

**Para empezar**

**Resuelve**

① Azucena tiene 42 cromos de las mismas dimensiones y quiere colocarlos formando un rectángulo de varias filas y varias columnas.

¿Puede hacerlo?

¿Cuántas filas y cuántas columnas debe tener el rectángulo? ¿Podría haber formado otros rectángulos diferentes?

Si tiene 42 cromos, podrá ponerlos en 6 filas x 7 columnas = 42 cromos, o viceversa, de 2 filas x 21 columnas ( y al revés) y de 3 filas x 14 columnas ( y al contrario).



② Para cada uno de los siguientes números de cromos, averigua si se pueden colocar en forma de rectángulo y si tiene más de una solución:

- a)** 28      **b)** 46      **c)** 81      **d)** 43      **e)** 29      **f)** 100

**a)**  $28 = 4 \times 7 = 2 \times 14$  y los que se obtienen conmutando los factores de cada producto.

**b)**  $46 = 2 \text{ filas } \times 23 \text{ columnas}$  y viceversa.

**c)**  $81 = 9 \times 9$

**d)** 43 , sólo se puede colocar en forma de rectángulo de 1 fila o de una columna, ya que el número es primo.

**e)** 29 sucede lo mismo que con el anterior, ya que también es primo.

**f)**  $100 = 2 \text{ filas } \times 50 \text{ columnas} = 4 \text{ filas } \times 25 \text{ columnas} = 20 \text{ filas } \times 5 \text{ columnas}$  y sus factores conmutados.



③ Escribe la tabla de multiplicar del 6, pero en lugar de llegar hasta  $6 \times 10$ , continúa hasta  $6 \times 15$ . Los números que van apareciendo en la tabla son los múltiplos de 6. ¿Se obtiene el mismo resultado contando de 6 en 6?

Escribe, por estos mismos procedimientos, los primeros 15 múltiplos de 8.

**Múltiplos de 6**

⊙  $1 \times 6 = 6 \Rightarrow 2 \times 6 = 12 \Rightarrow 3 \times 6 = 18 \Rightarrow 4 \times 6 = 24 \Rightarrow 5 \times 6 = 30 \Rightarrow 6 \times 6 = 36 \Rightarrow 7 \times 6 = 42 \Rightarrow 8 \times 6 = 48 \Rightarrow 9 \times 6 = 54 \Rightarrow 10 \times 6 = 60 \Rightarrow 11 \times 6 = 66 \Rightarrow 12 \times 6 = 72 \Rightarrow 13 \times 6 = 78 \Rightarrow 14 \times 6 = 84 \Rightarrow 15 \times 6 = 90$

⊙ Sí:  $1 \times 6 = 6 \Rightarrow 2 \times 6 = 12 = 6 + 6 \Rightarrow 3 \times 6 = 18 = 6 + 6 + 6 \Rightarrow 4 \times 6 = 24 = 6 + 6 + 6 + 6 \Rightarrow 5 \times 6 = 30 = 6 + 6 + 6 + 6 + 6 \Rightarrow 6 \times 6 = 36 = 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 \dots$



**Múltiplos de 8**

$1 \times 8 = 8 \Rightarrow 2 \times 8 = 16 \Rightarrow 3 \times 8 = 24 \Rightarrow 4 \times 8 = 32 \Rightarrow 5 \times 8 = 40 \Rightarrow 6 \times 8 = 48 \Rightarrow 7 \times 8 = 56$   
 $8 \times 8 = 64 \Rightarrow 9 \times 8 = 72 \Rightarrow 10 \times 8 = 80 \Rightarrow 11 \times 8 = 88 \Rightarrow 12 \times 8 = 96 \Rightarrow 13 \times 8 = 104 \Rightarrow 14 \times 8 = 112 \Rightarrow 15 \times 8 = 120$

$1 \times 8 = 8 \Rightarrow 2 \times 8 = 16 = 8 + 8 \Rightarrow 3 \times 8 = 24 = 8 + 8 + 8 \Rightarrow 4 \times 8 = 32 = 8 + 8 + 8 + 8 \Rightarrow$   
 $5 \times 8 = 40 = 8 + 8 + 8 + 8 + 8 \Rightarrow 6 \times 8 = 48 = 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 \Rightarrow 7 \times 8 = 56 = 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 \dots$



① Averigua, mentalmente, cuáles de las divisiones siguientes son exactas:

50:2      63: 9      33: 11      45: 5      75:8      45:23      16:6    150:15

$50 : 2 = 25$      $63 : 9 = 7$      $33 : 11 = 3$      $45 : 5 = 9$      $75 : 8 = \text{No}$      $45 : 23 = \text{No}$      $16 : 6 = \text{No}$   
 $150 : 15 = 10.$



**Para practicar**

① Un número está comprendido entre 365 y 420 y es múltiplo de 45. ¿De qué número se trata?

- 45 x 1 = 45
- 45 x 2 = 90
- 45 x 3 = 135
- 45 x 4 = 180
- 45 x 5 = 225
- 45 x 6 = 270
- 45 x 7 = 315
- 45 x 8 = 360
- 45 x 9 = 405
- 45 x 10 = 450

Luego se trata del número 405.



② Halla todos los divisores de cada uno de los siguientes números y señala cuáles tienen exactamente cuatro divisores:

- a) 15**      **b) 18**      **c) 12**      **d) 42**

Si la descomposición de un número n es :  $n = a^p \times b^q \times c^r \times \dots$ , el número de divisores de n es  $(p + 1) (q + 1) (r + 1) \dots$

a)  $15 = 3 \times 5$ , luego el número de divisores es  $2 \times 2 = 4$  y son

$$\left. \begin{array}{l} 1 \left\{ \begin{array}{l} 1 \rightarrow 1 \\ 5 \rightarrow 1 \cdot 5 = 5 \end{array} \right. \\ 3 \left\{ \begin{array}{l} 1 \rightarrow 3 \cdot 1 = 3 \\ 5 \rightarrow 3 \cdot 5 = 15 \end{array} \right. \end{array} \right\} \text{Div}(15) = \{ 1, 3, 5, 15 \}$$

b)  $18 = 2 \times 3^2$ , luego el número de divisores es  $2 \cdot 3 = 6$

$$\left. \begin{array}{l} 1 \left\{ \begin{array}{l} 1 \rightarrow 1 \\ 3 \rightarrow 3 \\ 3^2 \rightarrow 9 \end{array} \right. \\ 2 \left\{ \begin{array}{l} 1 \rightarrow 2 \\ 3 \rightarrow 6 \\ 3^2 \rightarrow 18 \end{array} \right. \end{array} \right\} \text{Div}(18) = \{ 1, 2, 3, 6, 9, 18 \}$$

c)  $12 = 2^2 \times 3$ , luego el nº de divisores es  $3 \cdot 2 = 6$

$$12 \left\{ \begin{array}{l} 1 \left\{ \begin{array}{l} 1 \rightarrow 1 \\ 3 \rightarrow 3 \end{array} \right. \\ 2 \left\{ \begin{array}{l} 1 \rightarrow 2 \\ 3 \rightarrow 6 \end{array} \right. \\ 2^2 \left\{ \begin{array}{l} 1 \rightarrow 4 \\ 3 \rightarrow 12 \end{array} \right. \end{array} \right\} \text{Div}(12) = \{ 1, 2, 3, 4, 6, 12 \}$$

d)  $42 = 2 \times 3 \times 7$ , luego el número de divisores es  $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ :

$$42 \left\{ \begin{array}{l} 1 \left\{ \begin{array}{l} 1 \rightarrow 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \\ 7 \rightarrow 1 \cdot 1 \cdot 7 = 7 \end{array} \right. \\ 3 \left\{ \begin{array}{l} 1 \rightarrow 1 \cdot 3 \cdot 1 = 3 \\ 7 \rightarrow 1 \cdot 3 \cdot 7 = 21 \end{array} \right. \\ 2 \left\{ \begin{array}{l} 1 \rightarrow 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2 \\ 7 \rightarrow 2 \cdot 1 \cdot 7 = 14 \\ 3 \left\{ \begin{array}{l} 1 \rightarrow 2 \cdot 3 \cdot 1 = 6 \\ 7 \rightarrow 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42 \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right\} \text{Div}(42) = \{ 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42 \}$$



④ Halla todos los divisores de cada uno de los siguientes números y señala cuáles tienen exactamente cuatro divisores.

- a) 8      b) 27      c) 125      d) 343

¿Qué propiedad tienen en común los números señalados?

a)  $8 = 2^3$ , número de divisores  $(3 + 1) = 4$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \rightarrow 1 \\ 2 \rightarrow 2 \\ 2^2 \rightarrow 4 \\ 2^3 \rightarrow 8 \end{array} \right. \quad \text{Div}(8) = \{ 1, 2, 4, 8 \}$$

b)  $27 = 3^3$ , número de divisores  $(3 + 1) = 4$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \rightarrow 1 \\ 3 \rightarrow 3 \\ 3^2 \rightarrow 9 \\ 3^3 \rightarrow 27 \end{array} \right. \quad \text{Div}(27) = \{ 1, 3, 9, 27 \}$$

c)  $125 = 5^3$ , número de divisores  $(3 + 1) = 4$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \rightarrow 1 \\ 5 \rightarrow 5 \\ 5^2 \rightarrow 25 \\ 5^3 \rightarrow 125 \end{array} \right. \quad \text{Div}(125) = \{ 1, 5, 25, 125 \}$$

d)  $343 = 7^3$ , número de divisores  $(3 + 1) = 4$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \rightarrow 1 \\ 7 \rightarrow 7 \\ 7^2 \rightarrow 49 \\ 7^3 \rightarrow 343 \end{array} \right. \quad \text{Div}(343) = \{ 1, 7, 49, 343 \}$$

Propiedad común: Que su descomposición en factores primos tiene exponente 3.



