**Resuelve tú** (Pág ❸❸❸ )

*Demuestra que la función f(x)* = $(x^2 - 4)\cos 2x$ *tiene algún punto crítico en el intervalo* (-3, 3).

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

f(x) = $(x^2 - 4)\cos 2x$

❍ Como es producto de dos funciones continuas y derivables, una polinómica de 2º grado ( $x^2$ -4) y otra trigonométrica ( cos2x), la función es continua.

❍ f(-2) = $((-2)^2 - 4)\cos(-4)$ = f(2) = $(2^2-4)\cos 4 = 0$

Como se cumplen las dos condiciones del teorema de Rolle, hay algún punto crítico en el intervalo [-2,2] y por tanto en el intervalo (-3,3) que incluye al anterior.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

**Resuelve tú** (Pág ❸❸❼ )

*Investiga, usando el criterio de la primera derivada, los extremos relativos de*

*f(x)*= $|x^2 - 5x + 4|$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

f(x) = $|x^2 - 5x + 4|$

Convertimos la función en valor absoluto en función a trozos:

Hallamos los valores que la anulan :

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la función en los tres intervalos que sobre la recta real forman los ceros :

Intervalo $(-\infty, 1)$, f(0) = 4 > 0.
Intervalo ( 1,4), f(2) = $2^2 - 5\cdot 2 + 4 = -2 < 0$
Intervalo $(4, \infty)$, f(5) = $5^2 - 5\cdot 5 + 4 = 4 > 0$

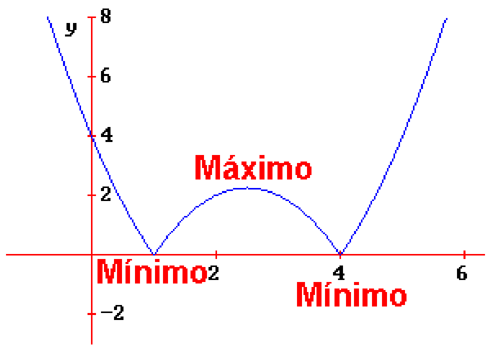
Luego la función a trozos es $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 4 & \text{Si } x < 1 \\ -x^2 + 5x - 4 & \text{Si } 1 \le x < 4 \\ x^2 - 5x + 4 & \text{Si } x \ge 4 \end{cases}$ en que el intervalo central, en el cual la función es negativa hemos cambiado de signo la función.

La función tiene dos puntos angulosos en x =1 y x = 4, en los cuales no es derivable, luego la función derivada es :

$$f'(x)=\begin{cases}2x-5 & \text{Si } x<1\\ -2x+5 & \text{Si } 1<x<4\\ 2x-5 & \text{Si } x>4\end{cases}$$

El único valor que anula la derivada primera es x = 5/2 que junto a los puntos angulosos x = 1 y x = 4 conforman los intervalos de prueba del signo de la derivada primera:

| Intervalos | (- ∞, 1) | (1, 5/2) | (5/2,4) | ( 4 , ∞) |
|---|---|---|---|---|
| f'(x) | f '(0) = -5 | f '(2) = -2·2+5=1 | f '(3) = -2·3+5=-1 | f '(5) = 2·5 - 5 = 5 |
| Función | ↘ | ↗ | ↘ | ↗ |




- En x = 1 tiene un ***mínimo relativo*** pues la función derivada pasa de negativa a la izquierda a positiva a la derecha.
- En x = 5/2 tiene un ***máximo relativo*** pues la función derivada pasa de positiva a la izquierda a negativa a la derecha.
- En x = 4 tiene un ***mínimo relativo*** pues la función derivada pasa de negativa a la izquierda a positiva a la derecha.

**Resuelve tú** (Pág 338 )

*Halla los valores de m para que la función f(x)* = $e^x - mx^2$ *sea cóncava hacia arriba en todo x.*

$f(x) = e^x - mx^2$

$f'(x) = e^x - 2mx$.

$f''(x) = e^x - 2m$

La derivada de la derivada segunda no se anula y es positiva para todo valor de x

Para que la función sea cóncava hacia arriba la derivada segunda ha de ser positiva:

$f''(x) = e^x - 2m > 0$ ; $e^x > 2m$; $0 < m < e^x/2$ ya que se anula para $x = \ln(2m)$.

## Resuelve tú (Pág 339 )

*Utilizando el criterio de la segunda derivada, demuestra que f(x) =* $\sqrt{1+x^2}$ *tiene en x = 0 un mínimo relativo.*

$$f(x)=\sqrt{1+x^2} \Rightarrow f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow f''(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{\frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{1+x^2}$$

Una vez halladas las derivadas primera hallamos los valores que anulan la primera ( posibles máximos o mínimos ) :

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=0 \Leftrightarrow x=0$$

Ahora para demostrar que es mínimo relativo ha de ser la derivada segunda positiva, que los es para cualquier valor de x, es decir f " (0) > 0, luego la función f(x) tiene un mínimo en x = 0.

## Resuelve tú (Pág 340 )

*Halla los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión de la función f(x) =* $x^4 - 8x^3$.

$f(x) = x^4 - 8x^2$

❒ Hallamos las dos primeras derivadas :

$f'(x) = 4x^3 - 16x$; $f''(x) = 12x^2 - 16$.

❒ Igualamos la derivada segunda a cero para saber los intervalo de signo constante:

$$f''(x) = 0 \;;\; 12x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{16}{12}}=\pm\sqrt{\frac{4}{3}}=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

❒ Como la función no tiene discontinuidades los intervalos de signo constante de f "(x), y su curvatura lo damos en la tabla :

| Intervalos | (- ∞, - 1,15) | (-1.15, 1,15) | ( 1,15 , ∞) |
|---|---|---|---|
| $f''(x)= 12x^2 -16$ | f "(-2) = 32 >0 | f "(0) = -16 < 0 | f "(2) = 32 > 0 |
| Función | ∪ | ∩ | ∪ |

❒ Tiene dos puntos de inflexión en los valores de x que anulan f "(x) ya que cambia de curvatura a izquierda y derecha de ellos :

$$x = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ y } x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

**Resuelve tú** (Pág ❸❹❸ )

*Dada la función f(x) = 2x³ - 8x + 1, estudia su crecimiento o decrecimiento, sus máximos, mínimos y puntos de inflexión y su concavidad. Haz una representación gráfica aproximada de y = f (x).*

$f(x) = 2x^3 - 8x - 1$

Hallamos las dos primeras derivadas : $f'(x) = 6x^2 - 8$; $f''(x) = 12x$.

