AUTOEVALUACIÓN

1 Explica qué significan los símbolos $x \to 0$ y $x \to +\infty$.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

$x \to 0$ (x tiende a 0) significa que tomamos valores x ($\neq 0$) cuya distancia a 0, dada por |x|, se hace arbitrariamente próxima a 0. Es decir los valores de x, a la derecha o a la izquierda de 0, que se acercan arbitrariamente a 0.

$x \to \infty$ indica que tomamos valores positivos de x arbitrariamente grandes, es decir, puntos de la recta real que se alejan hacia la derecha sin tope.

◈◈◈▣▣⊗▣▣◈◈◈

2 ¿Cuáles de estas afirmaciones son correctas?

(a) Todo polinomio tiene límite cuando $x \to 0$.
(b) Una función racional no puede tener límite 2 cuando $x \to +\infty$.
(c) Si $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$, entonces f(x) es continua en x = 0.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

(a) $\lim_{x \to 0}(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0) = a_0$, luego es correcta, todo polinomio tiene límite cuando x tiende a cero.

(b) Nada impide que sea cualquier valor, incluso 2, por ejemplo :

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x+5}{x-3} = 2$$

(c) falta la segunda condición que debe cumplir toda función continua en un punto, que f(0) exista y sea f(0) = 1, luego no es correcta.

◈◈◈▣▣⊗▣▣◈◈◈

3 ¿Cuáles de estas funciones tienen límite cuando $x \to 0$.?

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

Todas :

(a) $\lim_{x \to 0}(2x-1) = 2 \cdot 0 - 1 = -1$ **(b)** $\lim_{x \to 0}(3x^4 - x + 2) = 2$

(c) $\lim_{x \to 0} \frac{2}{1-x} = 2$ **(d)** $\lim_{x \to 0} \frac{3x}{x+5} = \frac{0}{5} = 0$

◈◈◈▣▣⊗▣▣◈◈◈

4 Halla los límites de las funciones del ejercicio anterior cuando $x \to 2$.

✧✧✧⌗⌗⌖⌗⌗✧✧✧

$$\lim_{x\to 2}(2x-1)=2\cdot 2-1=4-1=3;\quad \lim_{x\to 2}(3x^4-x+2)=3\cdot 2^4-2+2=3\cdot 16=48;\ \lim_{x\to 2}\frac{2}{1-x}=\frac{2}{1-2}=-2$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x}{x+5}=\frac{3\cdot 2}{2+5}=\frac{6}{7}$$

◈◈◈▣▣⊗▣▣◈◈◈

5 Determina un valor de la constante k para el cual la función definida por $f(x) = k + \cos x$ si $x \le 0$, $f(x) = 3 - x$ si $x > 0$, continua en $x = 0$.

✧✧✧⌗⌗⌖⌗⌗✧✧✧

Para que sea continua en x = 0 ha de cumplirse que los límites laterales sean iguales e igual f(0) = k :

$$f(x)=\begin{cases} k+\cos x & \text{si } x\le 0 \\ 3\text{ - }x & \text{si } x<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(k+\cos x)=k+\cos 0=k \\ \lim_{x\to 0^+}(3-x)=3-0=3 \end{cases} \Rightarrow k=3$$

◈◈◈▣▣⊗▣▣◈◈◈

6 Calcula los límites cuando $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$. de los siguientes polinomios:

✧✧✧⌗⌗⌖⌗⌗✧✧✧

Como los términos dominantes son los de mayor grado :

$$\lim_{x\to+\infty}(3x^4-x+2)=3(+\infty)^4=+\infty;\ \lim_{x\to-\infty}(3x^4-x+2)=3(-\infty)^4=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}(-3x^4+45x^3+2x)=\lim_{x\to+\infty}(-3x^4)=-3(+\infty)^4=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}(-3x^4+45x^3+2x)=\lim_{x\to-\infty}(-3x^4)=-3(-\infty)^4=-\infty$$

◈◈◈▣▣⊗▣▣◈◈◈

7 Halla los límites cuando $x \to +\infty$. de las funciones racionales

✧✧✧⌗⌗⌖⌗⌗✧✧✧

(a) Tiene el denominador mayor grado, tiende a cero.

