Resuelve tú (Pág 312)

Dada la parábola de ecuación $y = x^2 - 2x + 5$, se considera la recta r que une los puntos de esa parábola de abscisas $x_1 = 0$, $x_2 = 3$. Halla la ecuación de la recta tangente a la parábola que es paralela a la recta r.

Hallamos las ordenadas de los dos puntos dados :

$x_1 = 0$, $f(0) = 5$, luego las coordenadas de este punto son P (0,5).
$x_2 = 3$, $f(3) = 3^2 - 2\cdot3 + 5 = 8$, luego las coordenadas de este punto son Q (3,8).

Ahora la pendiente de la recta que los une : $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8-5}{3-0} = 1$.

Como la pendiente en cada punto de la derivada es sus derivada $f'(x) = 2x - 2$, si igualamos tenemos $2x - 2 = 1$, $x_0 = 3/2$.

La ordenada correspondiente a ese punto es :

$$f(x_0) = f\left(\tfrac{3}{2}\right) = \left(\tfrac{3}{2}\right)^2 - 2\cdot\tfrac{3}{2} + 5 = \tfrac{17}{4}$$

y la ecuación de la recta tangente a la parábola en el punto (3/2,17/4) (paralela a al que pasa por P y Q es :

$$y - f(x_0) = m\,(x - x_0) \Leftrightarrow y - \tfrac{17}{4} = 1\cdot\left(x - \tfrac{3}{2}\right) \Leftrightarrow 4x - 4y + 11 = 0.$$

Resuelve tú (Pág 314)

Halla las derivadas laterales en $x = 0$ de la función $f(x) = 1$ si $x < 0$, $f(x) = x^2$ si $x \geq 0$. ¿ Es derivable en $x = 0$ esa función ?

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$$

Hallemos las derivadas laterales :

$$f'(0^-) = \lim_{h\to0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to0^-} \frac{1-1}{h} = 0$$

$$f'(0^+) = \lim_{h\to0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to0^-} \frac{h^2-0}{h} = 0$$

Aunque las derivadas laterales en $x = 0$ son iguales, no es derivable en $x = 0$, ya que no es continua en $x = 0$, pues los límites laterales no coinciden:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 1 = 1 \neq \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2 = 0$$

Resuelve tú (Pág ❸❶❼)

Halla f ’(x) siendo $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}\,\cos x}{x+1}$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}\,\cos x}{x+1}$$

$$f\,'(x) = \left\{\begin{array}{c} f(x) = \frac{u}{v} \\ f\,'(x) = \frac{u'v-uv'}{v^2} \end{array}\right\} = \frac{\left(\sqrt{x}\,\cos x\right)'(x+1)-(x+1)'\left(\sqrt{x}\,\text{cox}\right)}{(x+1)^2} = \left\{\begin{array}{c} f(x) = u\cdot v \\ f\,'(x) = u'v\text{-}uv' \end{array}\right\} =$$

$$= \frac{\left(\left(\sqrt{x}\right)'\cos x + \sqrt{x}\,(-\text{sen}x)\right)(x+1) - \sqrt{x}\,\cos x}{(x+1)^2} = \frac{\left(\frac{\cos x}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}\,\text{sen}x\right)(x+1) - \sqrt{x}\,\cos x}{(x+1)^2} = \frac{(\cos x - 2x\text{sen}x)(x+1) - 2x\cos x}{2(x+1)^2\sqrt{x}}$$

Resuelve tú (Pág ❸❶❾)

Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = \sqrt{\dfrac{2x^2-1}{x^2+1}}$ en $x = 1$.

$$y = \sqrt{\frac{2x^2-1}{x^2+1}}$$

$x_0 = 1$

$$y_0 = \sqrt{\frac{2\cdot 1^2-1}{1^2+1}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ y\,' = \frac{\frac{4x(x^2+1)-(2x^2-1)2x}{(x^2+1)^2}}{2\sqrt{\frac{2x^2-1}{x^2+1}}} = \frac{4x^3+4x^2-4x^3+2x}{2(x^2+1)^2\sqrt{\frac{2x^2-1}{x^2+1}}} = \frac{2x(2x+1)}{2(x^2+1)^2\sqrt{\frac{2x^2-1}{x^2+1}}} = \frac{x(2x+1)}{(x^2+1)^2\sqrt{\frac{2x^2-1}{x^2+1}}}$$

Luego la pendiente (que es la valor de la función derivada en $x_0 = 1$) es :

$$m = y'\,(x_0) = y\,'(1) = \frac{1\cdot(2\cdot 1+1)}{2^2\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{3}{4\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

Sustituyendo en la ecuación de la recta tangente en un punto :

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Leftrightarrow y - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}(x-1) \Leftrightarrow 4y\text{-}2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}\,x\ \text{-}3\sqrt{2} \Leftrightarrow 3\sqrt{2}\,x - 4y - \sqrt{2} = 0$$

Resuelve tú (Pág ❸❷⓿)

Halla la derivada de $y = F(x) = e^{\sqrt{\operatorname{sen}x}}$.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

$$F(x) = e^{\sqrt{\operatorname{sen}x}} \Rightarrow F'(x) = e^{\sqrt{\operatorname{sen}x}}\left(\sqrt{\operatorname{sen}x}\right)' = e^{\sqrt{\operatorname{sen}x}}\frac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen}x}}$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

Resuelve tú (Pág ❸❷❶)

Demuestra que $y' = (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$*, donde y = arcosx es la función inversa del coseno.*

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

y = arcos x

$x = \cos y$, si derivamos 1 = -y‘ seny; despejando y‘ $= \frac{-1}{\operatorname{sen}y}$

pero según la ecuación fundamental de la trigonometría :

$\operatorname{sen}^2 y + \cos^2 y = 1$, despejando seny = $\sqrt{1-\cos^2 y} = \sqrt{1-x^2}$, que sustituido en la anterior:

$$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

Resuelve tú (Pág ❸❷❶)

Un globo esférico se está llenando de aire de forma tal que su radio crece de acuerdo con la fórmula $r = 10 + 0,5\sqrt{t}$ *(r en cm, t en segundos). ¿A qué ritmo está decreciendo su área cuando t = 6?*