Estudio de la monotonía y máximos y mínimos

Hallamos los ceros de la derivada primera : $f'(x) = 0$ ; $6x^2 - 8 = 0$ $x = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Como al ser la función polinómica no tiene discontinuidades, los intervalos de signo constante de f '(x) para el estudio de la monotonía y máximos y mínimos son :

$$\left(-\infty, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right), \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \text{ y } \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$$

Estudio de la curvatura y puntos de inflexión
Hallamos los ceros de f"(x) : $f''(x) = 0$, $12x = 0$; $x = 0$

Como la función es continua en R, los intervalos de signo constante de f "(x), para el estudio de la curvatura son:

$$(-\infty, 0) \text{ y } (0, +\infty)$$

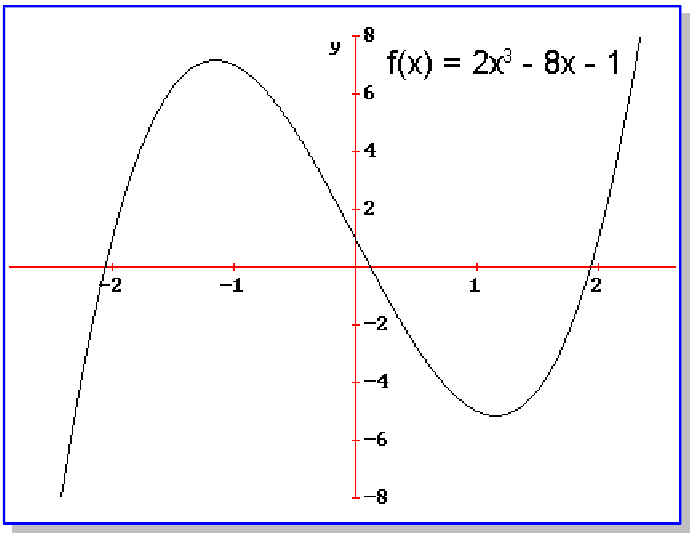
Realizamos el estudio conjunto en una tabla :

| **Intervalos** | (- ∞, -1,15) | (-1,15, 0) | (0,1,15) | ( 1,15 , ∞) |
|---|---|---|---|---|
| **f'(x)** | f '(-2) = 16 > 0 | f '(-1) = -2 < 0 | | f '(2) = 16 > 0 |
| **Monotonía** | ↗ | ↘ | | ↗ |
| **f "(x)** | f "(-1) = -12 < 0 | | f " (1 ) = 12 > 0 | |
| **Concavidad** | ∩ | | ∪ | |

Puntos críticos :

$$\left\{\begin{array}{c} \text{Maximo en } x = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ ya que pasa de creciente a la izquierda a decreciente a la dcha.} \\ \text{mínimo } x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ ya que pasa de decreciente a la izquierda a creciente a la dcha.} \\ \text{Punto de inflexión en } x = 0 \text{ pues cambia de concavidad.} \end{array}\right\}$$

La representación gráfica es :




◊◊◊▣▣⊙▣▣◊◊◊

**Resuelve tú** (Pág 344 )

*Representa la gráfica de la función $f(x) = |\ x^2 - 4x + 3\ |$*

◊◊◊▣▣⊙▣▣◊◊◊

f (x) = | $x^2$ - 4x + 3 |

Una de las formas de representar una función de 2º grado en valor absoluto es representar la parábola normalmente y después la parte de la función que sea negativa ( esté por debajo del eje horizontal ) trasladarla por encima.

❍ **Puntos de corte con los ejes** :

♦ Eje horizontal o de abscisas ( f(x) = 0)

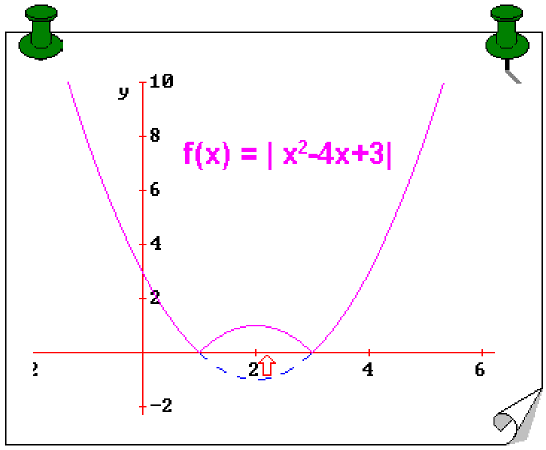
$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \left\{\begin{array}{l} \frac{4-2}{2} = 1 \\ \frac{4+2}{2} = 3 \end{array}\right\} \text{son el ( 1,0) y el (3,0)}$$

♦ Eje vertical o de ordenadas ( x = 0, y = f(0))

$f(0) = 3$, luego el punto (0, 3).

- **Vértice** ( máximo ) $x = -b/2a = 4/2 = 2$, $y = f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1$; V(2, -1 )

Ahora las representamos :




## **Resuelve tú** (Pág 347 )

*Halla el máximo absoluto y el mínimo absoluto de $f(x) = 10 - 24x + 2x^3$ en (-3, 4) (¿Ver por qué no?).*

$f(x) = 10 - 24x + 2x^3$

La función es continua y derivable para todo x.

Hallamos las máximos y mínimos relativos :

$f'(x) = -24 + 6x^2$, si $f'(x) = 0$, $x = \pm 2$. Como $f''(x) = 12x$ y $f''(2) = 24 > 0$, en $x = 2$ hay un mínimo relativo y como $f''(-2) = -24 < 0$, en $x = -2$ hay un máximo relativo.

Calculamos los límites laterales en las frontera del intervalo :

$$A = \lim_{x \to -3^+} 10 - 24x + 2x^3 = 10 - 24 \cdot (-3) + 2 \cdot (-3)^3 = 10 + 72 - 54 = 28$$

$$B = \lim_{x \to 4^-} 10 - 24x + 2x^3 = 10 - 24 \cdot 4 + 2 \cdot 4^3 = 10 - 96 + 128 = 42$$

Ahora comparamos A = 28, B = 42 f(-2) = 42 y f(2) = -22
El mínimo absoluto está en x = 2 y es (2, - 22) y el máximo absoluto está en x = -2 y es ( -2, 42).

**Resuelve tú** (Pág 348 )

*halla el máximo y el mínimo absolutos de la función* $f(x)=\frac{x-1}{x^2+3}$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

$f(x)=\frac{x-1}{x^2+3}$

Discontinuidades no tiene pues no se anula el denominador.

