = $p(A'\cap B') = p(A')\cdot p(B') = (1 - p(A))\cdot(1 - p(B)) = (1 - 0{,}06)\cdot(1 - 0{,}07) = 0{,}94 \cdot 0{,}93 = 0{,}8742$.

26 *Una urna contiene 10 bolas blancas, 6 negras y 4 rojas. Si se extraen tres bolas con reemplazamiento, ¿cuál es la probabilidad de obtener 2 blancas y una roja?*

Sea :

B_i = Suceso consistente en extraer bola blanca en la extracción i.
R_i = Suceso consistente en extraer bola roja en la extracción i.

$$p(\text{2bolas blancas y 1 roja}) = p((B_1\cap B_2\cap R_3)\cup(B_1\cap R_2\cap B_3)\cup(R_1\cap B_2\cap B_3)) \overset{(1)}{=} p(B_1\cap B_2\cap R_3) + p(B_1\cap R_2\cap B_3) + p(R_1\cap B_2\cap B_3) = p(B_1)\cdot p(B_2/B_1)\cdot p(R_3/(B_1\cap B_2)) + p(B_1)\cdot p(R_2/B_1)\cdot p(B_3/(B_1\cap R_2)) + p(R_1)\cdot p(B_2/R_1)\cdot p(B_3/(R_1\cap B_2)) \overset{(2)}{=} p(B_1)\cdot p(B_2)\cdot p(R_3) + p(B_1)\cdot p(R_2)\cdot p(B_3) + p(R_1)\cdot p(B_2)\cdot p(B_3) = \frac{10}{20}\cdot\frac{10}{20}\cdot\frac{4}{20} + \frac{10}{20}\cdot\frac{4}{20}\cdot\frac{10}{20} + \frac{4}{20}\cdot\frac{10}{20}\cdot\frac{10}{20} = 3\left(\frac{10}{20}\cdot\frac{10}{20}\cdot\frac{4}{20}\right) = 3\left(\frac{1}{20}\right) = \frac{3}{20} =$$

$0{,}15 \Leftrightarrow (15\ \%)$.

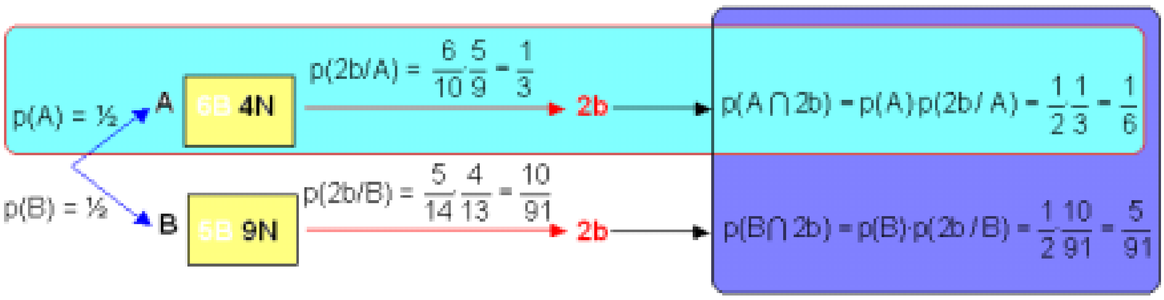
(1) Ya que los tres sucesos son incompatibles.

(2) Son independientes pues al haber reemplazamiento, cada extracción no condiciona las siguientes.

27 *Una urna A contiene 6 bolas blancas y 4 negras. Otra urna B tiene 5 blancas y 9 negras. Elegimos una urna al azar y extraemos dos bolas, que resultan ser blancas. Halla la probabilidad de que la urna elegida haya sido la A.*

Sea:

A = suceso consistente en elegir la urna A.
B = suceso consistente en elegir la urna B.
b = suceso consistente en sacar bola blanca.