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

El área de una esfera es A = 4 $\pi r^2 = 4\pi(10+0,5\sqrt{t})^2$, derivando respecto del tiempo :

$$\frac{dA}{dt} = 4\pi \cdot 2(10+0,5\sqrt{t}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{4\pi(10+0,5\sqrt{t})}{\sqrt{t}}$$

expresión que nos da el ritmo de decrecimiento del área en función del tiempo. Si t = 6 sustituyendo queda :

$$\frac{dA}{dt}(6) = \frac{2\pi(10+0,5\sqrt{6})}{\sqrt{6}} \ \frac{m^2}{s}$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. *Se sabe que y = f (x) e y = g(x) son dos curvas crecientes en x = a. Analiza si la curva y = f (x) - g(x) ha de ser, entonces, creciente en x = a. (Si la respuesta es afirmativa, justifícala; en caso contrario, da un contraejemplo.)*

Si f(x) es creciente en x = a $\Rightarrow$ f '(a) > 0 y si g(x) es creciente en x = a $\Rightarrow$ g '(a) > 0, veamos que ocurre con la función diferencia :

h(x) = f(x) - g(x) $\Rightarrow$ h '(x) = f '(x) - g '(x) y por tanto h '(a) = f '(a) - g '(a) que puede ser:

- Negativa si f '(a) < g '(a), y por tanto h(x) será decreciente.
- Nula si f '(a) = g '(a) y por tanto no se puede afirmar que sea creciente (estricta).
- Positiva si f '(a) > g '(a) y sólo en este caso será creciente h(x).

Contraejemplo :

f(x) = 2x $\Rightarrow$ f '(x) = 2 ; f '(1) = 2 > 0, luego ↗ en x = 1.

g(x) = $3x^2$ $\Rightarrow$ g '(x) = 6x ; g '(1) = 6 > 0, luego ↗ en x = 1.

h(x) = f(x) - g(x) = 2x - $3x^2$ $\Rightarrow$ h '(x) = 2 - 6x ; h '(1) = 2 - 6 = - 4 < 0, luego ya no es creciente sino decreciente en x = 1.

2.

(a) *Halla las derivadas laterales en x = 0 de la función f(x)= -1 si x < 0, f(x) = 1 si x ≥0.*

(b) *Esa función ¿es derivable en x = 0?*

(a) $f(x) = \begin{cases} -1 & x<0 \\ 1 & x\geq 0 \end{cases}$, las derivadas laterales son :

$$f'(0^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-1-(-1)}{h} = 0 \ ; \ f'(0^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1-1}{h} = 0$$

(b) Estudiemos primero la continuidad :

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} -1 = -1 \neq \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1$$

luego como no es continua en x = 0 (los límites laterales no son iguales) no es derivable en x = 0.

3

(a) *Especifica el dominio (natural) de la función f(x) = x/ |x|.*

(b) *¿Dónde es continua?*

(c) *¿Puede asignarse un valor f(0) de modo que la función obtenida sea derivable en x = 0?*

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

(a) Convirtamos la función en valor absoluto en una función a trozos :

$f(x) = \frac{x}{|x|} \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{x}{-x} = -1 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{x} = 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$, en x = 0 no está definida (se anula el denominador), luego su dominio natural es $\Re$ - {0}.

(b) es continua en $\Re$ - {0} ya que :

$\forall a < 0 ; \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = -1 = f(a)$ y $\forall b > 0 ; \lim_{x \to b^-} f(x) = \lim_{x \to b^+} f(x) = 1 = f(b)$

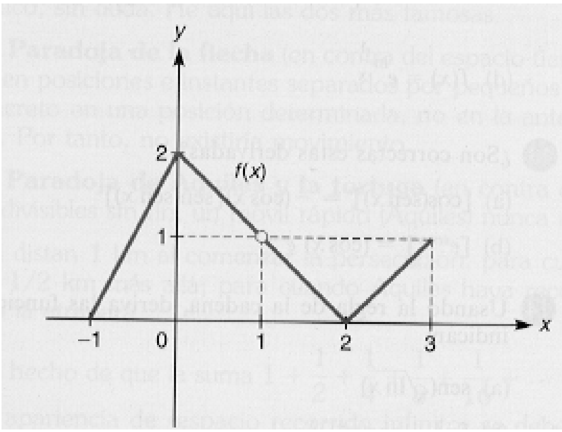
(c) No pues aunque se asigne a f(0) = 0, para que coincida con las derivadas laterales, al ser distintos los límites laterales de la función, no sería continua en cero y nunca podría ser derivable.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

4

(a) *Interpreta razonadamente el concepto geométrico de derivada.*

(b) *Como aplicación del apartado anterior y sin calcular la expresión analítica de f(x), obtén la representación gráfica de f '(x), siendo la gráfica de f(x):*



◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

(a) Como la derivada es el límite del cociente incremental de la función cuando el incremento tiende a cero y el cociente incremental representa la pendiente de la recta secante que pasa por dos puntos, si esos dos punto tienden a coincidir (h →0) la secante se convierte en tangente y la derivada de una función f(x) en un punto x = a representa la pendiente de la recta tangente en ese punto: m = f '(a).

(b) Estudiemos la función en cada intervalo :

◈ Para valores menores que x = -1 la función no existe.

◈ En x = -1 no existe derivada por la izquierda.

◈ Intervalo (-1,0), como la función es una recta, la pendiente de la recta tangente en cada punto del intervalo será constante e igual a la pendiente de la recta :

$$f'(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-0}{0-(-1)} = 2$$

◈ En x = 0, no es derivable ya que aunque es continua las derivadas (pendientes de las rectas) laterales no coinciden $f'(0^-) = 2 \neq f'(0^+) = -1$ (ver apartado siguiente).

◈ En (0,1) como la función es de primer grado su derivada es constante e igual a la pendiente de la recta :

$$f'(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-2}{1-0} = -1$$

◈ En x = 1, la función no existe luego no tiene derivada.

◈ En (1,2) como la función es de primer grado su derivada es constante e igual a la pendiente de la recta :

$$f'(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-1}{2-1} = -1$$

◈ En x = 2, f(x) no es derivable pues aunque es continua, las derivadas laterales no coinciden, $f'(2^-) = -1 \neq f'(2^+) = 1$ (ver apartado siguiente).