Hallamos la derivada primera para calcular los máximos y mínimos :

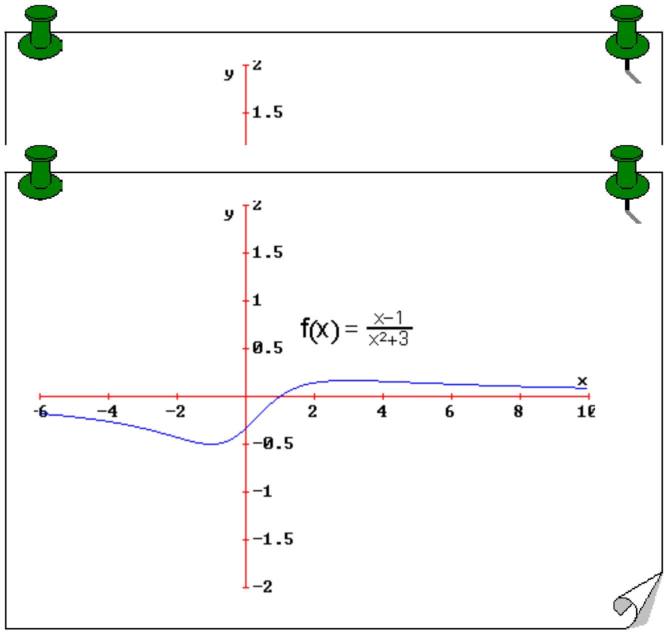
$$f'(x)=\frac{x^2+3-2x(x-1)}{(x^2+3)^2}=\frac{x^2+3-2x^2+2x}{(x^2+3)^2}=\frac{-x^2+2x+3}{(x^2+3)^2}$$

$$f'(x)=0;\ \frac{-x^2+2x+3}{(x^2+3)^2}=0 \Leftrightarrow -x^2+2x+3=0 \Leftrightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{4+13}}{-2}=\frac{-2\pm4}{-2}=\begin{Bmatrix}-1\\3\end{Bmatrix}$$

Para saber cuál es máximo y cuál mínimo usamos el criterio de la derivada primera :

Por la izquierda de 3, f ' (0) > 0 ⇒ f(x) ↗ . Por la derecha de 3 : f '(4) < 0 ⇒ f(x) ↘, luego en x = 3 tiene un máximo relativo.

Por la izquierda de - 1, f ' ( -2) < 0 ⇒ f(x) ↘ . Por la derecha de - 1 : f '(0) > 0 ⇒ f(x) ↗, luego en x = - 1 tiene un mínimo relativo.




$$A = B = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x^2+3}=0$$

Luego la función tiene un máximo absoluto en (3,1/6) y un mínimo absoluto en ( -1, -1/2).

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

**Resuelve tú** (Pág 349 )

*Calcula* $\lim_{x\to0}\frac{x}{\text{tg}x}$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

$\lim_{x\to 0}\frac{x}{tgx}=\frac{0}{tg0}=\frac{0}{0}$ Indeterminado, aplicamos la regla de L'Hopital derivando el numerador y el denominador :

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{tgx}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sec^2 x}=\frac{1}{\sec^2 0}=\frac{1}{1}=1$$

◊◊◊▣▣⊙▣▣◊◊◊

**Resuelve tú** (Pág 350 )

*Calcula* $\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2}{e^x}$

◊◊◊▣▣⊙▣▣◊◊◊

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}=\frac{\infty}{\infty}$, indeterminado, aplicamos la regla de L' Hopital derivando el numerado y el denominador :

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x}=\frac{\infty}{\infty}$, como sigue siendo indeterminado, volvemos a derivar de nuevo :
$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x}=\frac{2}{\infty}=0$

◊◊◊▣▣⊙▣▣◊◊◊

**Resuelve tú** (Pág 351 )

*Demuestra que* $\lim_{x\to 0}(x\cos ecx)=1$

◊◊◊▣▣⊙▣▣◊◊◊

$\lim_{x\to 0}(x\cos ecx)=0\cdot\cos ec0=0\cdot\infty$, indeterminado.

Si lo escribimos :

$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\frac{1}{\cos ecx}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{senx}=\frac{0}{0}$, que también es indeterminado pero ahora sí podemos aplicar la regla de L' Hopital para resolver la indeterminación :

$\lim_{x\to 0}\frac{x}{senx}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{\cos 0}=\frac{1}{1}=1$

◊◊◊▣▣⊙▣▣◊◊◊

**Resuelve tú** (Pág 352 )

*Calcula* $\lim_{x\to 0}x^x$

◊◊◊▣▣⊙▣▣◊◊◊

$L=\lim_{x\to 0}x^x=0^0$, indeterminado, si tomamos logaritmos neperianos :

$\ln L = \ln\left(\lim_{x\to 0} x^x\right) = \lim_{x\to 0} \ln(x^x) = \lim_{x\to 0} x\ln x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty}$, para resolver esta indeterminación aplicamos la regla de L' Hopital :

$$\ln L = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} -x = 0 \Rightarrow L = \lim_{x\to 0} x^x = e^0 = 1$$

◊◊◊▣▣⊙▣▣◊◊◊

**Resuelve tú** (Pág ❸❺❷ )

*Calcula* $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{3}{x}}$

◊◊◊▣▣⊙▣▣◊◊◊

$L = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{3}{x}} = 1^{\infty}$, indeterminación que resolvemos aplicando logaritmos nepaerianos y después aplicando la regla de L' Hopital :

$\ln L = \ln\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{3}{x}}\right) = \lim_{x\to 0} \ln\left((1+x)^{\frac{3}{x}}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{3\ln(1+x)}{x} = \frac{0}{0}$, indeterminado, derivamos el numerador y el denominador:

$\ln L = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{3}{1+x}}{1} = \lim_{x\to 0} \frac{3}{1+x} = \frac{3}{1} = 3$, despejando L= $e^3$

◊◊◊▣▣⊙▣▣◊◊◊

## PROBLEMAS PROPUESTOS

①

**(a)** *Enuncia el teorema de Bolzano-Weierstrass.*

**(b)** *Calcula el valor máximo absoluto y el mínimo absoluto de la función* $f(x) = -x^2 + 9x$ *en el intervalo [0, 5].*

◊◊◊▣▣⊙▣▣◊◊◊

**a)** Teorema de Bolzano : *Si una función es continua en un intervalo cerrado [a, b] y el signo de f(a) es distinto del signo de f(b), entonces existe, al menos, un c perteneciente al intervalo abierto (a, b) de modo que f(c) = 0.*

Y como consecuencia del anterior el teorema de Weierstras :