⑤ Completa la siguiente tabla:

Un número primo tiene por factores: la unidad y el mismo número:

Número	Divisores	¿Es primo?
23	1, 23	Sí
35	1, 5, 7, 35	No
43	1, 43	Sí
4	1, 2, 4	No



Ⓔ Halla todos los divisores de cada número y señala cuáles son números primos:

- a) 63      b) 23      c) 47      d) 39      e) 29      f) 55      g) 17      h) 74

a)  $63 = 7 \times 3^2$  . Divisores:

$$63 \left\{ \begin{array}{l} 1 \left\{ \begin{array}{l} 1 \rightarrow 1 \\ 3 \rightarrow 3 \\ 3^2 \rightarrow 9 \end{array} \right. \\ 7 \left\{ \begin{array}{l} 1 \rightarrow 7 \\ 3 \rightarrow 21 \\ 3^2 \rightarrow 63 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad \text{Div (63)} = \{ 1, 3, 7, 9, 21, 63 \}, \text{ el 63 es un número compuesto.}$$

b)  $23 = 23$ ,  $\text{Div}(23) = \{ 1, 23 \}$ , el 23 es primo.

c)  $47 = 47$ ,  $\text{Div}(47) = \{ 1, 47 \}$ , el 47 es primo.

d)  $39 = 3 \times 13$ . Divisores :

$$39 \left\{ \begin{array}{l} 1 \left\{ \begin{array}{l} 1 \rightarrow 1 \\ 13 \rightarrow 13 \end{array} \right. \\ 3 \left\{ \begin{array}{l} 1 \rightarrow 3 \\ 13 \rightarrow 39 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad \text{Div}(39) = \{ 1, 3, 13, 39 \}, \text{ el 39 no es primo.}$$

e)  $29 = 29$ ,  $\text{Div} (29) = \{ 1, 29 \}$ , el 29 es primo.

f)  $55 = 5 \times 11$  . Divisores:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \left\{ \begin{array}{l} 1 \rightarrow 1 \\ 11 \rightarrow 11 \end{array} \right. \\ 5 \left\{ \begin{array}{l} 1 \rightarrow 5 \\ 11 \rightarrow 55 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad \text{Div}(55) = \{ 1, 5, 11, 55 \}, \text{ luego el 55 es un número compuesto.}$$

g)  $17 = 17$ .  $\text{Div} (17) = \{ 1, 17 \}$ , el 17 es primo.

h)  $74 = 2 \times 37$ . Divisores :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \left\{ \begin{array}{l} 1 \rightarrow 1 \\ 37 \rightarrow 37 \end{array} \right. \\ 2 \left\{ \begin{array}{l} 1 \rightarrow 2 \\ 37 \rightarrow 74 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad \text{Div} ( 74) = \{ 1, 2, 37, 74 \}, \text{ luego el número 74 es compuesto.}$$



7 Escribe los números primos mayores que 50 y menores que 80.

Hacemos la criba de Eratóstenes:

Primero hallamos los números primos menores o iguales a la raíz cuadrada de 80:

Como  $\sqrt{80} = 8,94$ , los primos son { 2, 3, 5 y 7}

50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80									

Quitamos los pares ( tachando de 2 en 2 ) :

<del>50</del>	51	<del>52</del>	53	<del>54</del>	55	<del>56</del>	57	<del>58</del>	59
<del>60</del>	61	<del>62</del>	63	<del>64</del>	65	<del>66</del>	67	<del>68</del>	69
<del>70</del>	71	<del>72</del>	73	<del>74</del>	75	<del>76</del>	77	<del>78</del>	79
<del>80</del>									

De los que quedan quitamos los múltiplos de 3 ( la suma de sus cifras es múltiplo de 3) tachando de 3 en 3) :

<del>50</del>	<del>51</del>	<del>52</del>	53	<del>54</del>	55	<del>56</del>	<del>57</del>	<del>58</del>	59
<del>60</del>	61	<del>62</del>	<del>63</del>	<del>64</del>	65	<del>66</del>	67	<del>68</del>	<del>69</del>
<del>70</del>	71	<del>72</del>	73	<del>74</del>	<del>75</del>	<del>76</del>	77	<del>78</del>	79
<del>80</del>									

De los restantes suprimimos los múltiplos de 5 que queden ( los que terminan en 5, los que terminan en cero ya se han tachado con los pares):

<del>50</del>	<del>51</del>	<del>52</del>	53	<del>54</del>	<del>55</del>	<del>56</del>	<del>57</del>	<del>58</del>	59
<del>60</del>	61	<del>62</del>	<del>63</del>	<del>64</del>	<del>65</del>	<del>66</del>	67	<del>68</del>	<del>69</del>
<del>70</del>	71	<del>72</del>	73	<del>74</del>	<del>75</del>	<del>76</del>	77	<del>78</del>	79
<del>80</del>									

Por último tachamos los múltiplos de 7 ( que no lo estén ya), empezando por el 56 y contando de 7 en 7:

<del>50</del>	<del>51</del>	<del>52</del>	53	<del>54</del>	<del>55</del>	<del>56</del>	<del>57</del>	<del>58</del>	59
<del>60</del>	61	<del>62</del>	<del>63</del>	<del>64</del>	<del>65</del>	<del>66</del>	67	<del>68</del>	<del>69</del>
<del>70</del>	71	<del>72</del>	73	<del>74</del>	<del>75</del>	<del>76</del>	<del>77</del>	<del>78</del>	79
<del>80</del>									

Los que quedan sin tachar, después de la criba, son los primos comprendidos entre 50 y 80 = { 53, 59, 61, 67, 71, 73 y 79}





ⓑ Separa los números primos de los compuestos:

91 17 53 15 81 27 71 49 57 97

Procedimiento: vamos dividiendo por números primos, comenzando por el 2, si llegamos a obtener un cociente mayor que el divisor sin que sea divisible por alguno, podemos asegurar que el número es primo.

◆ 91

$$\begin{array}{r|l} 91 & 2 \\ 11 & \\ \hline 1 & 45 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 91 & 3 \\ 01 & \\ \hline & 30 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 91 & 5 \\ 41 & \\ \hline 1 & 18 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 91 & 7 \\ 21 & \\ \hline 0 & 13 \end{array}$$

Luego 91 no es primo,  $91 = 7 \cdot 13$

◆  $27 = 3^3$ , no es primo

◆ 17

$$\begin{array}{r|l} 17 & 2 \\ 1 & 8 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 17 & 3 \\ 2 & 5 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 17 & 5 \\ 2 & 3 \end{array} \quad \text{Como } 3 < 5 \text{ podemos asegurar que es primo}$$

◆ 71

$$\begin{array}{r|l} 71 & 2 \\ 11 & 35 \\ \hline 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 71 & 3 \\ 11 & 23 \\ \hline 2 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 71 & 5 \\ 21 & 14 \\ \hline 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 71 & 7 \\ 01 & 10 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 71 & 11 \\ 05 & 6 \end{array} \quad \text{Como } 6 < 11, 71 \text{ es primo.}$$

◆ 53

$$\begin{array}{r|l} 53 & 2 \\ 13 & 26 \\ \hline 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 53 & 3 \\ 23 & 17 \\ \hline 2 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 53 & 5 \\ 03 & 10 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 53 & 7 \\ 4 & 7 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 53 & 8 \\ 5 & 6 \end{array}$$

Como  $6 < 8$ , 53 es primo.

◆  $49 = 7^2$  luego es compuesto.

◆  $15 = 3 \times 5$ , luego es compuesto.

◆ 57

$$\begin{array}{r|l} 57 & 2 \\ 17 & 28 \\ \hline 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 57 & 3 \\ 27 & 19 \\ \hline 0 & \end{array}$$

luego  $57 = 3 \times 19$ , y por tanto no es compuesto.

◇  $81 = 3^4$ , luego es compuesto.

◇ 97

$$\begin{array}{r|l} 97 & 2 \\ 17 & 48 \\ \hline & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 97 & 3 \\ 07 & 32 \\ \hline & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 97 & 5 \\ 47 & 19 \\ \hline & 2 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 97 & 7 \\ 27 & 13 \\ \hline & 6 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 97 & 11 \\ 09 & 8 \\ \hline & 1 \end{array}$$

Como  $8 < 11$ , el 97 es primo.



⑨ Escribe tres números que sean producto de dos números primos. ¿Cuántos divisores tienen ?

$6 = 2 \times 3$ ,  $\text{Div}(6) = \{ 1, 2, 3, 6 \}$

$10 = 2 \times 5$ ,  $\text{Div}(10) = \{ 1, 2, 5, 10 \}$



⑩ Berta cuenta de 5 en 5 y Pablo de 6 en 6. ¿Coinciden en algún número? Si se encuentran en más de uno, ¿de cuáles son múltiplos?

Primero coincidirán en el mínimo común múltiplo :

$\text{m.c.m}(5, 6) = 5 \times 2 \times 3 = 30$ , y después en los múltiplos de este: 60, 90, 120, 150, etc..



⑪ Busca todas las formas posibles de hacer equipos con el mismo número de personas en una clase de 24 alumnos.

Para hacer equipos con el mismo número de personas hemos de hacerlos según los divisores de 24:

$\text{Div}(24) = \{ 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 \}$

Pueden hacerse:

- ⊗ 24 equipos de 1 persona.
- ⊗ 12 equipos de 2 personas.
- ⊗ 8 equipos de 3 personas.
- ⊗ 6 equipos de 4 personas.
- ⊗ 4 equipos de 6 personas.
- ⊗ 3 equipos de 8 personas.
- ⊗ 2 equipos de 12 personas.
- ⊗ 1 equipo de 24 personas.