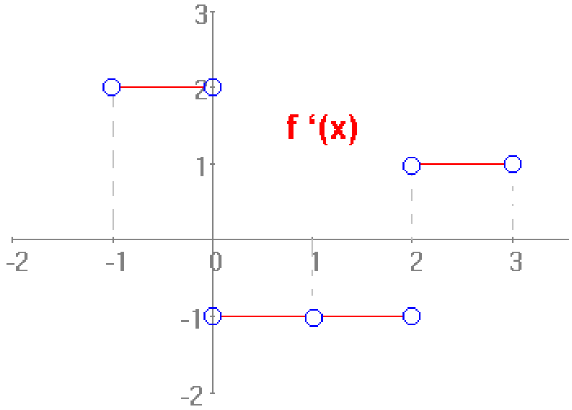
◈ En (2,3) como la función es de primer grado su derivada es constante e igual a la pendiente de la recta :

$$f'(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-0}{3-2} = 1$$

◈ Para valores mayores de x = 3 la función no existe luego no hay derivada por la derecha.

La función derivada es entonces : $f'(x) = \begin{cases} 2 & -1 < x < 0 \\ -1 & 0 < x < 1 \\ -1 & 1 < x < 2 \\ 1 & 2 < x < 3 \end{cases}$

cuya representación gráfica es :



◊◊◊▣▣⊙▣▣◊◊◊

⑤ *Dada la función f(x) = 0 si x < 0, f(x) = 3x si x ≥ 0:*

(a) *Halla las derivadas laterales de f(x) en x = 0.*

(b) *¿Es derivable f(x) en x = 0?*

◊◊◊▣▣⊙▣▣◊◊◊

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 3x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

(a) Derivadas laterales en x = 0.

$$f'(0^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{0-0}{h} = 0 \; ; \; f'(0^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{3h-0}{h} = 3$$

(b) No es derivable en x = 0 ya que las derivadas laterales no son iguales f '(0^-) = 0 ≠ f '(0^+) = 3.

◊◊◊▣▣⊙▣▣◊◊◊

⑥ *Halla las derivadas laterales en x = 3 de la función f(x) = | x^2 - 4x + 3 |. ¿Es derivable en ese punto?*

◊◊◊▣▣⊙▣▣◊◊◊

Transformamos la función en valor absoluto en una función a trozos, para lo cual primero hemos de hallar qué valores la anulan :

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \left\langle \begin{array}{l} \frac{4+2}{2} = 3 \\ \frac{4-2}{2} = 1 \end{array} \right\rangle$$

Ahora estudiamos el signo de la función en cada uno de los tres intervalos:

Intervalo de (- ∞, 1), la función es positiva (0^2 - 4·0 + 3 = 3 > 0) .
Intervalo (1, 3), la función es negativa (2^2 - 4·2 + 3 = -1 < 0).
Intervalo (3, + ∞), la función es positiva (4^2 - 4·2 + 3 = 11 > 0).

La función a trozos queda :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & -\infty < x \le 1 \\ -x^2 + 4x - 3 & 1 < x \le 3 \\ x^2 - 4x + 3 & 3 < x < +\infty \end{cases}$$

❆ Primero estudiamos la continuidad en x = 3, hallando los límites laterales y f(3) :

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} (-x^2 + 4x - 3) = -3^2 + 4 \cdot 3 - 3 = 0$$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} (x^2 - 4x + 3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 3 = 0$$

Como f(3) = 0 igual a los límites laterales, la función es continua en x = 3.

❆ Ahora estudiamos las derivadas laterales en x = 3 :

$$f\,'(3^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-(3+h)^2 + 4(3+h) - 3 - 0}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-9 - 6h - h^2 + 12 + 4h - 3}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{h(-2-h))}{h} = -2$$

$$f\,'(3^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{(3+h)^2 - 4(3+h) + 3 - 0}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{9 + 6h + h^2 - 12 - 4h + 3}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{h(2+h))}{h} = 2$$

Como no coinciden la derivadas laterales la función no es derivable en x = 3.

◈◈◈▣▣⊙▣▣◈◈◈

⑦ *Sea* $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \le 1 \\ ax^2 + b(x-1) & \text{si } x > 1 \end{cases}$

¿Para qué valores de los parámetros a y b es derivable la función f (x)?

◈◈◈▣▣⊙▣▣◈◈◈

$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \le 1 \\ ax^2 + b(x-1) & \text{si } x > 1 \end{cases} \; ; \; f\,'(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 1 \\ 2ax + b & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

La función es derivable en cada intervalo, la duda está en el punto frontera x = 1, para que sea derivable en ese punto ha de ser continua y han de coincidir las derivadas laterales :

Continua en x = 1.

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \lim_{x \to 1^-} (3x) = 3 = \lim_{x \to 1^+} (ax^2 + b(x-1)) = a \cdot 1^2 + b(1-1) = a = f(1)$$

Luego ya sabemos que a = 3.

Condición de derivabilidad :

$f'(1^-) = f'(1^+)$; $\lim\limits_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \frac{3(1+h)-3}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \frac{3+3h-3}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \frac{3h}{h} = 3$ y ahora $f'(1^+) =$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{a(1+h)^2+b(1+h-1)-3}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{3(1+2h+h^2)+bh-3}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h(6+b+h)}{h} = \lim_{h\to 0^+} 6+b+h = 6+b$$

por tanto al tener que ser la derivadas laterales iguales 3 = 6 + b ; b = - 3.

Resumiendo, para que la función sea derivable han de ser a = 3 y b = - 3

◊◊◊▣▣⊙▣▣◊◊◊

⑧ *Se ha trazado la recta tangente a la curva $y = x^3$ que tiene pendiente 3 y pasa por el punto (0, - 2). Halla el punto de tangencia.*

◊◊◊▣▣⊙▣▣◊◊◊

La pendiente es la derivada primera y ‘ (x) = $3x^2$ que igualamos a 3 y resolvemos :

$$3x^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

Luego las recta tangente es :

y = ax + b; y = 3x + b

que han de pasar por (0, -2), por tanto b = -2 . y la ecuaciones queda y = 3x -2
Si sustituimos x = 1 y = 1 que pertenece a la parábola cúbica y = x^3, punto (1,1), pero para x = -1, y = -5, punto que no pertenece a y = x^3.

El punto de tangencia es (1,1).