Se pide p(Urna elegida sea la A habiendo salido 2 bolas blancas) = p(A/2b), que es una típica aplicación de la fórmula de Bayes, pues sabiendo lo que ha sucedido en la segunda experiencia, nos preguntamos “a posteriori” qué ha sucedido en la primera. Se resuelve dividiendo la probabilidad de la rama que incluye las dos experiencias entre todas las que conducen a la segunda :

$$P(A/2b) = \frac{p(A\cap 2b)}{p(2b)} = \frac{p(A\cap 2b)}{p(A\cap 2b)+p(B\cap 2b)} = \frac{p(A)\cdot p(2b/A)}{p(A)\cdot p(2b/A)+p(B)\cdot p(2b/B)} = \frac{1/6}{1/6+5/91} = \frac{91}{121}$$

p(A) = ½, p(B) = ½ , $p(2b/A) = \frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9} = \frac{1}{3}$, $p(2b/B) = \frac{5}{14}\cdot\frac{4}{13} = \frac{10}{91}$

$p(A\cap 2b) = p(A)\cdot p(2b/A) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, $p(B\cap 2b) = p(B)\cdot p(2b/B) = \frac{1}{2}\cdot\frac{10}{91} = \frac{5}{91}$

✻✻✻❀❀✪❀❀✻✻✻

28 *Se dispone de tres urnas: la A que contiene dos bolas blancas y cuatro rojas, la B con tres blancas y tres rojas; y la C con una blanca y cinco rojas.*

a) *Se elige una urna al azar y se extrae una bola de ella. ¿Cuál es la probabilidad de que esta bola sea blanca?*

b) *Si la bola extraída resulta ser blanca, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la urna B?*

✻✻✻❀❀✪❀❀✻✻✻

Sea :

A = suceso consistente en seleccionar la urna A.
B = suceso consistente en seleccionar la urna B.
C = suceso consistente en seleccionar la urna C.
b = suceso consistente en seleccionar la bola blanca.
r = suceso consistente en seleccionar la bola roja.

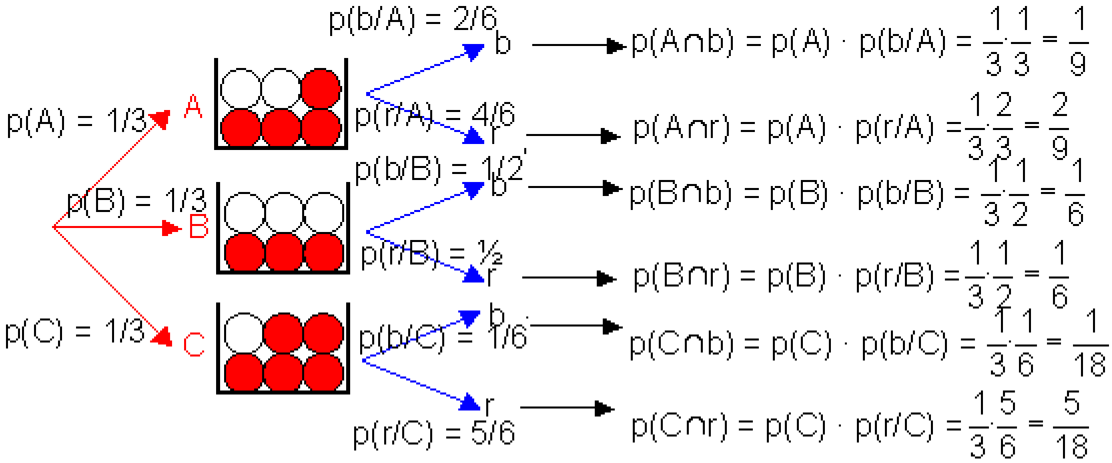
p(A) = 1/3 p(B) = 1/3, p(C) = 1/3 p(b/A) = 2/6 p(r/A) = 4/6 p(b/B) = 1/2 p(r/B) = ½
p(b/C) = 1/6 p(r/C) = 5/6

$p(A\cap b) = p(A)\cdot p(b/A) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ $\quad p(A\cap r) = p(A)\cdot p(r/A) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{9}$

$p(B\cap b) = p(B)\cdot p(b/B) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ $\quad p(B\cap r) = p(B)\cdot p(r/B) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

$p(C\cap b) = p(C)\cdot p(b/C) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{18}$ $\quad p(C\cap r) = p(C)\cdot p(r/C) = \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{6} = \frac{5}{18}$