12 Tenemos 36 canicas y queremos hacer grupos de igual número de canicas sin que nos sobre ninguna. ¿De cuántas maneras podemos hacerlo?

Es semejante al ejercicio anterior:  $\text{Div}(36) = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$

Pueden hacerse:

- 36 grupos de 1 canica.
- 18 grupos de 2 canicas.
- 12 grupos de 3 canicas.
- 9 grupos de 4 canicas.
- 6 grupos de 6 canicas.
- 4 grupos de 9 canicas.
- 3 grupos de 12 canicas.
- 2 grupos de 18 canicas.
- 1 grupos de 36 canicas.



13 Necesitamos colocar 354 botones en cajas de 6 unidades. ¿Es posible agruparlos sin que nos sobre ninguno? justifica tu respuesta.



Sí es posible ya que 6 es divisor de 354, necesitaríamos  $354 : 6 = 59$  cajas de 6 unidades por caja.

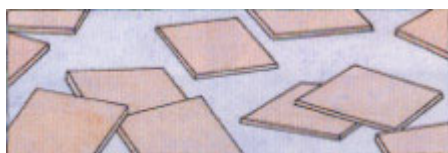


14 ¿De cuántas maneras se pueden colocar 47 bolígrafos en estuches, de modo que cada estuche tenga el mismo número de bolígrafos?

Como el 47 es primo, solo pueden colocarse en 47 cajas de bolígrafo o en 1 caja de 47 bolígrafos.



15 ¿De cuántas formas diferentes se pueden disponer 72 baldosas cuadradas de manera que formen un rectángulo?



Hallamos los divisores de 72:  $\text{Div}(72) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72\}$ , luego se pueden disponer:

En 72 filas de 1 baldosa.

- En 36 filas de 2 baldosas.
- En 24 filas de 3 baldosas.
- En 18 filas de 4 baldosas.
- En 12 filas de 6 baldosas.
- En 9 filas de 8 baldosas.

Las demás posibilidades tienen las mismas dimensiones pero cambiando filas por columnas.



**16** Celia tiene ahorrados 140 euros y quiere tener su dinero en billetes del mismo valor. ¿De cuántas formas puede hacerlo?

Se trata de ver por qué cantidades, de las que existen en los billetes es divisible:

- ⊗ Como  $140 : 5 = 28$ , podrá tenerlo en 28 billetes de 5 €.
- ⊗ Como  $140 : 10 = 14$ , podrá tenerlo en 14 billetes de 10 €.
- ⊗ Como  $140 : 20 = 7$ , podrá tenerlo en 7 billetes de 20 €.
- ⊗ Como  $140 : 50$  no es exacta, no podrá tenerlo en billetes iguales de 50 €.
- ⊗ Con el resto de los tipos de billete, tampoco es divisible.



**17** Indica cuáles de los siguientes años han sido o serán bisiestos:

- a)** 1732      **b)** 1928      **c)** 20 083

**Un año es bisiesto si es divisible por 4, excepto aquellos divisibles por 100 pero no por 400.**

Serán bisiestos los múltiplos de 4, o sea aquellos cuyas dos últimas cifras lo sean.

- a)** Como  $32 = 4 \times 8$ , el año 1 732 es múltiplo de 4 y por tanto fue bisiesto.
- b)** Como  $28 = 4 \times 7$ , el año 1928 es múltiplo de 4 y por tanto fue bisiesto.
- c)** Como 83 no es múltiplo de 4, el año 20 083 no es bisiesto.



**18** Busca entre estos números los que son múltiplos de 3 (sin hacer la división):

111, 246, 2 205, 5 481, 1234

En los múltiplos de 3, la suma de sus cifras es múltiplo de 3:

$1 + 1 + 1 = 3$ , luego 111 es múltiplo de 3.

$2 + 4 + 6 = 12$  que es múltiplo de 3 ( $12 = 3 \times 4$ ), luego 246 es múltiplo de 3.

$2 + 2 + 0 + 5 = 9$ , luego 2205 es múltiplo de 3.

$5 + 4 + 8 + 1 = 18$ , luego 5481 es múltiplo de 3.

$1 + 2 + 3 + 4 = 10$ , luego 1234 no es múltiplo de 3.



19 ¿Cómo sabes de un vistazo si un número es múltiplo de 100? ¿Y de 1000?

Un número es múltiplo de 100 si termina en dos o más ceros.

Un número es múltiplo de 1000 si termina en tres o más ceros.



20 Busca entre estos números los que son múltiplos de 11 (sin hacer la división):

1111, 2464, 2200, 5401, 12321

1111  $\left\{ \begin{array}{l} \text{lugar par : } 1+1=2 \\ \text{lugar impar : } 1+1=2 \end{array} \right.$  diferencia de sumas :  $2 - 2 = 0$ , luego el 1111, sí es múltiplo de 11.

2464  $\left\{ \begin{array}{l} \text{suma lugar par} = P : 6+2=8 \\ \text{suma lugar impar} = I : 4+4=8 \end{array} \right.$   $P - I = 8 - 8 = 0$ , el 2464 sí es múltiplo de 11.

2200  $\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P = 0+2=2 \\ I = 0+2=2 \end{array} \right. \Rightarrow P - I = 2 - 2 = 0$ , el 2200 es divisible por 11.

5401  $\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P = 0+5=5 \\ I = 1+4=5 \end{array} \right. \Rightarrow P - I = 5 - 5 = 0$ , el 5401 es divisible por 11.

12321  $\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P = 2+2=4 \\ I = 1+3+1=5 \end{array} \right. \Rightarrow I - P = 5 - 4 = 1$ , el 12321 no es divisible por 11.



22 Sustituye el signo  $\square$  por una cifra de modo que los números sean divisibles por 3:

a)  $3\square54$     b)  $49\square3$     c)  $98\square75$     d)  $49\square11$

Para que un número sea divisible por 3, la suma de sus cifras ha de ser múltiplo de 3.

a)  $3 + 5 + 4 = 12$ , luego la cifra buscada puede ser 0, 3, 6 ó 9, dando los números 3054, 3354, 3654 y 3954, todos divisibles por 3.

**b)**  $4 + 9 + 3 = 16$ , para llegar a los siguientes múltiplos de 3 podemos añadir las cifras **2**, **5** y **8**, dando los números **4 923**, **4 953** y **4 983**, divisibles por 3.

**c)**  $9 + 8 + 7 + 5 = 29$ , para llegar a los múltiplos de 3 mayores que 29 podemos añadir las cifras **1**,  $1 + 3 = 4$  y  $4 + 3 = 7$ , dando los números **9 8175**, **9 8475** y **9 8775**, divisibles por 3.

**d)**  $4 + 9 + 1 + 1 = 15$ , que es múltiplo de 3, luego se pueden añadir las cifras **0**, **3**, **6** y **9**, dando los **4 9011**, **4 9311**, **4 9611** y **4 9911**, divisibles por 3.



**23** Completa la siguiente tabla poniendo V y F para indicar qué números son divisibles por 2, 3, 5, 10 y 11:

Número	2	3	5	10	11
231	F	V	F	F	F
352	V	F	F	F	V
435	F	V	V	F	V
3 630	V	V	V	V	V



**24** Escribe los números 30, 45, 60, 100 y 200 como producto de dos números menores que ellos.

$30 = 5 \times 6$ ,  $45 = 5 \times 9$ ,  $100 = 5 \times 20$ ,  $200 = 10 \times 20$ .



**25** Descompón en factores primos:

- a)** 32      **b)** 180      **c)** 225      **d)** 392      **e)** 468      **f)** 1260

**a)**  $32 \begin{array}{l} 2 \\ 16 \\ 8 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{array}$  luego  $32 = 2^5$

**b)**  $180 \begin{array}{l} 2 \\ 90 \\ 45 \\ 15 \\ 5 \\ 1 \end{array}$  luego  $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$

**c)**  $225 \begin{array}{l} 3 \\ 75 \\ 25 \\ 5 \\ 1 \end{array}$  luego  $225 = 3^2 \cdot 5^2$

**d)**  $392 \begin{array}{l} 2 \\ 196 \\ 98 \\ 49 \\ 7 \\ 1 \end{array}$  luego  $392 = 2^3 \cdot 7^2$ .

e)	468	2	luego	$468 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 13$	f)	1 260	2	luego	$1\ 260 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$
	234	2				630	2		
	117	3				315	3		
	39	3				105	3		
	13	13				35	5		
	1					7	7		
						1			



27) Escribe los cinco primeros múltiplos de 25. Con ellos a la vista, reconoce los múltiplos de 25 sin efectuar la división.

Primer múltiplo = 25      Segundo múltiplo = 50      Tercer múltiplo = 75  
 Cuarto múltiplo = 100      Quinto múltiplo = 125.

Un número es múltiplo de 25 si las dos últimas cifras son ceros o múltiplos de 25.



28) Se sabe que uno de estos números: 325, 781, 351, 271, 954 es primo. Averigua cuál es sin hacer divisiones.

Usamos los criterios de divisibilidad.

325 es múltiplo de 5 pues termina en 5.  
 781 es múltiplo de 11 pues  $7 + 1 - 8 = 0$ .  
 351 es múltiplo de 3 ya que la suma de sus cifras  $3 + 5 + 1 = 9$ , es múltiplo de 3.  
 954 es múltiplo de 2 por terminar en cifra par.  
 Por eliminación, el que queda, el primo es 271.



29) Escribe tres múltiplos de 3 y de 5. Averigua si el producto es múltiplo de 15. ¿Cuál es la condición para que sea divisible por 15?