◊◊◊▣▣⊙▣▣◊◊◊

⑨ *Hay dos puntos en la gráfica de $y = 0{,}5x^2 + 3$ en los que la recta tangente a esa gráfica pasa por el origen. Determina esos dos puntos.*

◊◊◊▣▣⊙▣▣◊◊◊

La pendiente de la recta tangente en cualquier punto(x_0) de la parábola viene dada por su derivada : y ‘ = x_0. Sus ecuaciones serán y = x_0x + n
Si llamamos a los puntos buscados (a,b) han de ser puntos de la parábola y de cada una de las rectas tangente :

$$\begin{cases} b = 0{,}5a^2 + 3 \\ y = ax + n \end{cases}$$

Como las tangentes pasan por (0,0) n =0 y queda y =ax

Si sustituimos el punto en la recta b = a^2 y resolviendo el sistema de segundo grado, tenemos los dos puntos :

$$\begin{cases} 0,5a^2+3 = b \\ a^2 = b \end{cases} \Leftrightarrow 0,5a^2+3 = a^2 \Leftrightarrow 0,5a^2 = 3 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{\frac{3}{0,5}} = \pm\sqrt{6}\,;\ b = a^2 = 6$$

Los puntos de tangencia son : $(-\sqrt{6}\,,6)$ y $(\sqrt{6}\,,6)$

◊◊◊▣▣⊙▣▣◊◊◊

◊◊ *Calcula, para la función f(x) = x^2 - 6x + 5:*

(a) *El incremento de la función en x_0 = 3 para un incremento de la variable independiente igual a 0,01.*

(b) *El punto de la gráfica en el que la recta tangente tiene pendiente 2.*

◊◊◊▣▣⊙▣▣◊◊◊

(a) x_0=3, Δx = 0,01

Δf = f(x_0+ Δx) - f(x_0) = f (3 + Δx) - f(3) = [(3 + Δx)^2- 6 (3 + Δx) + 5] - [3^2 -6·3 +5) =
= 9 + 6Δx +(Δx)^2 - 18 - 6Δx + 5 - 9 + 18 - 5 = (Δx)^2 = 0,01^2 = 0,0001 = 10^{-4}.

(b) m = 2.

la pendiente es f '(x) = 2x - 6 = 2 ; **x = 4**, y = f(4) = 4^2 -6·4 + 5 = 16 - 24 + 5 = **- 3**.

El punto es (4,-3).

◊◊◊▣▣⊙▣▣◊◊◊

◊◊ *Halla el punto de intersección de las rectas tangentes a la gráfica de y = x^3 - 3x en los puntos de abscisas x = -1 y x=2.*

◊◊◊▣▣⊙▣▣◊◊◊

❍ ***Primera recta***

a = - 1
f(a) = f(-1) = $(-1)^3$ -3(-1) = -1 + 3 = 2
f '(x) = 3x^2 - 3.
m = f '(-1) = 3$(-1)^2$ - 3 = 0
Luego la ecuación de la recta tangente es y - f(a) = m(x-a) ; $r_1 \equiv$ y - 2 = 0

❍ ***Segunda recta***

a = 2
f(a) = f(2) = $(2)^3$ -3(2) = 8 - 6 = 2
f '(x) = $3x^2$ - 3.
m = f '(2) = $3(2)^2$ - 3 = 12 - 3 = 9
Luego la ecuación de la recta tangente es y - f(a) = m(x-a) ; $r_1 \equiv$ y - 2 = 9(x-2) ; $r_1 \equiv$ 9x - y - 16 = 0.

La intersección de ambas rectas la calculamos resolviendo el sistema de ecuaciones que forman :

$$\begin{cases} 9x-y-16 = 0 \\ y-2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y=2; 9x-2-16=0;\ x=\tfrac{18}{9}=2,\ P(2,2).$$

◊◊◊▣▣⊙▣▣◊◊◊

◊◊ *¿Hay algún valor x = a donde la recta tangente a la gráfica de y = sen (x/3) sea paralela a la recta y = 0,5x + 2?*

◊◊◊▣▣⊙▣▣◊◊◊

La derivada de la función en ese punto (pendiente) y ' = cos (a/3) y la pendiente de la recta tangente (0,5) han de ser iguales, por tanto tenemos que resolver la ecuación :

$$\cos\tfrac{a}{3}=\tfrac{1}{2} \Leftrightarrow \tfrac{a}{3}=\arccos\tfrac{1}{2}=60^0+360k=\tfrac{\pi}{3}+2\pi k \text{ rad} \Rightarrow a=180^0+1080k=\pi+6\pi k$$

◊◊◊▣▣⊙▣▣◊◊◊

◊◊ *Calcula f '(1) para las siguientes funciones:*

(a) *f(x) = 3^x*
(b) *f(x) =* $\sqrt[5]{x^2}$

◊◊◊▣▣⊙▣▣◊◊◊

(a) f(x) = 3^x .
f '(x) = 3^x L3, ya que si y = a^u $\Rightarrow$ y ' = u ' ·a^u La, por tanto f '(1) = 3L3 =$L3^3$ = L27.

(b) *f(x) =* $\sqrt[5]{x^2}=x^{\frac{2}{5}}$

$$f'(x)=\tfrac{2}{5}x^{\frac{2}{5}-1}=\tfrac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}}=\frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}} \Rightarrow f'(1)=\frac{2}{5\sqrt[5]{1^3}}=\tfrac{2}{5}$$

◊◊◊▣▣⊙▣▣◊◊◊

◊◊ *Calcula la derivada en x = 0 de la función*

$$f(x)=6x^3(3\sqrt{x+2}+\operatorname{sen}x-\tfrac{x+1}{x+3})$$

◊◊◊▣▣⊙▣▣◊◊◊

Hallemos primero la derivada:

$$f'(x) = (6x^3)'(3\sqrt{x+2} + \operatorname{sen}x - \tfrac{x+1}{x+3}) + 6x^3(3\sqrt{x+2} + \operatorname{sen}x - \tfrac{x+1}{x+3})' =$$

$$= 18x^2(3\sqrt{x+2} + \operatorname{sen}x - \tfrac{x+1}{x+3}) + 6x^3\left(\frac{3}{2\sqrt{x+2}} + \cos x - \frac{x+3-x-1}{(x+3)^2}\right) =$$

$$= 18x^2(3\sqrt{x+2} + \operatorname{sen}x - \tfrac{x+1}{x+3}) + 6x^3\left(\frac{3}{2\sqrt{x+2}} + \cos x - \frac{2}{(x+3)^2}\right)$$

Sustituyendo la x por cero f '(0) = 0.