Diagrama en árbol:



a) P(blanca), se trata de hallar la probabilidad total de que una bola sea blanca:

p(b) = p((Elijamos la urna A y después la bola extraída sea blanca) ó (elijamos la urna b y después la bola extraída sea blanca) ó (elijamos la urna C y después la bola extraída sea blanca)) = $p((A\cap b)\cup(B\cap b)\cup(C\cap b)) \overset{(1)}{=} p(A\cap b)+p(B\cap b)+p(C\cap b) = p(A)\cdot p(b/A)+p(B)\cdot P(b/B)$ $+ p(C)\cdot p(b/C) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{9}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}=\frac{2+3+1}{18}=\frac{6}{18}=\frac{1}{3}$.

b) p(se halla extraído una bola de la urna B si ha resultado ser blanca). Problema típico para cuya resolución utilizamos la regla de Bayes:

$$p(B/b) = \frac{p(B\cap b)}{p(b)} = \frac{p(B)\cdot p(b/B)}{p(A)\cdot p(b/A)+p(B)\cdot p(b/B)+p(C)\cdot p(b/C)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5 \Leftrightarrow (50\%).$$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

29 Sean A y B dos sucesos tales que: P[AUB] = 3/4 P[B'] =2/3 P[A∩ B] = 1/4 Halla P[B], P[A], P[A'∩B].

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

p(B) = 1 – p(B') = 1 – 2/3 = 1/3.

$P(A) = p(A\cup B) + p(A\cap B) - p(B) = \frac{3}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{3}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}.$

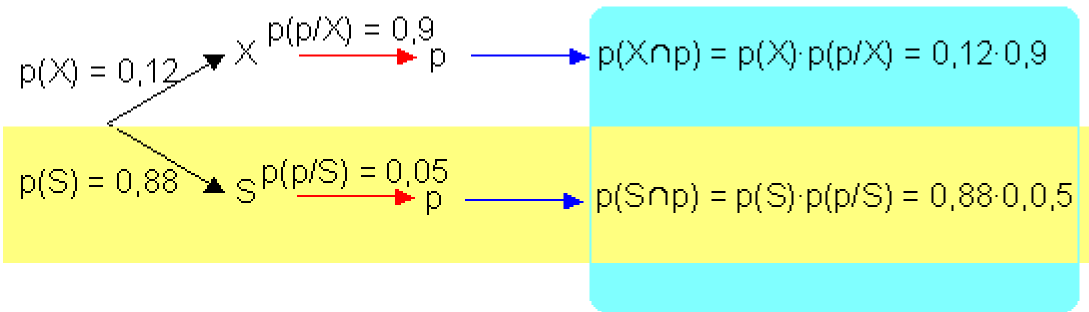
$p(A'\cap B) = p(B) - p(A\cap B) = \frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{4-3}{12}=\frac{1}{12}$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

30 En cierto país donde la enfermedad X es endémica, se sabe que un 12% de la población padece dicha enfermedad. Se dispone de una prueba para detectar la enfermedad, pero no es totalmente fiable, ya que da positiva en el 90% de los casos de personas realmente enfermas y también da positiva en el 5% de personas sanas. ¿Cuál es la probabilidad de que esté sana una persona a la que la prueba le ha dado positiva?

Sea :

X = padecer la enfermedad X.
S = sano, no padece la enfermedad.
p = Suceso consistente en que la prueba de positivo.



p(Esté sana a pesar de que la prueba ha dado positiva) = p(S/p). Es una aplicación de la regla de Bayes:

$$p(S/p) = \frac{p(S\cap p)}{p(p)} = \frac{p(S\cap p)}{p(X\cap p)+p(S\cap p)} = \frac{p(S)\cdot p(p/S)}{p(X)\cdot p(p/X)+p(S)\cdot p(p/S)} = \frac{0{,}88\cdot 0{,}05}{0{,}12\cdot 0{,}9+0{,}88\cdot 0{,}05} =$$

$$= \frac{0{,}044}{0{,}152} \approx 0{,}29 \Leftrightarrow (29\%)$$