Múltiplos de 3 = { 3, 6 y 9}  
 Múltiplos de 5 = { 5, 10 y 15}  
 Producto =  $3 \cdot 5 = 15$ ,  $6 \cdot 10 = 60$ ,  $9 \cdot 15 = 135$ , que son múltiplos de 15 ya que  $15 : 15 = 1$ ,  $60 : 15 = 4$ , y  $135 : 15 = 9$ .

Un número es divisible por 15 si lo es por 3 ( suma de la cifras 0 o múltiplo de 3) y por 5 ( termina en 0 o 5).

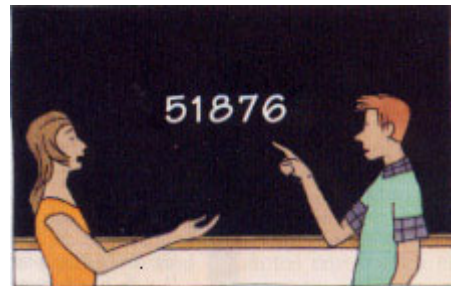


30 El área de un rectángulo es un múltiplo de 3 y 4. ¿Cuáles pueden ser si las dimensiones vienen dadas en centímetros?

Largo = múltiplo de 4 = { 4, 8, 12, 16, 20, ... } cm  
 Ancho = múltiplos de 3 = { 3, 6, 9, 12, 15, ... } cm



31 María dice a Javier que el número 51876 es divisible por 99. Decide si es cierto o falso sin hacer la división. Javier le contesta que no solamente es divisible por 99, sino también por 33. ¿Por qué?



Porque 99 es múltiplo de 33,  $99 = 33 \times 3$



32 Calcula algún divisor común de los siguiente números:

- a) 50 y 100      b) 25 y 100      c) 88 y 22      d) 25 y 35

a)  $\text{Div}(50) = \{1, 2, 5, 10, 25, 50\}$ ,  $\text{Div}(100) = \{1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100\}$ , luego los divisores comunes son  $\text{Div}(50 \text{ y } 100) = \{1, 2, 5, 10, 25, 50\}$ .

b)  $\text{Div}(25) = \{1, 5, 25\}$ ,  $\text{Div}(100) = \{1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100\}$ , luego los divisores comunes son  $\text{Div}(25 \text{ y } 100) = \{1, 5, 25\}$ .

c)  $\text{Div}(88) = \{1, 2, 4, 8, 11, 22, 44, 88\}$ ,  $\text{Div}(22) = \{1, 2, 11, 22\}$ , luego los divisores comunes son  $\text{Div}(22 \text{ y } 88) = \{1, 2, 11, 22\}$ .

d)  $\text{Div}(25) = \{1, 5, 25\}$ ,  $\text{Div}(35) = \{1, 5, 7, 35\}$ , luego los divisores comunes son  $\text{Div}(25 \text{ y } 35) = \{1, 5\}$ .



33 Sin hacer cálculos, ¿cuál es el mayor número que divide a 50 y 60?

El 10



34 Calcula el máximo común divisor de:

- a) 4 y 6      b) 4 y 8      c) 20 y 30      d) 12 y 24

a)  $\left. \begin{matrix} 4 = 2^2 \\ 6 = 2 \times 3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \text{m.c.d}(4,6) = 2.$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} 4 = 2^2 \\ 8 = 2^3 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{m.c.d}(4, 8) = 2^3 = 8.$$

$$\text{c) } \left. \begin{array}{l} 20 = 2^2 \times 5 \\ 30 = 2 \times 3 \times 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{m.c.d}(20, 30) = 2 \times 5 = 10$$

$$\text{d) } \left. \begin{array}{l} 12 = 2^2 \times 3 \\ 24 = 2^3 \times 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{m.c.d}(12, 24) = 2^2 \times 3 = 4 \times 3 = 12$$



36 Halla, sin hacer operaciones, el máximo común divisor de 35 y 60. Razona tu respuesta.

El único divisor común (distinto de la unidad) es el 5, ya que  $35 = 5 \times 7$  y 60 no es múltiplo de 7, luego el 5 es m.cd.



37 Calcula el máximo común divisor de las siguientes parejas de números:

- a) 12 y 18                      b) 72 y 84                      c) 90 y 120                      d) 24 y 50

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} 12 = 2^2 \times 3 \\ 18 = 2 \times 3^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{m.c.d}(12, 18) = 2^2 \times 3^2 = 4 \times 9 = 36.$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} 72 = 2^3 \times 3^2 \\ 84 = 2^2 \times 3 \times 7 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{m.c.d}(72, 84) = 2^2 \times 3^2 = 4 \times 9 = 36.$$

$$\text{c) } \left. \begin{array}{l} 90 = 2 \times 3^2 \times 5 \\ 120 = 2^3 \times 3 \times 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{m.c.d}(90, 120) = 2 \times 3 \times 5 = 30$$



38 Halla, sin hacer operaciones, el máximo común divisor de 40, 90 y 150. Razona tu respuesta.

Como los 3 terminan en cero son múltiplos de 10, quedan 4, 9 y 15 que no tienen múltiplos comunes, luego el  $\text{m.c.d}(40, 90, 150) = 10$ .



40 Halla el máximo común divisor de cada grupo de números:

- a) 75, 36 y 18                      b) 42, 14 y 56                      c) 63, 27 y 36

$$\left. \begin{array}{l} 75 = 3 \times 5^2 \\ \text{a) } 36 = 2^2 \times 3^2 \\ 18 = 2 \times 3^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{m.c.d.}(18,36,75) = 3.$$

$$\left. \begin{array}{l} 42 = 2 \times 3 \times 7 \\ \text{b) } 14 = 2 \times 7 \\ 56 = 2^3 \times 7 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{m.c.d.}(14,42,56) = 2 \times 7 = 14.$$

$$\left. \begin{array}{l} 63 = 3^2 \times 7 \\ \text{c) } 27 = 3^3 \\ 36 = 2^2 \times 3^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{m.c.d.}(27,36,63) = 3^2 = 9$$



41) Halla el máximo común divisor de los siguientes números:

a) 48 y 52

b) 12, 18 y 20

c) 33, 154 y 110

d) 45, 144 y 2



$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } 48 = 2^4 \times 3 \\ 52 = 2^2 \times 13 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{m.c.d.}(48,52) = 2^2 = 4.$$

$$\left. \begin{array}{l} 12 = 2^2 \times 3 \\ \text{b) } 18 = 2 \times 3^2 \\ 20 = 2^2 \times 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{m.c.d.}(12,18,20) = 2 = 2.$$

$$\left. \begin{array}{l} 33 = 3 \times 11 \\ \text{c) } 154 = 2 \times 7 \times 11 \\ 110 = 2 \times 5 \times 11 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{m.c.d.}(33,154,110) = 11.$$

$$\left. \begin{array}{l} 45 = 3^2 \times 5 \\ \text{d) } 144 = 2^4 \times 3^2 \\ 2 = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{m.c.d.}(45,144,2) = 1 \text{ que es el único factor común.}$$



43) Una pajarería envía 18 loros y 24 periquito en jaulas iguales, sin mezclarlos, de modo que en todas quepa el mismo número de animales. ¿Cuántos animales deben ir en cada jaula si su número es el mayor posible?





Hemos de hallar el m.c.d.(18, 24):

$$\left. \begin{array}{l} 18 = 2 \times 3^2 \\ 24 = 2^3 \times 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{m.c.d.}(2,3) = 2 \times 3 = 6 \text{ animales en cada jaula.}$$



44 Javier y Elena tienen dos listones de madera de 24 dm y 30 dm de longitud, para construir marcos cuadrados. ¿Qué longitud debe tener el lado para que no se desperdicie ningún trozo de los listones?



De nuevo se trata del m.c.d.(24, 30):

$$\left. \begin{array}{l} 30 = 2 \times 3 \times 5 \\ 24 = 2^3 \times 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{m.c.d.}(24,30) = 2 \times 3 = 6 \text{ dm de longitud del lado.}$$



45 Un distribuidor de informática dispone en el almacén de 2 025 unidades de una clase de microprocesadores y 3 465 de otra clase. Quiere distribuirlos por separado en cajas que contengan el mismo número de unidades y, además, que este número sea el mayor posible. ¿Cuántos microprocesadores debe contener cada caja?



$$\left. \begin{array}{l} 2025 = 3^4 \times 5^2 \\ 3465 = 3^2 \times 5 \times 7 \times 11 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{m.c.d.}(2025,3465) = 3^2 \times 5 = 45, \text{ microprocesadores en cada caja.}$$



46 En una peluquería se utilizan tres tipos de champú. Disponen de 1 500 cm<sup>3</sup> para cabello graso, 1750 cm<sup>3</sup> para cabello seco y 2 500 cm<sup>3</sup> para cabello normal. Se quieren envasar en frascos de la mayor capacidad posible y todos de igual capacidad. ¿Cuántos cm<sup>3</sup> medirá el frasco?



$$\left. \begin{array}{l} 1500 = 2^2 \times 3 \times 5^3 \\ 1750 = 2 \times 5^3 \times 7 \\ 2500 = 2^2 \times 5^4 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{m.c.d.}(1500,1750,2500) = 2 \times 5^3 = 2 \times 125 = 250 \text{ cm}^3$$



47 Halla mentalmente algún múltiplo común de los siguientes pares de números:

a) 3 y 4

b) 6 y 8

c) 12 y 18

d) 5 y 7



- a) Múltiplos de 3 y 4 = { 12, 24, 36, 48, ...}.
- b) Múltiplos de 6 y 8 = { 48, 96, 144, 240, ... }.
- c) Múltiplos de 12 y 18 = { 36, 72, 108, ... }.
- d) Múltiplos de 5 y 7 = {35, 70, 140, 280, ...}.