15 Determina la función derivada de las funciones que se especifican.

a) $f(x) = 3\operatorname{sen}x - \frac{1}{2\sqrt{x}} = 3\operatorname{sen}x - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = 3\cos x - \frac{1}{2}(\frac{-1}{2})x^{-\frac{1}{2}-1} =$

$= 3\cos x + \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} = 3\cos x + \frac{1}{4\sqrt{x^3}} = 3\cos x + \frac{1}{4x\sqrt{x}} = 3\cos x + \frac{\sqrt{x}}{4x^2}$

b) $f(x) = \frac{x\cos x - \operatorname{tg}x}{x\sqrt{x}-1} + \frac{1}{\ln x} \Rightarrow f'(x) = \frac{(\cos x - x\operatorname{sen}x - \sec^2 x)(x\sqrt{x}-1) - (x\cos x - \operatorname{tg}x)\left(\sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}}\right)}{(x\sqrt{x}-1)^2} - \frac{1}{x\ln^2 x}$

16 ¿Son correctas estas derivadas?

a) $[\operatorname{sen}(x^2)]' = 2x\cos(x^2)$, sí es correcta ya la derivada de y = senu es y '= u 'cosu

b) $[\ln(1+x^3)]' = \frac{3x^2}{(1+x^3)}$ sí es correcta pues si y = ln u ⇒ y ' = $\frac{u'}{u}$

17 Usando la regla de la cadena, halla la función derivada de:

a) f(x) = sen(cos x)

Si u(x) = cosx ⇒ f(u) = sen u y derivando f '(x) = f '(u) · u '(x) = cosu · (-senx) = -cos(cosx)·senx

b) $f(x) = \ln\sqrt{\ln x}$; si u(x) = lnx ⇒ f(u) = $\ln\sqrt{u}$; $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{u}}(\sqrt{u})' = \frac{1}{\sqrt{\ln x}}\frac{1}{2\sqrt{\ln x}}\frac{1}{x} = \frac{1}{2x\ln x}$

18

(a) *Halla las tres primeras derivadas de f(x) = e^{3x}*
(b) *Escribe y demuestra una fórmula para la derivada n-ésima de f(x) = e^{3x}*

a) f '(x) = 3 e^{3x}, f ''(x) = 9 e^{3x}, f '''(x) = 27 e^{3x}.

b) $f^{(n)} = 3^n e^{3x}$.

Demostración por indución:
f '(x) = $3^1 e^{3x}$
f ''(x) = $3^2 e^{3x}$
f '''(x) = $3^3 e^{3x}$
.....
.....
$f^{(n)} = 3^n e^{3x}$
Se cumple para n = 1 y supuesto que se cumple para n-1 :
$f^{(n-1)}(x) = 3^{n-1} e^{3x}$, si derivamos $f^{(n)} = 3^{n-1+1} e^{3x} = 3^n e^{3x}$ *Q.E.D.*

AUTOEVALUACIÓN

1 *Discute si estas tres definiciones de la derivada de f(x) en x = a son correctas.*

a) $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, es la definición del libro de derivada en un punto, el límite cuando el incremento de la variable independiente tiende a cero del cociente incremental o tasa de variación media.

b) $f'(a) = \lim\limits_{b\to a} \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, si b = a + h, cuando $b\to a$, el incremento $h\to 0$ edemas b- a = h, luego es la misma definición anterior como se puede comprobar sustituyendo.

c) $f'(a) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{f(a+\varepsilon)-f(a)}{\varepsilon}$, es igual que la del apartado **a)** pero llamando al incremento ε en lugar de h.

2

(a) *Define la derivada de una función f en un punto a.*
(b) *Aplicando la definición de derivada, demuestra que si f es derivable y periódica, de período T, entonces su derivada f ' también es periódica de período T.*

a) $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, el límite, cuando el incremento de la variable independiente tiende a cero, del cociente incremental o tasa de variación media.

b) Si la función f es periódica f(x) = f (x+T), entonces f(a+T) = f(a) y f(a+T+h) = f(a+h), luego aplicando la definición de derivada en un punto x = a :

$$f'(a+T) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+T+h)-f(a+T)}{h} = \left\{ \begin{array}{c} f(a+T+h) = f(a+h) \\ f(a+T) = f(a) \end{array} \right\} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$$

◊◊◊▣▣⊙▣▣◊◊◊

③

(a) *Halla las derivadas laterales de la función f(x) = |x|, en x = 0.*

(b) *Esa función ¿en qué puntos es derivable?*

◊◊◊▣▣⊙▣▣◊◊◊

a) Escribimos la función en valor absoluto en forma de intervalo : $f(x) = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$

y calculamos las derivadas laterales :

$$f'(0^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h-0}{h} = \lim_{h \to 0^-} -1 = -1$$

$$f'(0^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h-0}{h} = \lim_{h \to 0^+} 1 = 1$$

b) Como los intervalos son continuos y derivables, la duda se presenta en el punto frontera, en el cual, al coincidir las derivadas laterales, no es derivable.

Es derivable para todo $x \neq 0$

◊◊◊▣▣⊙▣▣◊◊◊

④

(a) *Halla las derivadas laterales de la función f(x) = x + |x| en x = 3 y en x = 0.*

(b) *Esa función ¿en qué puntos de la recta real es derivable?*

◊◊◊▣▣⊙▣▣◊◊◊

a) Ponemos la función en valor absoluto en forma de intervalos: $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 2x & x \geq 0 \end{cases}$

ya que para valores negativos |x| es -x y x - x = 0 y para valores positivos |x| = x y x + x = 2x.

◆ **Derivadas laterales en x = 3**

$$f'(3^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{2(3+h)-2\cdot 3}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{6+2h-6}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{2h}{h} = \lim_{h\to 0^-} 2 = 2$$

$$f'(3^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{2(3+h)-2\cdot 3}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{6+2h-6}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{2h}{h} = \lim_{h\to 0^+} 2 = 2$$

◆ **Derivadas laterales en x = 0**

$$f'(0^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0^-} 0 = 0$$

$$f'(0^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{2(0+h)-2\cdot 0}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{2h}{h} = \lim_{h\to 0^+} 2 = 2$$

b) Es derivable en todo la recta real excepto en x = 0 ya que en ese punto las derivadas laterales no son iguales.