*Si una función es continua en un intervalo cerrado [a, b], alcanza en este intervalo el máximo y el mínimo absolutos.*

**b)** $f(x) = -x^2 + 9x$

Primero estudiamos si tiene algún máximo o mínimo relativo en el intervalo igualando la primera derivada a cero y estudiando el signo de la derivada segunda para esos valores :

f '(x) = - 2x + 9 ; -2x + 9 = 0 ; x = 9/2 que pertenece al intervalo [0,5]. Para saber si es máximo o mínimo halamos el signo de la derivada segunda en ese punto :

f "(x) = - 2; f "(9/2) = - 2 < 0 luego tiene un máximo relativo en x = 9 /2, y = f(9/2) = -$(9/2)^2$ + 9·(9/2) = -81/4 + 81/2 = 81/4

Ahora hemos de hallar los límites laterales de la función en los puntos frontera del intervalo :

$A=\lim_{x\to 0^+}(-x^2+9x)=0$ y $B=\lim_{x\to 5^-}(-x^2+9x)=-5^2+9\cdot 5=-25+45=20$

Como 81/4 > B = 20, **tiene un máximo absoluto en x = 9/2 y un mínimo absoluto en x = 0.**

◊◊◊▣▣⊙▣▣◊◊◊

**2**

**(a)** *Calcula a, b y c para que la función f(x) =* $\begin{cases} x^2+ax & \text{si } x<3 \\ bx+c & \text{si } x\geq 3 \end{cases}$ *cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [0, 8].*

**(b)** *Encuentra el punto (o puntos) correspondiente a la tesis del teorema.*

◊◊◊▣▣⊙▣▣◊◊◊

**a)** Para que la función $f(x)=\begin{cases} x^2+ax & \text{si } x<3 \\ bx+c & \text{si } x\geq 3 \end{cases}$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle, ha de ser continua en [0,8], derivable en (0,8) y f(0) = f(8).

**Continuidad**

Como es una función a trozos y en cada trozo es una función polinómica, es continua en cada intervalo, la duda está en el punto frontera x = 3, que hemos de hacer que los límites laterales sean iguales :

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-}(x^2+ax)=3^2+3a=9+3a=\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^-}(bx+c)=3b+c$$

Tenemos ya una ecuación con tres incógnitas 3a - 3b - c = -9, necesitamos al menos otras dos.

**Derivabilidad**

La derivada de la f(x) es : $f'(x)=\begin{cases} 2x+a & \text{si } x<3 \\ b & \text{si } x>3 \end{cases}$, la duda está en el punto x = 3 en que deben coincidir las derivadas laterales $f'(3^-) = 6 + a = f'(3^+) = b$, que nos proporciona la segunda ecuación : a - b = - 6.

**Igualdad de la función en los extremos**

f(0) = f(8), para halar f(0) sustituimos x = 0 en el primer intervalo y para f(8) sustituimos x = 8 en el segundo, quedando: 0 = 8b + c que es la tercera ecuación.

Resolvemos el sistema :

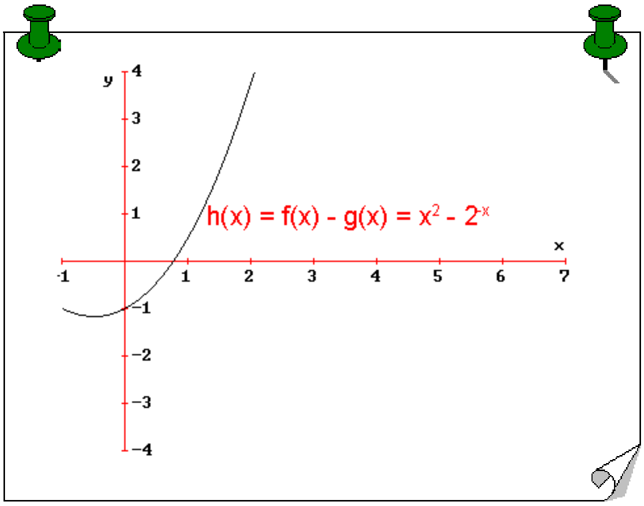
$$\left\{\begin{array}{l} a - b = -6 \\ 8b + c = 0 \\ 3a - 3b - c = -9 \quad F_3 - 3F_1 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a - b = -6 \\ 8b + c = 0 \\ -c = 9 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} a = -39/8 \\ b = 9/8 \\ c = -9 \end{array}$$

**b)** La derivada primera queda : $f'(x) = \left\{\begin{array}{ll} 2x - 39/8 & \text{si } x < 3 \\ 9/8 & \text{si } x \geq 3 \end{array}\right.$ que sólo puede anularse en el primer intervalo : f '(c) = 2c - 39/8 = 0, luego c = 39/16.

◊◊◊▣▣⊙▣▣◊◊◊

**3** *Utiliza el teorema de Bolzano y el de Rolle para probar que las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2^{-x}$, definidas para $x > 0$, se cortan en un solo punto.*

◊◊◊▣▣⊙▣▣◊◊◊




$f(x) = x^2$ ; $g(x) = 2^{-x}$

Construimos una nueva función h(x) = f(x) - g(x) = $x^2 - 2^{-x}$ de manera que cuando h(x) = 0 entonces f(x) = g(x) es decir serán los puntos de corte entre ambas funciones.

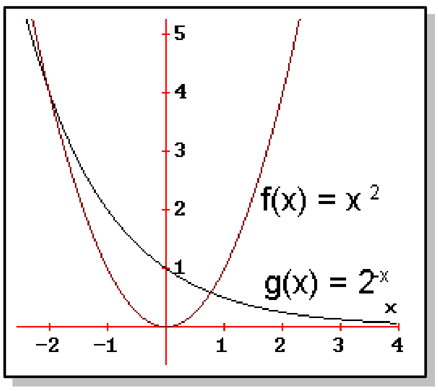
Las dos funciones son continuas y derivables luego h(x) también lo es.

Primero hemos de probar que h(x) se anula ( corta al eje horizontal ) alguna vez y después demostrar que sólo es una vez.

$$\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+}(x^2 - 2^{-x}) = -1 \text{ y } \lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty}(x^2 - 2^{-x}) = \infty - 2^{-\infty} = \infty - 0 = \infty$$

Como pasa de valores negativos a positivos y es continua, alguna vez ha de pasar por el cero ( teorema de Bolzano).

La derivada primera es f '(x) = $2x + 2^{-x}$ que para valores de x > 0 es siempre positiva, luego es creciente para valores de x > 0 y por tanto sólo puede cortar una vez al eje horizontal ( teorema de Rolle).