48 Si un número es múltiplo de 4 y de 5, ¿lo es de 20? Si un número es múltiplo de 4 y de 6, ¿es siempre múltiplo de 24? Justifica las respuestas.



Sí es múltiplo de 20 ya que  $4 \times 5 = 20$ .

Si un número es múltiplo de 4 y 6, lo será de  $24 = 4 \times 6$ .



49 Halla el mínimo común múltiplo de:

- a) 4 y 6
- b) 4 y 8
- c) 20 y 30
- d) 12 y 18



- a)  $\left. \begin{matrix} 4 = 2^2 \\ 6 = 2 \times 3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \text{m.cm.}(4,6) = 2^2 \times 3 = 4 \times 3 = 12 .$
- b)  $\left. \begin{matrix} 4 = 2^2 \\ 8 = 2^3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \text{m.cm.}(4,8) = 2^3 = 8 .$
- c)  $\left. \begin{matrix} 20 = 2^2 \times 5 \\ 30 = 2 \times 3 \times 5 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \text{m.cm.}(20,30) = 2^2 \times 3 \times 5 = 4 \times 3 \times 5 = 60 .$
- d)  $\left. \begin{matrix} 12 = 2^2 \times 3 \\ 18 = 2 \times 3^2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \text{m.cm.}(12,18) = 2^2 \times 3^2 = 4 \times 9 = 36$



50 Calcula el mínimo común múltiplo de:

- a) 63 y 48
- b) 48 y 60
- c) 45 y 75
- d) 36 y 45



a)  $\left. \begin{array}{l} 63 = 3^2 \times 7 \\ 48 = 2^4 \times 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{m.cm.}(63,48) = 2^4 \times 3^2 \times 7 = 16 \times 9 \times 7 = 1008 .$

b)  $\left. \begin{array}{l} 48 = 2^4 \times 3 \\ 60 = 2^2 \times 3 \times 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{m.cm.}(48,60) = 2^4 \times 3 \times 5 = 16 \times 3 \times 5 = 240 .$

c)  $\left. \begin{array}{l} 45 = 3^2 \times 5 \\ 75 = 3 \times 5^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{m.cm.}(45,75) = 3^2 \times 5^2 = 9 \times 25 = 225 .$

d)  $\left. \begin{array}{l} 36 = 2^2 \times 3^2 \\ 45 = 3^2 \times 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{m.cm.}(36,45) = 2^2 \times 3^2 \times 5 = 4 \times 9 \times 5 = 180 .$



52) Calcula el mínimo común múltiplo de:

a) 72 y 108

b) 270 y 234

c) 560 y 588

d) 315 y 420

a)  $\left. \begin{array}{l} 72 = 2^3 \times 3^2 \\ 108 = 2^2 \times 3^3 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{m.cm.}(72,108) = 2^3 \times 3^3 = 8 \times 27 = 216 .$

b)  $\left. \begin{array}{l} 270 = 2 \times 3^3 \times 5 \\ 234 = 2 \times 3^2 \times 13 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{m.cm.}(270,234) = 2 \times 3^3 \times 5 \times 13 = 2 \times 27 \times 5 \times 13 = 3510 .$

c)  $\left. \begin{array}{l} 560 = 2^4 \times 5 \times 7 \\ 588 = 2^2 \times 3 \times 7^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{m.cm.}(560,588) = 2^4 \times 3 \times 5 \times 7^2 = 16 \times 3 \times 5 \times 49 = 11760 .$

d)  $\left. \begin{array}{l} 315 = 3^2 \times 5 \times 7 \\ 420 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{m.cm.}(315,420) = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 4 \times 9 \times 5 \times 7 = 1260 .$



58) Calcula el mínimo común múltiplo de:

a) 63, 46 y 98

b) 105, 135 y 175

a)  $\left. \begin{array}{l} 63 = 3^2 \times 7 \\ 46 = 2 \times 23 \\ 98 = 2 \times 7^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{m.c.m.}(63,46,98) = 2 \times 3^2 \times 7^2 \times 23 = 2 \times 9 \times 49 \times 23 = 20286 .$

$$\left. \begin{array}{l} 105 = 3 \times 5 \times 7 \\ \text{b) } 135 = 3^3 \times 5 \\ 175 = 5^2 \times 7 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{m.c.m.}(105,135,175) = 3^3 \times 5^2 \times 7 = 27 \times 25 \times 7 = 4725$$



55) Los autobuses de la línea 26 pasan por una parada cada 9 minutos, y los de la línea 33, cada 12 minutos. Si acaban de salir ambos a la vez de esta parada, ¿cuánto tardarán en coincidir otros dos de ambas líneas?



Coincidirán en los múltiplos comunes de los intervalos de tiempo en que pasan, y como pide la coincidencia siguiente a la salida, se trata del m.c.m. (9, 12):

$$\left. \begin{array}{l} 9 = 3^2 \\ 12 = 2^2 \times 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{m.c.m.}(9,12) = 2^2 \times 3^2 = 4 \times 9 = 36, \text{ transcurridos 36 minutos volverán a coincidir de nuevo ambas líneas.}$$



56) Tres barcos realizan sus recorridos entre las islas Canarias en 6, 9 y 12 días, respectivamente. El día de la Candelaria coincidieron en el puerto de la Luz. ¿Cuándo volverán a coincidir en ese puerto?



De nuevo se trata del m.c.m.(6, 9, 12) :

$$\left. \begin{array}{l} 6 = 2 \times 3 \\ 9 = 3^2 \\ 12 = 2^2 \times 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{m.c.m.}(6,9,12) = 2^2 \times 3^2 = 4 \times 9 = 36, \text{ vuelven a coincidir en el puerto al cabo de 36 días.}$$



57) Los alumnos de una clase pueden formar grupos de 2, 3, 5 y 6 personas. ¿Cuántos alumnos serán como mínimo?



Hemos de calcular el m.c.m. (2, 3, 5, 6) ya que el número de alumnos será el múltiplo más pequeño de las personas cuyo grupos se forman:

$$\left. \begin{array}{l} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 6 = 2 \times 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{m.c.m.}(2,3,5,6) = 2 \times 3 \times 5 = 30 \text{ alumnos tiene la clase.}$$



59 ¿Cuál es el menor número de tres cifras que dividido por 10, 12 o 15 da siempre de resto 7?



Calculamos primero el m.c.m. de los tres números dados :

$$\left. \begin{array}{l} 10 = 2 \times 5 \\ 12 = 2^2 \times 3 \\ 15 = 3 \times 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{m.c.m.}(10,12,15) = 2^2 \times 3 \times 5 = 4 \times 3 \times 5 = 60$$

como ha de tener tres cifras, hallamos los múltiplos de 60:  $60 \times 2 = 120$  y ahora sumamos 7 para que de de resto 7,  $120 + 7 = 127$ .



60 Escribe todos los números menores que 100 que den resto 2 al dividirlos por 5.



Hallamos los múltiplos de 5 menores que 100 y les sumamos 2:

$$\{7, 12, 17, 22, 27, 32, 37, 42, 47, 52, 57, 62, 67, 72, 77, 82, 87, 92, 97\}$$



61 El número de alumnos de un curso de secundaria es un número muy curioso. Si se divide por 9 el resto es 1. Si se divide por 11, el resto es 1. Además es el número más pequeño que cumple estas condiciones. ¿Cuántos alumnos hay?



Es el  $\text{m.c.m.}(9,11) + 1 = 100$



62 A una fiesta asisten entre 80 y 100 amigos. Se pueden agrupar exactamente de 4 en 4, pero si se agrupan de 5 en 5, sobra uno. ¿Cuánto son?



Hallamos  $\text{m.c.m.}(4,5) = 20$ , el múltiplo de 20 comprendido entre 80 y 100 es el 81.



63 Si un grupo de estudiantes se colocan en filas de 5, sobra uno; si lo hacen en filas de 7, sobran dos. ¿Cuántos estudiantes hay si son menos de 60?



(Múltiplos de 5) + 1 = {6, 11, 16, 21, 26, 31, 36, 41, 46, 51, 56}

(Múltiplos de 7) + 2 = {9, 16, 23, 30, 37, 44, 51, 58}

Pueden ser 16 ó 51 estudiantes.



64) Calcula mentalmente dos números cuyo producto sea:

- a) 36      b) 42      c) 360      d) 420



- a)  $9 \cdot 4 = 36$ .      b)  $6 \cdot 7 = 42$ .      c)  $90 \cdot 4 = 360$ .      d)  $60 \cdot 7 = 420$



65) Descompón en producto de dos factores cualesquiera:

- a) 144      b) 288      c) 240      d) 75



- a)  $24 \cdot 6 = 144$       b)  $24 \cdot 12 = 288$ .      c)  $24 \cdot 10 = 240$ .      d)  $5 \cdot 15 = 75$ .



66) ¿Todos los múltiplos de 8 son múltiplos de 2? ¿Y todos los múltiplos de 2 son múltiplos de 8?



Sí, todos lo múltiplos de 8 son múltiplos de 2 ya que 8 es múltiplo de 2.

No, por ejemplo 12 es múltiplo de de 2 pero no de 8.