◊◊◊▣▣⊙▣▣◊◊◊

⑤ *¿Es cierto que toda función continua es derivable? Razona la respuesta.*

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

No, puede ser continua es decir coincidir los límites laterales y el valor de la función en un punto y tener distinta derivada lateral en ese punto (los llamados ***puntos angulosos***) como sucede con la función anterior en x = 0 o la función valor absoluto en x = 0.

◊◊◊▣▣⊙▣▣◊◊◊

⑥ *Discute en qué puntos no es derivable la función $f(x) = |x^2 - 4|$.*

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

Transformamos la función en valor absoluto en función a trozos :

$x^2 - 4 = 0$; $x = \pm 2$, luego hay tres intervalos

⊙ Intervalo de los menores que -2 , la función es positiva ($(-3)^2 - 4 = 5 > 0$), la dejamos como esta $x^2 - 4$.

⊙ Intervalo [-2,2), la función es negativa ($0^2 - 4 = -4 < 0$), hay que canbiarla de signo $-x^2 + 4$.

⊙ Intervalo de los mayores o iguales a 2, la función es positiva o nula, se deja como está, $x^2 - 4$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < -2 \\ -x^2 + 4 & \text{si } -2 \le x < 2 \\ x^2 - 4 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

En cada intervalo las funciones son polinómicas de segundo grado, luego continuas y derivables, el problema está en los puntos frontera :

En x = -2

$$f'(-2^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{(-2+h)^2-4-((-2)^2-4)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{4-4h+h^2-4-4+4}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h(-4+h)}{h}=\lim_{h\to 0^-}-4+h=-4$$

$$f'(-2^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{-(-2+h)^2+4-(-(-2)^2+4)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{-4+4h-h^2+4+4-4}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h(4-h)}{h}=\lim_{h\to 0^+}4-h=4$$

Las derivadas laterales no coinciden, no es derivable en x = -2.

En x = 2

$$f'(2^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-(2+h)^2+4-(-(2)^2+4)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-4-4h-h^2+4+4-4}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h(-4-h)}{h}=\lim_{h\to 0^-}-4-h=-4$$

$$f'(2^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{(2+h)^2-4-((2)^2-4)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{4+4h+h^2-4-4+4}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h(4+h)}{h}=\lim_{h\to 0^+}4+h=4$$

Las derivadas laterales no coinciden, no es derivable en x = 2.

◈◈◈▣▣⊙▣▣◈◈◈

⑦ *Calcula f '(1) para las funciones*

(a) $f(x)=e^{senx}$ $x=1$
(b) $f(x)=\text{sen}\left(\frac{\pi\sqrt{x}}{3}\right)$
(c) $f(x)=x^x$

◈◈◈▣▣⊙▣▣◈◈◈

a) f '(x) = cosx · e^{senx}, luego f '(1) = cos 1· e^{sen1} .

b) $f'(x)=\frac{\pi}{6\sqrt{x}}\cos\left(\frac{\pi\sqrt{x}}{3}\right)\Rightarrow f'(1)=\frac{\pi}{6}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\pi}{12}$

c) f '(x) = x x^{x-1} + x^x lnx, luego f '(1) = 1·1+1·0=1

◈◈◈▣▣⊙▣▣◈◈◈

⑧ *Halla a y b para que la función* $f(x)=\begin{cases}2x+a & \text{si } x<-1\\ ax+b & \text{si } -1\le x<0\\ 3x^2+2 & \text{si } 0\le x\end{cases}$ *sea continua. Para esos valores de a y b, estudia si la función es derivable.*

◈◈◈▣▣⊙▣▣◈◈◈

Como dentro de cada intervalo las funciones son polinómicas serán continuas, para que sean continuas en los puntos frontera :

✧ **En x = -1**

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} (2x+a) = 2\cdot(-1)+a = a-2$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} (ax+b) = a\cdot(-1)+b = -a+b$$

Como para que sea continua en x = -1 han de ser iguales los límites laterales, se ha de cumplir la ecuación:

a - 2 = - a + b ; 2a - b = 2 ①.

✧ **En x = 0**

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (ax+b) = a\cdot 0+b = b$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (3x^2+2) = 3\cdot 0+2 = 2$$

Como para que sea continua en x = 0 han de ser iguales los límites laterales, se ha de cumplir la ecuación:

b = 2 ②.

Tenemos pues un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que resolvemos :

$$\begin{cases} 2a-b = 2 \\ b = 2 \end{cases}$$; de la 2ª b= 2 y 2a -2 = 2⇔ $2a=4 \Leftrightarrow a=\frac{4}{2}=2$

Para que sea continua ha de a = b = 2.

Estudiemos ahora la derivabilidad. En cada intervalo es derivable por ser polinómica, veamos que sucede con las derivadas laterales en los puntos frontera de los intervalos :

✪ **En x = -1**

$$f'(-1^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{2(-1+h)+2-(2(-1)+2)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-2+2h+2+2-2}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{2h}{h} = \lim_{h\to 0^-} 2 = 2$$

$$f'(-1^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{2(-1+h)+2-(2(-1)+2)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-2+2h+2+2-2}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{2h}{h} = \lim_{h\to 0^+} 2 = 2$$

Como es continua en x = -1 (con esa condición hemos calculado a y b) y las derivadas laterales son iguales (f '(-1^-) = f '(-1^+)), la función es derivable en x = -1.

✪ **En x = 0**

$$f'(0^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{2h+2-2}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{2h}{h} = \lim_{h\to 0^-} 2 = 2$$

$$f'(0^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{3h^2+2-2}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{3h^2}{h} = \lim_{h\to 0^+} 3h = 0$$

Como las derivadas laterales no coinciden, no es derivable en x = 0.

Resumiendo, la función es derivable para todo $x \neq 0$

◊◊◊▣▣⊙▣▣◊◊◊

⑨ *¿ Hay algún punto en la gráfica de $y = e^{2x}$ en el que la recta tangente sea paralela a la recta $2x + 8y - 5 = 0$?*

◊◊◊▣▣⊙▣▣◊◊◊

Para que dos rectas sean paralelas han de tener la misma pendiente:

$y' = 2e^{2x}$

$2x+8y-5=0$, en forma explícita $y = -\frac{1}{4}x+\frac{5}{8}$, luego $m = -\frac{1}{4}$

Igualando tenemos la ecuación : $e^{2x} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow 2x = \ln(-\frac{1}{4})$, como no tiene solución (no existen logaritmos de números negativos), **no existe ningún punto de la gráfica de la función $y = e^{2x}$ cuya recta tangente sea paralela a la recta dada**.