Si h(x) corta una vez al eje horizontal f(x) y g(x) tienen un único punto de corte para $x > 0$ ( $x = 0{,}766664$ ), como se muestra en la figura.

*4 Comprueba que la ecuación $x^7 + 3x + 3 = 0$ tiene una única solución real.*

$f(x) = x^7 + 3x + 3$

$$\lim_{x\to-\infty}(x^7+3x+3) = -\infty \text{ y } \lim_{x\to+\infty}(x^7+3x+3) = +\infty$$

Como la función pasa de negativa a positiva y es continua, en algún punto ha de pasar por cero.

Como $f'(x) = 7x^6 + 3 > 0$ para todo número real, $f(x) = x^7+3x+3$ es creciente en su dominio luego sólo puede cortar al eje horizontal una única vez que es la solución de la ecuación $x^7 + 3x + 3 = 0$.

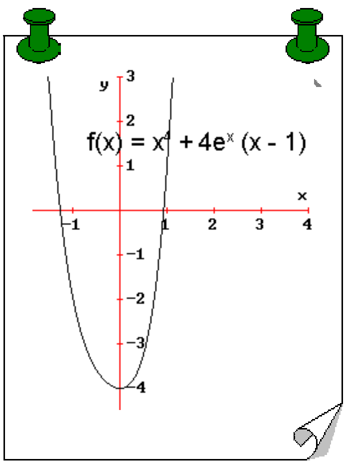
*5 Demuestra que la ecuación $x^4 + 4e^x (x - 1) = 0$ tiene únicamente dos soluciones. ¿Podrías decir entre qué dos números enteros consecutivos está cada una de las soluciones?*

$x^4 + 4e^x(x - 1) = 0$

Estudiamos la función asociada $f(x) = x^4 + 4e^x (x - 1)$

Al ser el mayor exponente par ( y $e^x$ siempre > 0) tenemos :

$$\lim_{x\to-\infty}(x^4+4e^x(x-1)) = +\infty \text{ y } \lim_{x\to+\infty}(x^4+4e^x(x-1)) = +\infty$$




Además $f'(x) = 4x^3 + 4xe^x = 4x(x^2 + e^x)$ se anula para $x = 0$ siendo negativa para valores de $x < 0$ es decir decreciente y positiva para valores de $x > 0$ es decir creciente, luego según el teorema de Rolle f(x) al ser continua y derivable tiene un mínimo relativo en $x = 0$ de valor $f(0) = -4 < 0$ .

Si tiene un mínimo en valores de la función negativo ( 0, -4) y tiende a infinito tanto para valores pequeños como grandes ( $\pm\infty$) ha de cortar al eje horizontal en dos puntos, que son las dos únicas soluciones de su ecuación asociada.

Para buscarlas como ya sabemos que $f(0) = -4 < 0$, probemos :

$f(-1) = (-1)^4 + 4\cdot e^{-1}(-1-1) = 1- 8/e < 0$ ya que $8/e > 1$
$f(-2) = (-2)^4 + 4\cdot e^{-1}(-2-1) = 4 - 12/e^2 > 0$ ya que $4 > 12/e^2 = 1{,}62....$
$f(1) = 1^4 + 4e(1-1) = 1$

Las dos raíces están entre [-2,0], una, y entre [0,1], la otra, ya que, al ser continua y cambiar de signo en los límites de los intervalos, obligatoriamente ha de pasar por cero ( teorema de Bolzano) como se ve en la figura.

◊◊◊▣▣⊙▣▣◊◊◊

6 *Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función* $f(x) = \frac{1+|x|}{1-|x|}$.

◊◊◊▣▣⊙▣▣◊◊◊

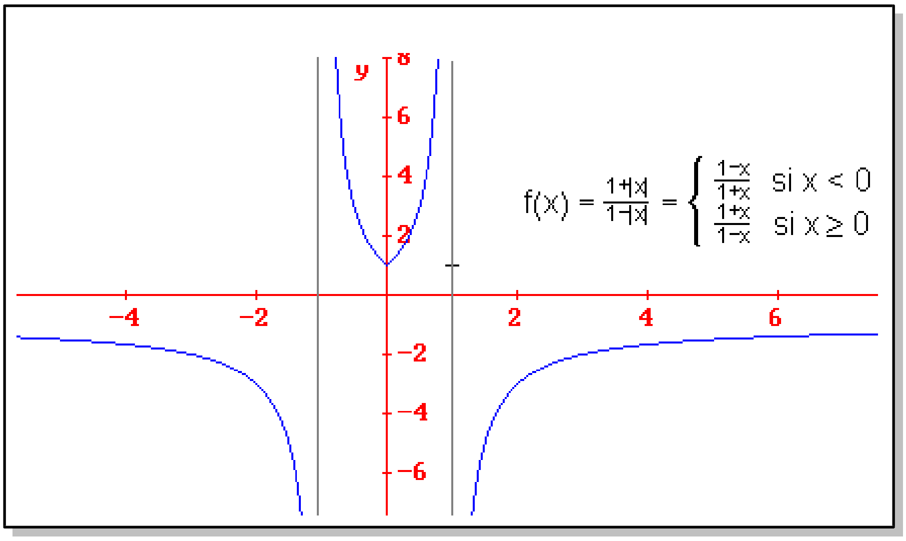
$$f(x) = \frac{1+|x|}{1-|x|} = \begin{cases} \frac{1-x}{1+x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{1+x}{1-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$ ya que para $x < 0$ $|x| = -x$ y para $x > 0$ $|x| = x$.

La función tiene dos discontinuidades $x = -1$ en el primer intervalo ( que anula el denominador) y $x = 1$ en el segundo intervalo ( que anula el denominador de ese intervalo ).

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{2}{(1+x)^2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{2}{(1-x)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$ en $x = 0$ no es derivable, es un punto anguloso.