67) Busca todos los divisores de:

- a) 24      b) 50      c) 81

a) Descomponemos en producto de factores primos,  $24 = 2^3 \cdot 3$ , luego el número de divisores es  $(3 + 1) \cdot (1 + 1) = 4 \cdot 2 = 8$  y por último los calculamos usando un diagrama en árbol:

$$\text{Div}(24) = \left\{ \begin{array}{l} 2^0 = 1 \left\{ \begin{array}{l} 3^0 = 1 \Rightarrow 1 \cdot 1 = 1 \\ 3^1 = 3 \Rightarrow 1 \cdot 3 = 3 \end{array} \right. \\ 2^1 = 2 \left\{ \begin{array}{l} 3^0 = 1 \Rightarrow 2 \cdot 1 = 2 \\ 3^1 = 3 \Rightarrow 2 \cdot 3 = 6 \end{array} \right. \\ 2^2 = 4 \left\{ \begin{array}{l} 3^0 = 1 \Rightarrow 4 \cdot 1 = 4 \\ 3^1 = 3 \Rightarrow 4 \cdot 3 = 12 \end{array} \right. \\ 2^3 = 8 \left\{ \begin{array}{l} 3^0 = 1 \Rightarrow 8 \cdot 1 = 8 \\ 3^1 = 3 \Rightarrow 8 \cdot 3 = 24 \end{array} \right. \end{array} \right. = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$$

**b)** Descomponemos en producto de factores primos,  $50 = 2 \cdot 5^2$ , luego el número de divisores es  $(1 + 1) \cdot (2 + 1) = 2 \cdot 3 = 6$  y por último los calculamos usando un diagrama en árbol:

$$\text{Div}(50) = \left\{ \begin{array}{l} 2^0 = 1 \\ 2^1 = 2 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 5^0 = 1 \Rightarrow 1 \cdot 1 = 1 \\ 5^1 = 5 \Rightarrow 1 \cdot 5 = 5 \\ 5^2 = 25 \Rightarrow 1 \cdot 25 = 25 \\ 5^0 = 1 \Rightarrow 2 \cdot 1 = 2 \\ 5^1 = 5 \Rightarrow 2 \cdot 5 = 10 \\ 5^2 = 25 \Rightarrow 2 \cdot 25 = 50 \end{array} \right\} = \{1, 2, 5, 10, 25, 50\}$$

**c)** Descomponemos en producto de factores primos,  $81 = 3^4$ , luego el número de divisores es  $(4 + 1) = 5$  y por último los calculamos usando un diagrama en árbol:

$$\text{Div}(81) = \left\{ \begin{array}{l} 3^0 = 1 \\ 3^1 = 3 \\ 3^2 = 9 \\ 3^3 = 27 \\ 3^4 = 81 \end{array} \right\} = \{1, 3, 9, 27, 81\}$$



**68** Las 36 aves volaban en grupos de 5. ¿Detectas algún error en esta frase?



Sí que 36 no es múltiplo de 5, por tanto no se pueden colocar 36 aves en grupos de 5.



**69** El número 1634 no es divisible por 11. Intercambia sus cifras de modo que sí lo sea.



3 641 sí es divisible por 11 ya que  $(3 + 4) - (6 + 1) = 0$ .



**70** Calcula el m.c.d. y m.c.m. de:

- a)** 4, 13 y 26      **b)** 12, 15, y 60      **c)** 15, 55 y 70      **d)** 4, 6 y 21



**a)** Descomponemos en producto de factores primos:

$$\begin{cases} 4 = 2^2 \\ 13 = 13 \\ 26 = 2 \cdot 13 \end{cases}$$

M.C.D (4, 13, 26) = 1, factores primos comunes elevados al menor exponente  
 m.c.m.(4, 13, 26) =  $2^2 \cdot 13 = 52$ , factores comunes y no comunes elevados al exponente mayor.

**b)** Descomponemos en producto de factores primos:

$$\begin{cases} 12 = 2^2 \cdot 3 \\ 15 = 3 \cdot 5 \\ 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \end{cases}$$

M.C.D (12, 15, 60) = 3, factores primos comunes elevados al menor exponente  
 m.c.m.(12, 15, 60) =  $2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$ , factores comunes y no comunes elevados al exponente mayor.

**c)** Descomponemos en producto de factores primos:

$$\begin{cases} 55 = 5 \cdot 11 \\ 15 = 3 \cdot 5 \\ 70 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \end{cases}$$

M.C.D (15, 55, 70) = 5, factores primos comunes elevados al menor exponente  
 m.c.m.(15, 55, 70) =  $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310$ , factores comunes y no comunes elevados al exponente mayor.

**d)** Descomponemos en producto de factores primos:

$$\begin{cases} 4 = 2^2 \\ 6 = 2 \cdot 3 \\ 21 = 3 \cdot 7 \end{cases}$$

M.C.D (4, 6, 21) = 1, factores primos comunes elevados al menor exponente  
 m.c.m.(4, 6, 21) =  $2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$ , factores comunes y no comunes elevados al exponente mayor.



**71** Halla los múltiplos de 4 y de 5, pero no de 3, menores que 200.

Si han de ser múltiplos de 4 y de 5, lo han de ser de 20 y para que no sean múltiplos de 3 al obtener los múltiplos de 20 no multiplicamos por múltiplos de 3:

$$\{ 20, 40, 80, 100, 140, 160 \}$$



**72** ¿Cuál es el menor múltiplo de 15, 20 y 30?

$$\begin{cases} 15 = 3 \cdot 5 \\ 20 = 2^2 \cdot 5 \\ 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \end{cases} \text{ m.c.m. (15, 20 y 30) } = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 4 \cdot 3 \cdot 5 = 60.$$



**73** ¿Qué diferencia hay entre dos múltiplos consecutivos de 3? ¿Y de 5? ¿Y de 11?

Los múltiplos de 3 van de 3 en 3, luego la diferencia entre dos consecutivos es 3 (  $12 - 9 = 3$  ).



⦿ Los múltiplos de 5 van de 5 en 5, luego la diferencia entre dos consecutivos es 5 (  $15 - 10 = 5$ ).

⦿ Los múltiplos de 11 van de 11 en 11, luego la diferencia entre dos consecutivos es 11 (  $22 - 11 = 11$ ).



**74** Un número es divisible por 15 si lo es por 3 y 5. ¿Son divisibles por 15 los siguientes números: 375, 840, 645, 1 080, 720, 960?

$$375 \begin{cases} 3 + 7 + 5 = 15 \text{ que sí es } \dot{3} \Rightarrow 375 = \dot{3} \text{ , es divisible por 15.} \\ \text{Como termina en 5 es múltiplo de 5} \end{cases}$$

$$840 \begin{cases} 8 + 4 = 12 \text{ que sí es } \dot{3} \Rightarrow 840 = \dot{3} \text{ , es divisible por 15.} \\ \text{Como termina en 0, es múltiplo de 5} \end{cases}$$

$$645 \begin{cases} 6 + 4 + 5 = 15 \text{ que sí es } \dot{3} \Rightarrow 645 = \dot{3} \text{ , es divisible por 15.} \\ \text{Como termina en 5 es múltiplo de 5} \end{cases}$$

$$1\ 080 \begin{cases} 1 + 8 = 9 = \dot{3} \Rightarrow 1080 = \dot{3} \text{ , es divisible por 15.} \\ \text{Como termina en 0, es múltiplo de 5} \end{cases}$$

$$720 \begin{cases} 7 + 2 = 9 = \dot{3} \Rightarrow 720 = \dot{3} \text{ , es divisible por 15.} \\ \text{Como termina en 0, es múltiplo de 5} \end{cases}$$

$$960 \begin{cases} 9 + 6 = 15 = \dot{3} \Rightarrow 960 = \dot{3} \text{ , es divisible por 15.} \\ \text{Como termina en 0, es múltiplo de 5} \end{cases}$$



**75** Para un trabajo que se encargó a un carpintero, se necesitaban tablas de 20, 24, 30, 60 y 150 cm de largo. Con ese fin adquirió tablas que se podían cortar en trozos iguales de cualquiera de esas medidas. ¿Qué longitud mínima tenían esas tablas?

Tiene que ser un tablas cuyo largo sea un múltiplo común y además el más pequeño, luego se trata del m.cm.(20, 24, 30, 60).

Descomponemos los números en productos de factores primos:

$$20 = 2^2 \cdot 5 \quad 24 = 2^3 \cdot 3 \quad 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \quad 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \quad 150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$$

$$\text{Luego m.cm.}(20, 24, 30, 60 \text{ y } 150) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 = 8 \cdot 3 \cdot 25 = 600 \text{ cm} = 6 \text{ m.}$$



76 Tres amigos se entrenan en una pista circular de atletismo. El primero tarda 60 segundos en dar una vuelta, el segundo, 84 segundos, y el tercero, 65 segundos. Si salen de la meta a la vez, ¿al cabo de cuánto tiempo vuelven a coincidir en la meta?

Se trata de nuevo del m.c.m. ya que debe ser un múltiplo común y además se pide la primera coincidencia:



$$\begin{cases} 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \\ 84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \\ 65 = 5 \cdot 13 \end{cases} \text{ m.c.m.}(60, 84, 65) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 = 5\,460 \text{ seg}$$

$$= 91 \text{ min.} = 1 \text{ h } 31 \text{ min.}$$



77 Mi primo César viene a verme cada 15 días, y mi prima Ainoa cada 20. Si hemos estado juntos el 4 de septiembre, ¿cuándo volveremos a juntarnos?

$$\text{m.c.m.}(15 \text{ y } 20) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60 \text{ días}$$

Nos volveremos a juntar el día 4 de Noviembre.



78 Un coleccionista quiere repartir 225 sellos en sobres, de modo que en cada uno haya el mismo número de sellos. ¿De cuántas formas es posible hacerlo si no puede haber más de 20 sellos por sobre?

Hallamos los divisores de 225.