(b) Tiene mayor grado el numerador, tiende a infinito.

(c) Numerador y denominador tienen igual grado, tiende al cociente de los coeficientes de los términos de mayor grado = 12/5 = 3.

◈◈◈▣▣⊗▣▣◈◈◈

8 ¿Puede tener la gráfica de una función dos puntos de intersección con el eje x? ¿Y con el eje y?

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

Si, puede tener infinitos puntos de corte con el eje horizontal (como las funciones periódicas) y por tanto puede tener dos.

Con el eje vertical sólo puede tener un punto de corte, en caso contrario no sería una función al no estar definida con un único valor de y para cada valor de x.

◈◈◈▣▣⊗▣▣◈◈◈

9 Halla los intervalos en que es positiva la función $f(x) = x^3 - 9x$.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

Hallemos sus raíces o ceros : $x^3 - 9x = 0$, $x(x^2 - 9) = 0$, $x = 0$, $x^2 - 9 = 0$, $x = \pm 3$.

Construimos los intervalos y estudiamos el signo de cada factor y de la función :

Intervalos	(- ∞, -3)	(-3, 0)	(0, 3)	(3, +∞)
x	< 0	< 0	> 0	> 0
x – 3	< 0	< 0	< 0	> 0
x + 3	< 0	> 0	> 0	>0
$x^3 - 9x = x(x-3)(x+3)$	(-)(-)(-)= < 0	(-)(-)(+)= >0	(+)(-)(+)= < 0	(+)(+)(+) = > 0

◈◈◈▣▣⊗▣▣◈◈◈

1 0 ¿Hay alguna función impar f(x) tal que $f(0) = \pi$?

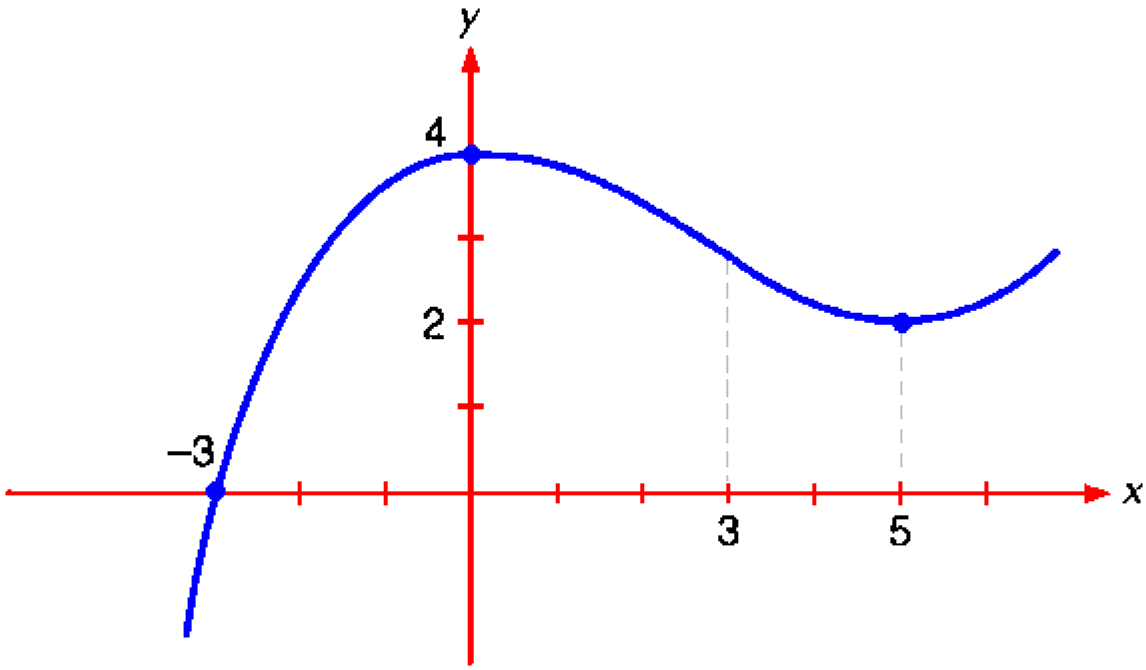
✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

Para que sea impar ha de cumplirse que $f(0) = - f(0)$ y el único número que puede cumplirlo es el cero pero no el número pi, luego no hay ninguna función impar que $f(0) = \pi$.