Para estudiar la monotonía tenemos los intervalos ( - ∞, -1), (-1,0), (0,1) y (1,+∞), que estudiamos disponiéndolos en forma de tabla :

| Intervalos | (- ∞, -1) | (-1, 0) | ( -0, 1 ) | ( 1 ,+ ∞) |
|---|---|---|---|---|
| f'(x) | f '(-2) = -2 < 0 | f '(-1/2) =-8 < 0 | f '(1/2) = 8 > 0 | f '(2) = 2 >0 |
| Función | ↘ | ↘ | ↗ | ↗ |




◊◊◊▣▣⊙▣▣◊◊◊

7. *Dada la función* $f(x) = \sqrt[3]{x^2+2x+3}$, *halla*

**(a)** *Sus intervalos de crecimiento y decrecimiento*

**(b)** *Sus extremos relativos.*

**(a)**

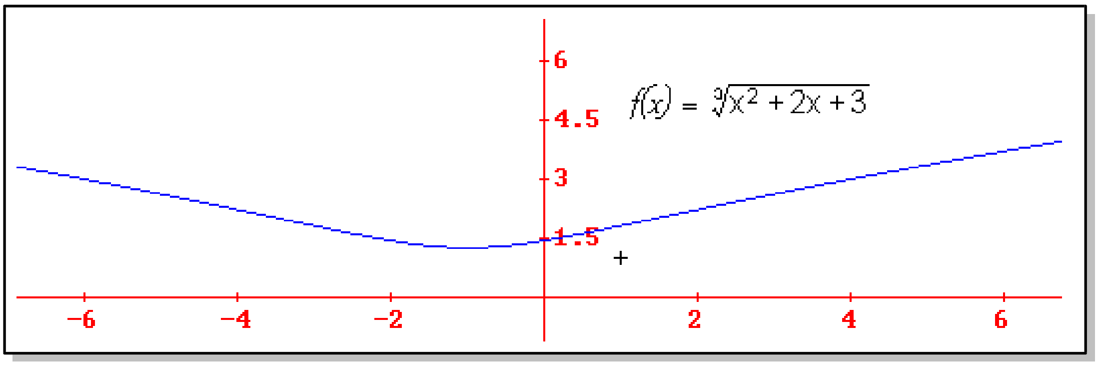
- Hallamos la derivada primera : $f'(x) = \dfrac{2x+2}{3\sqrt[3]{(x^2+2x+3)^2}}$
- Igualamos a cero la primera derivada :

$$\frac{2x+2}{3\sqrt[3]{(x^2+2x+3)^2}} = 0 \Leftrightarrow 2x+2=0 \Leftrightarrow x=-1$$

- Construimos los intervalos de signo constante de la primera derivada y hallamos su signo para estudiar la monotonía y extremos relativos :

| Intervalos | (- ∞, -1) | ( -1 ,+ ∞) |
|---|---|---|
| f'(x) | f '(-2) < 0 | f '(0) >0 |
| Función | ⇘ | ⇗ |

**(b)** Como en x = -1, f '(x) = 0 y pasa de ser decreciente a la izquierda a creciente a la derecha, tiene un mínimo relativo, El valor de $y = f(-1) = \sqrt[3]{2} \simeq 1,26$, luego el mínimo relativo tiene de coordenadas ( -1, 1,26 ) como se aprecia en la gráfica siguiente :




8. *Calcula los máximos y mínimos de la función* $y = x^2 e^{-x}$.

- Derivada primera : $y' = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = (2x - x^2)e^{-x}$.
- Valores que anulan la primera derivada :

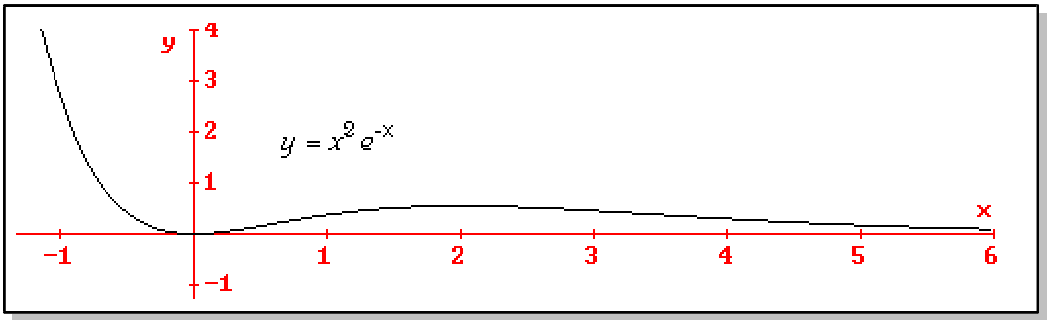
$$(2x-x^2)e^{-x}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} e^{-x}=0 \Rightarrow x=\infty \\ 2x-x^2=0 \Leftrightarrow x(2-x)=0 \begin{cases} x=0 \\ 2-x=0 \Leftrightarrow x=2 \end{cases} \end{cases}$$

- Derivada segunda : $y'' = (2-2x)e^{-x} - (2x-x^2)e^{-x} = (x^2-4x+2)e^{-x}$

➲ Sustituimos los valores que anulan la primera derivada en la segunda para saber si son máximos o mínimos :

y ”(0) = 2 > 0 luego en x= 0, y = 0 hay un mínimo relativo.

y ”(2) = $(2^2 - 4 \cdot 2 + 2)e^{-2} = -\frac{2}{e^2} < 0 \Rightarrow$ en x = 2, y =$\frac{4}{e^2}$ hay un máximo relativo.




◊◊◊▣▣⊙▣▣◊◊◊

◈ *Un agente comercial cobra una comisión*

$$C = 100 + \frac{x}{100} - \frac{x^2}{1000}$$

*donde x representa el importe (en miles de pesetas) de la venta realizada. Determina la cantidad que habrá de vender para que la comisión sea máxima.*

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

➲ Derivada primera : C ’(x)= $\frac{1}{100} - \frac{x}{500}$.

➲ Valores que anulan la primera derivada :

$$\frac{1}{100} - \frac{x}{500} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{100} = \frac{x}{500} \Leftrightarrow x = 5$$

➲ Derivada segunda : C ”(x) = -$\frac{1}{500}$ <0 $\forall$x

➲ Sustituimos los valores que anulan la primera derivada en la segunda para saber si son máximos o mínimos :

C ”(5) = -$\frac{1}{500}$ < 0 luego máximo

Luego habrá de vender 5000 pesetas para que la comisión sea el máximo.

◊◊◊▣▣⊙▣▣◊◊◊

◈◈ *Halla números reales a y b tales que la función*

$$f(x) = \begin{cases} \text{senx} & \text{si } x \le 0 \\ -x^2 + ax + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

*sea derivable en el punto x = 0. Para esos valores de a y b, analiza si f(x) tiene inflexión en el punto x = 0.*

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

Para que sea derivable en x = 0, se debe cumplir :

① Que sea continua en x = 0 lo que implica que los límites laterales en x = 0 y el valor de la función en ese punto han de ser iguales :

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \text{sen}0 = \text{sen}0 = 0 = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(-x^2 + ax + b) = b = f(0) = \text{sen}0 = 0$$

Luego ya sabemos que **b = 0**.