Descomposición en producto de factores primos:  $225 = 3^2 \cdot 5^2$ , habrá  $3 \cdot 3 = 9$  divisores:

$$\begin{cases} 3^0 = 1 \begin{cases} 5^0 = 1 \Rightarrow 1 \cdot 1 = 1 \\ 5^1 = 5 \Rightarrow 1 \cdot 5 = 5 \\ 5^2 = 25 \Rightarrow 1 \cdot 25 = 25 \end{cases} \\ 3^1 = 3 \begin{cases} 5^0 = 1 \Rightarrow 3 \cdot 1 = 3 \\ 5^1 = 5 \Rightarrow 3 \cdot 5 = 15 \\ 5^2 = 25 \Rightarrow 3 \cdot 25 = 75 \end{cases} \\ 3^2 = 9 \begin{cases} 5^0 = 1 \Rightarrow 9 \cdot 1 = 9 \\ 5^1 = 5 \Rightarrow 9 \cdot 5 = 45 \\ 5^2 = 25 \Rightarrow 9 \cdot 25 = 225 \end{cases} \end{cases} \text{ DIV}(225) = \{1, 3, 5, 9, 15, 25, 45, 75, 225\}$$

Reparto:

- ◆ 1 sello en 225 sobres.
- ◆ 3 sellos en 75 sobres.
- ◆ 5 sellos en 45 sobres.
- ◆ 9 sellos en 25 sobres.
- ◆ 15 sellos en 15 sobres.



## DE REFUERZO

### Divisibilidad: Múltiplos y divisores

79 Obtén unos cuantos múltiplos comunes a 7 y a 5. ¿Cuál puede ser el criterio de divisibilidad por 35?

Múltiplos comunes a 5 y 7 = {35, 70, 105, 140, ...}

Un número es divisible por 35 si lo es por 5 y por 7.



80 ¿Cuál es el número comprendido entre 101 y 150 que es múltiplo de 5 y cuya suma de las cifras es 7?

Para que sea múltiplo de 5 ha de terminar en 0 o 5, luego son:

105, 110, 115, 120, 125, 130, 135, 140, 145, 150, de estos la suma es 7 en el **115**



81 Halla todos los múltiplos de 4 y de 5, pero no de 3, menores que 300.

Si han de ser múltiplos de 4 y de 5, lo han de ser de 20 y para que no sean múltiplos de 3 al obtener los múltiplos de 20 no multiplicamos por los múltiplos de 3:

{ 20, 40, 80, 100, 140, 160, 200, 220, 260, 280}



82 La descomposición en factores primos de un número es  $2^2 \times 3 \times 5$ . ¿Cuál será la descomposición en factores primos de un número 10 veces mayor que el anterior?

Para obtener un número 10 veces mayor, hay que multiplicar por 10, y como  $10 = 2 \times 5$ , descompuesto en producto de factores, el número pedido tendrá la descomposición:

$$2 \times 5 ( 2^2 \times 3 \times 5 ) = 2^3 \times 3 \times 5^2$$



83 Señala cuáles de los siguientes pares de números son primos entre sí:

- a) 15 y 16    b) 17 y 18    c) 17 y 37    d) 10 y 35

Para que dos números sean primos entre sí no tienen que tener factores comunes (distintos del 1)

a)  $\begin{cases} 15 = 3 \cdot 5 \\ 16 = 2^4 \end{cases}$  sí son primos entre sí pues no tienen factores comunes.

b)  $\begin{cases} 17 = \text{primo} \\ 18 = 2 \cdot 3^2 \end{cases}$  sí son primos entre sí pues no tienen factores comunes.

c)  $\begin{cases} 17 = \text{primo} \\ 37 = \text{primo} \end{cases}$  sí son primos entre sí pues no tienen factores comunes.

d)  $\begin{cases} 10 = 2 \cdot 5 \\ 35 = 5 \cdot 7 \end{cases}$  no son primos entre sí pues tienen el 5 en común.



84 ¿En qué cifras terminan los números primos? ¿Todos los números que terminan en estas cifras son primos? Pon algunos ejemplos.

En 1, 2, 3, 5, 7, pero no todos los números que terminan en estas cifras son primos, por ejemplo el 777 es múltiplo de 7 y de 3.



85 Calcula cuánto ha de valer el signo ◆ para que:

- a) ◆5 sea divisible por 3 y por 15.
- b) 3◆8 sea divisible por 2 y por 3.
- c) ◆30 sea divisible por 2, 3 y 5.
- d) 5◆6 sea divisible por 6.

a) Como  $15 = 3 \times 5$ ,  $\diamond = \{1, 4 \text{ y } 7\}$

b) Divisible por 2 ya lo es, pues termina en cifra par, para que también lo sea por 3, la suma de sus cifras ha de ser múltiplo de 3, como  $3 + 8 = 11$ , tendrá que ser cifras que sumadas con 11 sean múltiplos de 3:

$\diamond = \{1, 4, 7\}$

c) ◆30, ya es divisible por 2 y 5 ya que termina en 0, para que sea múltiplo de 3:

$$\diamond = \{ 3, 6, 9 \}$$

d)  $5 \diamond 6$ , para que sea divisible por 6 ha de serlo por 2 por 3. Por 2 ya lo es pues termina en cifra par (6), para que sea múltiplo de 3, como la suma  $5 + 6 = 11$ ,  $\diamond = \{ 1, 4, 7 \}$



86 Encuentra el menor y el mayor número de dos cifras que sea a la vez divisible por:

- a) 2 y 3      b) 3 y 5      c) 2 y 5      d) 11

a)  $2 \times 3 = 6$ , luego han de ser múltiplos de 6 de dos cifras  $\left\{ \begin{array}{l} \text{menor} = 12 \\ \text{Mayor} = 96 \end{array} \right.$

b)  $3 \times 5 = 15$ , luego han de ser múltiplos de 15 de dos cifras  $\left\{ \begin{array}{l} \text{menor} = 15 \\ \text{Mayor} = 90 \end{array} \right.$

c)  $2 \times 5 = 10$ , luego han de ser múltiplos de 10 de dos cifras  $\left\{ \begin{array}{l} \text{menor} = 10 \\ \text{Mayor} = 90 \end{array} \right.$

d) múltiplos de 11 de dos cifras  $\left\{ \begin{array}{l} \text{menor} = 11 \\ \text{Mayor} = 99 \end{array} \right.$



87 Los sellos de una colección se pueden disponer exactamente en filas de 4 y en columnas de 5. También en hojas de 23. ¿Cuántos sellos hay si están entre 500 y 1000?



Ha de ser un múltiplo común de 4, 5 y 23 comprendido entre 500 y 1 000. Como  $4 \times 5 \times 23 = 460$ , ha de ser  $460 \times 2 = 920$  sellos.



**Divisores. Máximo común divisor**

88 Jorge dispone de dos ovillos de bramante de distintos colores que miden 144 m y 120 m de longitud, respectivamente. ¿Cuál es el menor número de trozos de igual longitud que pueden hacerse con los dos ovillos?

Primero hallamos el M.C.D.(144, 120):

$$\left\{ \begin{array}{l} 144 = 2^4 \times 3^2 \\ 120 = 2^3 \times 3 \times 5 \end{array} \right. , \text{ luego M.C.D}(144, 120) = 2^3 \times 3 = 8 \times 3 = 24 \text{ cm ha de medir cada trozo, luego}$$

con el ovillo de 144 m pueden hacerse  $144 : 24 = 6$  trozos de 24 m y con el de 120 m pueden hacerse  $120 : 24 = 5$  trozos de 24 m, luego el total de trozos que pueden hacerse es  $6 + 5 = 11$  trozos de 24 m.



89 Berta tiene menos de 40 caramelos y los quiere guardar en bolsas de 2, de 3 y de 5 caramelos sin que le sobre ninguno. ¿Cuántos caramelos tiene? Si los guarda en bolsas de 2, ¿cuántas necesita? ¿Y si lo hace en bolsas de 3? ¿Y en bolsas de 5?

Caramelos = m.c.m.(2, 3, 5) =  $2 \times 3 \times 5 = 30$  caramelos.

Necesita  $30 : 2 = 15$  bolsas de 2 caramelos.

Necesita  $30 : 3 = 10$  bolsas de caramelos.

Necesita  $30 : 5 = 6$  bolsas de 5 caramelos.



**Múltiplos. Mínimo común múltiplo**

90 La madre de Mónica ha tenido dos mellizos. Al cabo de 2 meses, la pediatra recomienda a los padres dar el biberón al más pequeño cada tres horas y al más fuerte cada cuatro horas. ¿Cada cuánto tiempo tendrán que dar el biberón a los dos juntos?

El m.c.m.(3, 4) =  $2^2 \times 3 = 12$  horas, es decir dos veces al día.



91 Dos camioneros salen de una fábrica a diferentes capitales europeas. El primero tarda en regresar 8 días y el segundo 10 días. ¿Cuántos días tardarán los camioneros en coincidir nuevamente en la fábrica?

m.c.m.(8 y 10) =  $2^3 \times 5 = 40$  días, ya que se trata del múltiplo común más pequeño. Tardan 40 días en coincidir de nuevo.



92 Aitor es un alumno aplicado y decide al comenzar el curso repasar cada dos días las matemáticas, cada 3 días la física y cada cinco días la historia. ¿Cada cuántos días tiene que repasar las dos primeras asignaturas? ¿Cada cuántos las tres?

Las dos primeras asignaturas las repasa en el m.c.m.(2 y 3) =  $2 \times 3 = 6$  días

Las tres cada m.c.m.(2, 3 y 5) =  $2 \times 3 \times 5 = 30$  días.



98) Una de las dos campanas de una iglesia toca cada 30 minutos, y la otra, cada 45 minutos. Si tocan juntas a las 8 de la mañana, ¿cuándo sonarán juntas la próxima vez?

$$30 = 2 \times 3 \times 5$$

$$45 = 3^2 \times 5$$

$$\text{m.c.m. (30 y 45)} = 2 \times 3^2 \times 5 = 90 \text{ min.}$$

Como 90 min = 1 hr y 30 min, volverá a sonar a las 9 hr 30 min.