◊◊◊▣▣⊙▣▣◊◊◊

①⓪ *Si P es un punto cualquiera de la gráfica de y = 1/x, prueba que el triángulo formado por la recta OP, la tangente a esa gráfica en el punto P y el eje y = 0, es isósceles. (O es el origen de coordenadas.)*

◊◊◊▣▣⊙▣▣◊◊◊

Un punto P perteneciente esa función será de la forma P (a, 1/a).
Hallemos la recta que es tangente en P:
$y' = -1/x^2$, $m = y'(a) = -1/a^2$

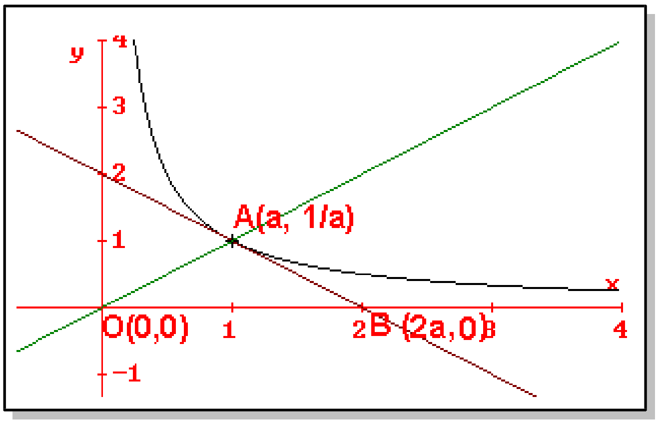
la ecuación de la recta tangente es:

$$y-\frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2}(x-a) \Leftrightarrow a^2y-a = -x+a \Leftrightarrow x+a^2y-2a=0$$

La ecuación de OP es :

$$\frac{y-y_O}{y_P-y_O} = \frac{x-x_O}{x_P-x_O};\ \frac{y-0}{\frac{1}{a}-0} = \frac{x-0}{a-0} \Leftrightarrow x-a^2y=0$$

La ecuación del eje de abscisas es y = 0.



Las tres rectas forman el triángulo OAB, y hay que demostrar que los lados OA y AB tienen la misma longitud para cualquier valor de a:

$$\overline{OA} = d(O,A) = \sqrt{(y_A - y_O)^2 + (x_A - x_O)^2} = \sqrt{\left(\tfrac{1}{a}\right)^2 + a^2} = \sqrt{\frac{1+a^4}{a^2}} = \tfrac{1}{a}\sqrt{1+a^4}$$

$$\overline{AB} = d(A,B) = \sqrt{(y_A - y_B)^2 + (x_A - x_B)^2} = \sqrt{\left(\tfrac{1}{a}\right)^2 + a^2} = \sqrt{\frac{1+a^4}{a^2}} = \tfrac{1}{a}\sqrt{1+a^4}$$

Luego efectivamente es isósceles ya que las longitudes de los lados OA y AB son iguales para cualquier valor de a perteneciente a su dominio.

◊◊◊▣▣⊙▣▣◊◊◊

11 *Dada la parábola de ecuación $y = x^2 - 2x + 5$, se considera la recta r que une los puntos de esa parábola de abscisas $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Halla la ecuación de la recta tangente a la parábola que es paralela a la recta r.*

◊◊◊▣▣⊙▣▣◊◊◊

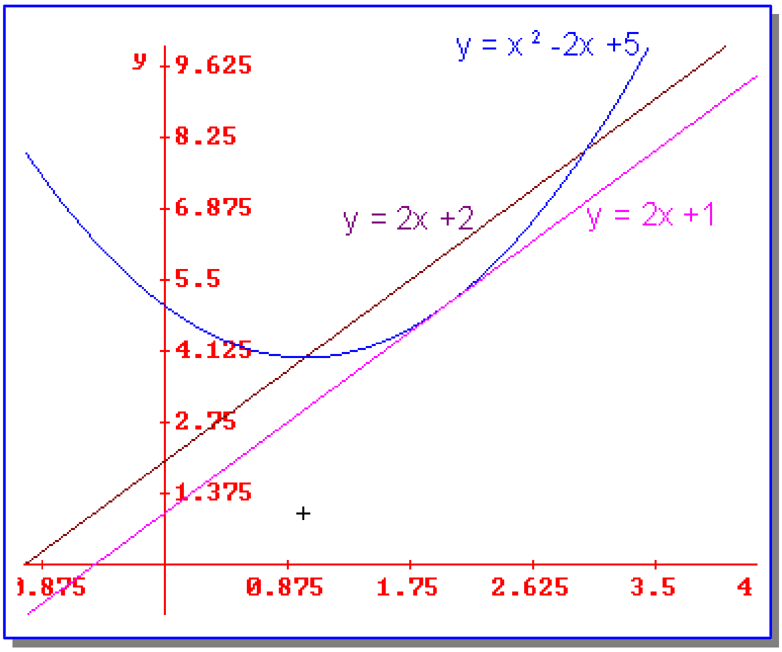
Si $x = 1 \Rightarrow y = 1 - 2 + 5 = 4 \Rightarrow P_1 = (x_1, y_1) = (1,4)$.

Si $x = 3 \Rightarrow y = 9 - 6 + 5 = 8 \Rightarrow P_2 = (x_2, y_2) = (3,8)$.

La ecuación de la secante será y = mx + n:

❒ por pasar por (1, 4) $\Rightarrow 4 = m + n$;

❒ por pasar por (3, 8) $\Rightarrow 8 = 3m + n \Rightarrow$ resolviendo el sistema tenemos m = 2, n = 2.



La secante es y = 2x + 2 .

Si la tangente pedida debe ser paralela a la secante, sus pendientes serán iguales; luego $f'(x_0) = 2$, siendo (x_0, y_0) el punto de tangencia.

Como $f'(x) = 2x - 2 \Rightarrow 2x_0 - 2 = 2 \Rightarrow x_0 = 2$; siendo $y_0 = f(x_0) = f(2) = 2^2 - 2\cdot 2 + 5 = 5$

Con esto, la tangente pedida es : $y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 5 = 2(x - 2) \Rightarrow y = 2x + 1$.