② Las derivadas laterales en x = 0 han de ser iguales :

$$f'(0^-) = \cos(0) = 1 = f'(0^+) = -2\cdot 0 + a$$

Luego **a = 1**.

Para que tenga un punto de inflexión en x = 0 ha de anularse la derivada segunda y ser no nula la derivada tercera en x = 0.

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x \le 0 \\ -2x+1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \Rightarrow f''(x) = \begin{cases} -\text{senx} & \text{si } x \le 0 \\ -2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \Rightarrow f'''(x) = \begin{cases} -\cos x & \text{si } x \le 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Como f "(0) = - sen 0 = 0 y f '"(0) = - cos 0 = -1, sí tiene un punto de inflexión en x = 0.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

◈1◈1 *Representa la gráfica de la función f(x) = 1 + 4x – $x^2$ .*

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

Para representar una función estudiamos los siguientes apartados :

1 *Dominio*

Como es una función polinómica de segundo grado, su dominio es $\mathcal{R}$ , ( - ∞ , +∞)

2 *Asíntotas*

○ Verticales : No tiene pues no hay ningún valor de x que haga la función ±∞

○ Horizontal : No tiene pues $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = -(\pm\infty)^2 = -\infty$

○ Oblicua : Tampoco tiene ya que es de segundo grado.

### 3 *Cortes con los ejes*:

⌖ Eje horizontal o de abscisas ( y = f(x) = 0)

$$1 + 4x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+4}}{-2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{5}}{-2} = 2 \pm \sqrt{5}$$ , ( -0,23 , 0) y ( 4,23, 0)

⌖ Eje vertical o de ordenadas ( x = 0 )

f(0) = 1, luego es el punto ( 0,1).

### 4 *Simetrías*

No tiene ya que $f(-x) = 1 - 4(-x) + (-x)^2 = 1 + 4x + x^2 \neq \pm f(x)$

### 5 Crecimiento, decrecimiento y máximos y mínimos

☒ Derivada primera f '(x) = 4 - 2x

☒ Valores que anulan la derivada primera 4 - 2x = 0 ; x = 2

☒ Derivada segunda f "(x) = -2 , f "(2) = - 2 < 0, luego tiene un máximo en x = 2 y f (2) = 1 - 4·2 - $2^2$ = 1 - 8 + 4 = - 3.

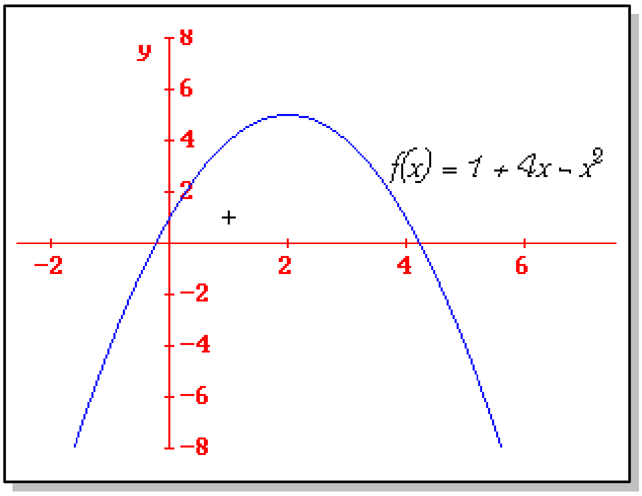
### 6 *Concavidad e inflexiones*

Como la derivada segunda f "(x) = - 2 < 0 , la función es cóncava hacia abajo en todo su dominio.

### 7 *Tabla resumen*

| x | - ∞ | (-∞,0,23) | -0,23 | (-0,23 ,0) | 0 | (0 ,2) | 2 | (2 ,4,23) | 4,23 | (4,23 ,+∞) | + ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | →-∞ | < 0 | **0, PC** | > 0 | **1, PC** | > 0 | -3 | > 0 | **0, PC** | < 0 | →-∞ |
| f '(x) | | **> 0** | | | | | **= 0** | **< 0** | | | |
| f(x) | | ⇗ | | | | | **Máx** | ⇘ | | | |
| f "(x) | | **= - 2 < 0** | | | | | | | | | |
| f(x) | | ∩ | | | | | | | | | |

## 8 *Representación*




*Estudia y representa gráficamente $y = x^3 - 3x + 2$.*

Para representar una función estudiamos los siguientes apartados :

### 1 *Dominio*

Como es una función polinómica de tercer grado, su dominio es $\mathcal{R}$ , ( - ∞ , +∞)

### 2 *Asíntotas*

- Verticales : No tiene pues no hay ningún valor de x que haga la función ±∞

- Horizontal : No tiene pues $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = (\pm\infty)^3 = \pm\infty$

- Oblicuas : Tampoco tiene ya que es de tercer grado.

### 3 *Cortes con los ejes*:

- Eje horizontal o de abscisas ( y = f(x) = 0)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | -3 | 2 |
| 1 | | 1 | 1 | -2 |
| | 1 | 1 | -2 | 0 |
| 1 | | 1 | 2 | |
| | 1 | 2 | 0 | |
| -2 | | -2 | | |
| | 1 | 0 | | |

$x^3 - 3x + 2 = 0$ , para resolver esta ecuación hemos de probar por Ruffini entre los divisores del término independiente Div(2) = { ±1, ±2 }

luego los puntos de corte con el eje horizontal son :

(-2, 0) y (1,0)

- Eje vertical o de ordenadas ( x = 0 )

f(0) = 2, luego es el punto ( 0,2).

**4** *Simetrías*

No tiene ya que $f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) + 2 = -x^3 + 3x + 2 \neq \pm f(x)$

**5** Crecimiento, decrecimiento y máximos y mínimos

☒ Derivada primera $f'(x) = 3x^2 - 3$

☒ Valores que anulan la derivada primera $3x^2 - 3 = 0$ ; $x = \pm 1$

☒ Derivada segunda $f''(x) = 6x$ , $f''(-1) = -6 < 0$, luego tiene un máximo en $x = -1$ y $f(-1) = (-1)^3 - 3\cdot(-1) + 2 = -1 + 3 + 2 = 4$, $f''(1) = 6 > 0$, luego tiene un mínimo en $x = 1$ y $f(1) = 1^3 - 3\cdot 1 + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$, que además es punto de corte con el eje OX.