99) En una pista de 360 m se señalan en la orilla puntos con colores distintos: con rojo, de 5 en 5 m; con verde, de 10 en 10 m; con azul, de 15 en 15 m. Di en qué puntos de la pista coincidirán los siguientes colores:

a) Rojo y verde.    b) Rojo y azul.    c) Verde y azul.    d) Los tres colores.

a) Coincidirán el rojo y verde en el m.c.m.(5, 10) =  $2 \times 5 = 10$ , es decir cada 10 m.

b) Coincidirán el rojo y azul en el m.c.m.(5, 15) =  $3 \times 5 = 15$ , es decir cada 15 m.

c) Coincidirán el verde y azul en el m.c.m.(15, 10) =  $2 \times 3 \times 5$ , es decir cada 30 m.

d) Coincidirán los tres colores en el m.c.m.(5, 10 y 15) =  $2 \times 3 \times 5 = 30$ , es decir cada 30 m.



### De ampliación

95) Comprueba que el número 744 es divisible por 2 y por 3. ¿Lo es también por 6? ¿Cuándo un número es múltiplo de 6?

$$744 : 2 = 372 \text{ y } 744 : 3 = 248, \text{ luego es divisible por 2 y por 3 y por tanto también por 6.}$$

Un número es múltiplo de 6 si es múltiplo de 2 y de 3.



96) La factorización de un número es:

$$2^3 \times 3^2 \times 7$$

(a) ¿Cuál es este número?

(b) Si el número fuese 5 veces mayor, ¿cuál sería su descomposición en factores primos? Razona tu respuesta.

(a)  $2^3 \times 3^2 \times 7 = 8 \times 9 \times 7 = 504$

(b)  $2^3 \times 3^2 \times 7 \times 5$ , ya que al multiplicar por 5, que es primo sólo se añade ese factor.



97 Al repartir los caramelos de su cumpleaños Nuria se da cuenta de que el número de caramelos puede contarse exactamente de 2 en 2, de 3 en 3 y de 5 en 5. ¿Cuáles son los posibles números de caramelos?

Será un múltiplo común de 2, 3 y 5. Hallamos el más pequeño:

$$\text{m.c.m.}(2, 3, 5) = 2 \times 3 \times 5 = 30$$

y sus múltiplos:

$1 \times 30 = 30$  caramelos,  $2 \times 30 = 60$  caramelos,  $3 \times 30 = 90$  caramelos, etc



98 La profesora de matemáticas quiere hacer grupos iguales con sus alumnos. Si los agrupa de 2 en 2 o de 3 en 3 sobra un alumno, pero si os agrupa de 5 en 5 no sobra ninguno. ¿Cuántos alumnos tiene en clase?

Sea  $n$  = número de alumnos de clase.

$n$  ha de ser múltiplo de  $2 + 1$ , múltiplo de  $3 + 1$  y múltiplo de 5, para hallarlo hacemos una tabla y vemos la primera coincidencia:

Múltiplos de 2 + 1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25
Múltiplos de 3 + 1	4	7	10	13	16	19	22	25				
Múltiplos de 5	5	10	15	20	25							

Luego tendrá 25 alumnos o múltiplos de 25: 25, 50, 75, ...



99 En un club de atletismo se han inscrito 10 chicos y 24 chicas. ¿Cuántos equipos se pueden hacer sabiendo que debe haber:

- En todos, el mismo número de atletas. En todos debe haber chicos.
- El máximo número de equipos que sea posible.

Hallamos el M.C.D.(10, 24) = 2

Si se quiere que en todos haya al menos un chico podrán hacerse como máximo 10 equipos de 2 componentes (chico y chica).

Con 4 integrantes (1 chico y 3 chicas) se podrían hacer 8 equipos.

Con 4 integrantes ( 2 chicos y 2 chicas) se podrían hacer 5 equipos.

El máximo número de equipos posibles es  $(10 + 24) : 2 = 17$  equipos de 2 componentes.





**100** El autobús de la línea A pasa por cierta parada cada 9 minutos, y el de la línea B, cada 6 minutos. Si acaban de salir ambos a las 22 horas, ¿cuando volverán a coincidir?

Volverán a coincidir por vez primera en un tiempo igual al m.c.m.(6, 9) =  $2 \times 3^2 = 2 \times 9 = 18$  min, y en sucesivas veces en múltiplos de ese valor.

Vuelven a coincidir a las 22h 18 min, a las 22 h 36 min, etc



**101** Un granjero, tras recoger en una cesta su cosecha de huevos, piensa:

- Si los envaso por docenas, me sobran 5.
- Si tuviera uno más, podría envasarlos exactamente en cajas de 10.

Casi ha recogido 100. ¿Cuántos huevos tiene?

Si llamamos n al número de huevos que tiene el granjero, será (un múltiplo de 12) + 5 y (múltiplo de 10) – 1. Hacemos una tabla:

Múltiplos de 12 + 5	17	29	41	53	65	77	89			
Múltiplos de 10 - 1	9	19	29	39	49	59	69	79	89	99

Puede tener 29 o 89 huevos, como casi ha cogido 100, deducimos que son 89 los huevos que ha recogido.



**102** Comprueba que se cumple la relación: m.c.d. (24, 72) x m.c.m. (24, 72) = 24 x 72

Calcula si se cumple también para otra pareja de números cualesquiera.

$\begin{cases} 24 = 2^3 \times 3 \\ 72 = 2^3 \times 3^2 \end{cases}$  M.C.D.(24, 72) =  $2^3 \times 3 = 24$ , m.c.m.( 24, 74) =  $2^3 \times 3^2 = 8 \times 9 = 72$ , luego, evidentemente, se cumple m.c.d. (24, 72) x m.c.m. (24, 72) = 24 x 72.



**autoevaluación**

¿Verdadero o falso?

- a) 45 es divisible por 9.
- b) 25 es divisor de 100.

- c) 100 es múltiplo 30.
- d) 90 es divisible por 45.
  
- a)  $45 : 9 = 5$ , luego es divisible por 9.
- b)  $100 : 25 = 4$ , luego 25 es divisor de 100.
- c) 100 no es múltiplo de 30.
- d)  $90 : 45 = 2$ , luego 90 es divisible por 45.



2 Escribe 280 como producto de factores primos.

$$\begin{array}{r|l}
 280 & 2 \\
 140 & 2 \\
 70 & 2 \\
 35 & 5 \\
 7 & 7 \\
 1 & 
 \end{array}
 \qquad
 280 = 2^3 \times 5 \times 7$$



3 Escribe todos los números de dos cifras que sean divisibles a la vez por 4 y por 5.

Si han de ser divisibles por 4 y 5 han de ser múltiplos de  $4 \times 5 = 20$ ,  
Múltiplos de 20 = { 20, 40, 60, 80}.



4 ¿Cuál es el resto de dividir 7 549 entre 2?

$$\begin{array}{r|l}
 7549 & 2 \\
 15 & \\
 14 & 3774 \\
 09 & \\
 1 & 
 \end{array}
 \qquad
 \text{resto} = 1$$



5 Se sabe que un número está comprendido entre 20 y 30 y solo tiene tres divisores. Cuál es?

$21 = 3 \times 7$  (4 divisores),  $22 = 2 \times 11$  (4 divisores), 23 es primo (2 divisores),  $24 = 2^3 \cdot 3$  (8 divisores),  $25 = 5^2$  (3 divisores),  $26 = 2 \times 13$  (4 divisores),  $27 = 3^3$  (4 divisores),  $28 = 4 \times 7$  (4 divisores), 29 es primo.

El número buscado es el 25 cuyos divisores son: 1, 5 y 25.



◈ Escribe el primer múltiplo común de 50 y 70

El m.c.m.(50 y 70).

$$\begin{cases} 50 = 2 \times 5^2 \\ 70 = 2 \times 5 \times 7 \end{cases} \text{ m.c.m.}(50, 70) = 2 \times 5^2 \times 7 = 2 \times 25 \times 7 = 350$$



◈ ¿Cuánto ha de valer el signo □ para que el número 2□5 sea múltiplo de 3? ¿Y para que lo sea de 11 ?

○ Como  $2 + 5 = 7$ , para el siguiente múltiplo de 3(9) faltan 2, para el siguiente 5 y para el siguiente 8, los números pueden ser 225, 255, ó 285

○ Para que sea múltiplo de 11, debe ser un 7 para que  $7 - 7 = 0$ , es decir 275.



◈ ¿Por qué cifra hay que sustituir el signo □ para que el número 37□ sea divisible por 3, si es impar? ¿ Y si es par?

Las cifras conocidas suman  $3 + 7 = 10$ , el siguiente número múltiplo de 3 es 2 para el cual faltan 2, pero puede ser también 5 u 8.

Para que sea impar 375. y para que sea par 372 ó 378.



◈ Indica de cuántas formas se puede dividir una clase de 24 alumnos para hacer equipos de forma que todos tengan el mismo número de componentes.

$$24 = 2^3 \cdot 3,$$

$$\text{Div}(24) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$$

Luego puede haber :

- 1 equipo de 24 componentes.
- 2 equipos de 12 componentes.
- 3 equipos de 8 componentes.
- 4 equipos de 6 componentes.
- 6 equipos de 4 componentes.
- 8 equipos de 3 componentes.
- 12 equipos de 2 componentes.
- 24 equipos de 1 sólo componente.



◆◆ Las paradas intermedias del tren son todas de 4 minutos. ¿Es posible que en un viaje esté parado 56 minutos en total? ¿Y hora y media?

Como  $56 = 4 \times 14$ , 56 es múltiplo de 56 y por tanto al cabo de 14 paradas habrá estado parado 56 minutos.

Como 1 hora y media = 90 minutos no es múltiplo de 4, no puede estar parado ese tiempo.