◊◊◊▣▣⊙▣▣◊◊◊

①② *Halla las funciones derivadas f '(x) de*

(a) $f(x) = 20x^{25} - 45x^{12} + 122x^4 + 11x - 89$

$$f'(x) = 20\cdot 25x^{24} - 45\cdot 12x^{11} + 122\cdot 4x^3 + 11 = 500x^{24} - 540x^{11} + 488x^3 + 11$$

(b) $f(x) = 6x^3\left(3\sqrt{x} + \operatorname{sen}x - \frac{x+1}{x+3}\right)$

$$f'(x) = (6x^3)'\left(3\sqrt{x} + \operatorname{sen}x - \frac{x+1}{x+3}\right) + 6x^3\left(3\sqrt{x} + \operatorname{sen}x - \frac{x+1}{x+3}\right)' =$$

$$= 18x^2\left(3\sqrt{x} + \operatorname{sen}x - \frac{x+1}{x+3}\right) + 6x^3\left(\frac{3}{2\sqrt{x}} + \cos x - \frac{x+3-x-1}{(x+3)^2}\right) =$$
$$= 18x^2\left(3\sqrt{x} + \operatorname{sen}x - \frac{x+1}{x+3}\right) + 6x^3\left(\frac{3}{2\sqrt{x}} + \cos x - \frac{2}{(x+3)^2}\right)$$

(c) $f(x) = e^{\ln\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

◊◊◊▣▣⊙▣▣◊◊◊

①③ *¿Son correctas estas derivadas?*

(a) *[cos(sen x)]' = - (cos x) [sen(sen x)]*

(b) *[e^{senx}], = (cosx) e^{senx}*

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

Si llamamos u(x) = senx, cuya derivada es u'(x) = cosx

a) Sí, ya que aplicando la regla de la cadena, la derivada de y = cosu es y' = - u'senu que sustituyendo nos da - cosx [sen(senx)].

b) Sí, ya que aplicando la regla de la cadena, la derivada de y = e^u es y' = u'e^u que sustituyendo nos da (cosx) e^{senx} .

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

①④ *Usando la regla de la cadena, deriva las funciones que se indican:*

(a) *sen(ln x)$^{1/2}$*
(b) *[x^2 - cos(x^4)]3*
(c) $\operatorname{sen}\left(\sqrt{\cos(e^{x^2+1})}\right)$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

a) Si u(x) = lnx ⇒ u'(x) = 1/x , y si $v(u)=\sqrt{u(x)}=u^{\frac{1}{2}} \Rightarrow v'(x)=u'\cdot\frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}-1}=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

luego $y=\operatorname{sen}v \Rightarrow y'=v'\cos v=\frac{u'}{2\sqrt{u}}\cos\sqrt{u}=\frac{1/x}{2\sqrt{\ln x}}\cos\sqrt{\ln x}=\frac{1}{2x\sqrt{x}}\cos\sqrt{\ln x}$

b) $u=x^2 \Rightarrow u'=2x;\ v=x^4 \Rightarrow v'=4x^3; g=\cos v \Rightarrow g'=-v'\operatorname{sen}v=-4x^3\operatorname{sen}x^4$

luego y = $(u+g)^3 \Rightarrow y'=3(u-g)^2(u'-g')=3(x^2-\cos(x^4))^2(2x+4x^3\operatorname{sen}x^4)$

c) Si $u=x^2+1 \Rightarrow u'=2x; v=e^u \Rightarrow v'=u'e^u; g=\cos v \Rightarrow g'=-v'\operatorname{sen}v$; $f=\sqrt{g}$

$\Rightarrow f'=\frac{g'}{2\sqrt{g}}$, luego $y=\operatorname{sen}f \Rightarrow y'=f'\cos f=\frac{g'}{2\sqrt{g}}\cos\sqrt{g}=\frac{-v'\operatorname{sen}v}{2\sqrt{\cos v}}\cos\sqrt{\cos v}=$

$=\frac{-u'e^u\operatorname{sen}e^u}{2\sqrt{\cos e^u}}\cos\left(\sqrt{\cos(e^u)}\right)=\frac{-2xe^{x^2+1}\operatorname{sen}e^{x^2+1}}{2\sqrt{\cos(e^{x^2+1})}}\cos\left(\sqrt{\cos(e^{x^2+1})}\right)$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

①⑤ *Halla la derivada f(300) del polinomio* $f(x) = 20x^{25} - 45x^{12} + 122x^4 + 11x - 89$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

Como el polinomio es de grado 25, la derivada primera será de grado 24 (n-1), la 2ª de grado 23, la 3ª de grado 22 y a partir de la orden 25 será de grado cero (constante) y como la derivada de una constante es nula :

$$f^{(300)} = 0$$

◊◊◊▣▣⊙▣▣◊◊◊

①⑥

(a) *Halla las tres primeras derivadas de ,f(x) =* $\sqrt{x}$

(b) *Escribe una fórmula para la derivada n-ésima de* $f(x) = \sqrt{x}$.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

a) $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$f''(x) = \tfrac{1}{2}(-\tfrac{1}{2})x^{-\frac{1}{2}-1} = -\tfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} = -\tfrac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

$$f'''(x) = -\tfrac{1}{4}(-\tfrac{3}{2})x^{-\frac{3}{2}-1} = \tfrac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}} = \tfrac{3}{8}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^5}}$$

b) $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{1\cdot3\cdot5..(2(n-1)-1)}{2^n}\frac{1}{\sqrt{x^{2n-1}}}$ para n>1

◊◊◊▣▣⊙▣▣◊◊◊

①⑦ *Halla la ecuación de la recta tangente a la elipse* $x^2/4 + y^2 = 1$ *en el punto de abscisa x = 1 que está en el semiplano superior (y ≥ 0). Utiliza derivación implícita.*

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

a =1

f(a) = f(1) = $\sqrt{1-\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (valor >0)

Para hallar la pendiente hacemos la derivada implícita y después se sustituye la x por 1 :

$$\tfrac{1}{4}\cdot 2x + 2yy' = 0 \Leftrightarrow \tfrac{x}{2} + 2yy' = 0 \Leftrightarrow y' = -\frac{x}{4y} \Rightarrow m = y'(1) = -\frac{1}{4\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{6}$$

La recta tangente a la elipse en x = a = 1 es :

y -f(a) = f '(a)(x-a) ; $y - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{6}(x-1) \Leftrightarrow 6y - 3\sqrt{3} = -\sqrt{3}x + \sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3}x + 6y - 4\sqrt{3} = 0$

◊◊◊▣▣⊙▣▣◊◊◊