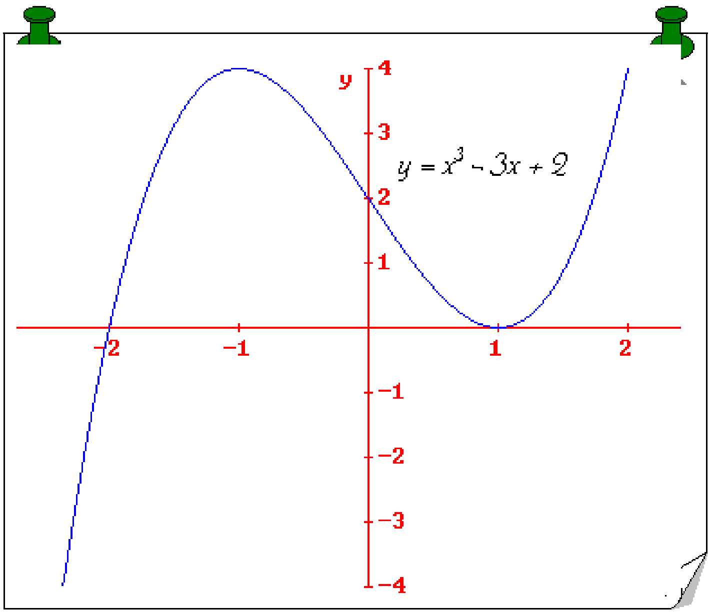
**6** *Concavidad e inflexiones*

Como la derivada segunda $f''(x) = 6x$ se anula para $x = 0$ y, a la izquierda, $f''(0^-) < 0$, la función es cóncava hacia abajo para $x < 0$ y como, a la derecha de cero, $f''(0^+) > 0$, la función es cóncava hacia arriba para $x > 0$. Tiene por tanto un punto de inflexión en $x = 0$ pues cambia de concavidad o, $f'''(x) = 6 \neq 0$

**7** *Tabla resumen*

| x | $-\infty$ | $(-\infty,-2)$ | $-2$ | $(-2,-1)$ | $-1$ | $(-1,0)$ | $0$ | $(0,1)$ | $1$ | $(1,+\infty)$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | $\to -\infty$ | $< 0$ | **0, PC** | $> 0$ | **4, Máx** | $> 0$ | $2$ | $> 0$ | **0, PC** | $< 0$ | $\to +\infty$ |
| f '(x) | | | $> 0$ | | $= 0$ | | $< 0$ | | $= 0$ | $> 0$ | |
| f(x) | | | ↗ | | Máx | | ↘ | | Min | ↗ | |
| f "(x) | | | | $< 0$ | | | P.I. | | $> 0$ | | |
| f(x) | | | | $\cap$ | | | | | $\cup$ | | |

**8** *Representación*



❶❸ *Representa gráficamente la función* $y = \frac{x}{x-3}$ *, estudiando su concavidad.*

Para representar una función estudiamos los siguientes apartados :

**1** *Dominio*

Como es una función racional no pertenecen al dominio los valores que anulan el denominador : x - 3 = 0 ; x = 3, luego dominio = $\mathcal{R} - \{3\}$ .

**2** *Asíntotas*

- Verticales : Comprobamos que para cuando x tiende a 3 la función tiende a ±∞ :

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{x}{x-3} = -\infty \text{ y } \lim_{x\to 3^+} \frac{x}{x-3} = +\infty, \text{ luego tiene una A.V. en } x = 3$$

- Horizontal : $y = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x-3} = 1$; A.H. en y =1.

- Oblicuas : No tiene pues tiene horizontal.

**3** *Cortes con los ejes*:

- Eje horizontal o de abscisas ( y = f(x) = 0)

$$\frac{x}{x-3} = 0 \Leftrightarrow x = 0, (\ 0\ ,\ 0)$$

- Eje vertical o de ordenadas ( x = 0 )

f(0) = 0, luego es el origen que evidentemente es punto de corte con ambos ejes.

**4** *Simetrías*

No tiene ya que $f(-x) = \frac{-x}{-x-3} = \frac{x}{x+3} \neq \pm f(x)$

**5** Crecimiento, decrecimiento y máximos y mínimos

☒ Derivada primera f '(x) = $\frac{x-3-x}{(x-3)^2} = -\frac{3}{(x-3)^2}$

☒ La derivada primera no se anula para ningún valor

☒ Los intervalos de signo constante lo forma la discontinuidad x = 3: ( -∞ , 3) en donde la derivada primera es < 0 y por tanto la función es decreciente y (3, +∞) en donde la derivada primera también es negativa, luego la función decreciente.

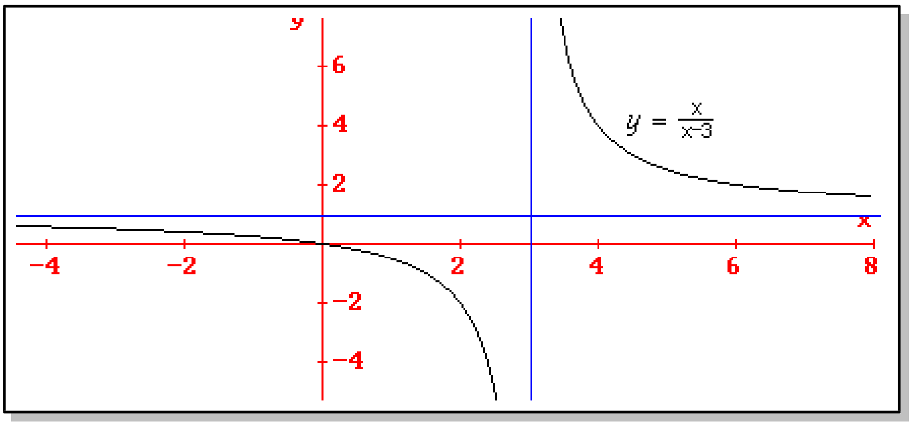
**6** *Concavidad e inflexiones*

La derivada segunda es $f''(x) = \frac{6}{(x-3)^3}$ que tampoco se hace cero para ningún valor, luego los intervalos son los mismos :( -∞ , 3) en donde la segunda derivada es < 0 y por tanto función cóncava hacia abajo y (3, +∞) en donde la derivada segunda es positiva y la función es cóncava hacia arriba.

7 *Tabla resumen*

| x | - ∞ | (-∞ , 0) | 0 | (0 ,3) | 3 | (3 ,+∞) | + ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | →1,A.H. | > 0 | **0, PC** | < 0 | **∞,A.V.** | > 0 | →1,A.H. |
| f '(x) | | **< 0** | | | | **< 0** | |
| f(x) | | ↘ | | | | ↘ | |
| f "(x) | | **< 0** | | | | **> 0** | |
| f(x) | | ∩ | | | | ∪ | |

8 *Representación*




◊◊◊▣▣⊙▣▣◊◊◊