◈◈◈▣▣⊗▣▣◈◈◈

1 1 Una función, f(x), continua en toda la recta real, creciente en $x < 0$ y en $x > 5$, decreciente en $0 < x < 5$, cóncava hacia arriba en $x > 3$, cóncava hacia abajo en $x < 3$, corta al eje x en $x = - 3$ y al eje y en $y = 4$. Sabiendo además que $f(5) = 2$, dibuja aproximadamente la gráfica de la función.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧



1 2 Describe los extremos locales y los puntos de inflexión de la función de la cuestión anterior.

Tiene un máximo en x = 0 (0, 4), un mínimo relativo en x = 5 (5, 2) y un punto de inflexión en x = 3 (3, 3).

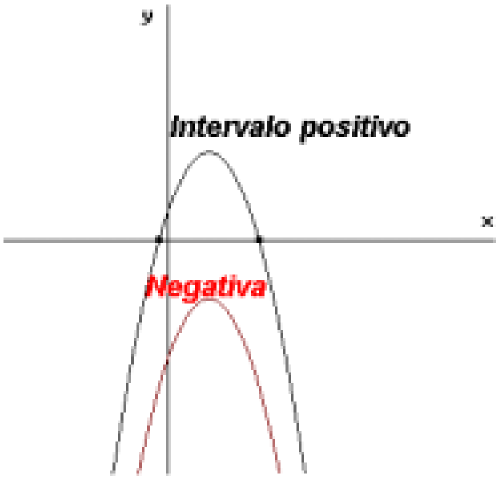
1 3 Una función, continua en toda la recta real, tiene exactamente cinco extremos locales. ¿Pueden ser mínimos locales cuatro de ellos?

Al ser continua entre dos extremos (máximos o mínimos relativos) ha de haber otro extremo contrario (mínimo o máximo), luego al haber 5 extremos lo máximo posible es tres mínimos y dos máximos intermedios entre cada dos mínimos, luego no puede haber cuatro mínimos locales.

1 4 ¿Cuáles de estas afirmaciones son siempre ciertas?

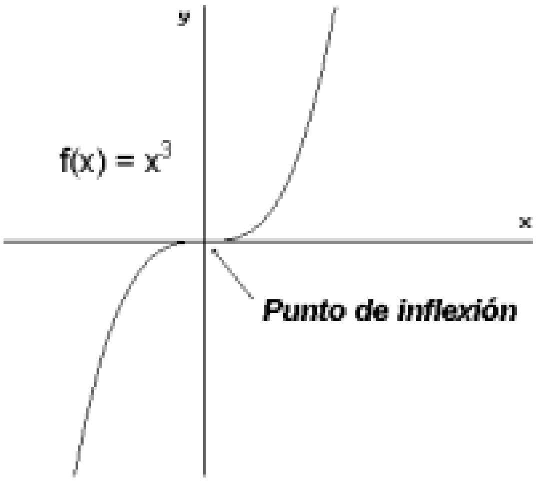
(a) En un máximo local, la función cambia de signo.
(b) En un mínimo local la función pasa de ser decreciente a ser creciente.
(c) En un punto de inflexión la función pasa de ser creciente a ser decreciente.

(a) En un máximo local la función cambia la monotonía de creciente a decreciente o viceversa pero no el signo, puede ser positiva o negativa en un intervalo alrededor del extremo y tener un máximo, como puede apreciarse en la gráfica siguiente, en que un máximo está en un intervalo de la grafica siempre positivo (por encima del eje OX) y la otra tiene un máximo y es siempre negativa (no cambia de signo) :



(b) Cierta, como hemos dicho en el apartado anterior: en un mínimo local la función pasa de ser creciente a ser decreciente.

(c) Falso, en un punto de inflexión la función cambia de curvatura pero no de monotonía. Por ejemplo la función $f(x) = x^3$, en x = 0 cambia de curvatura pero es siempre creciente:



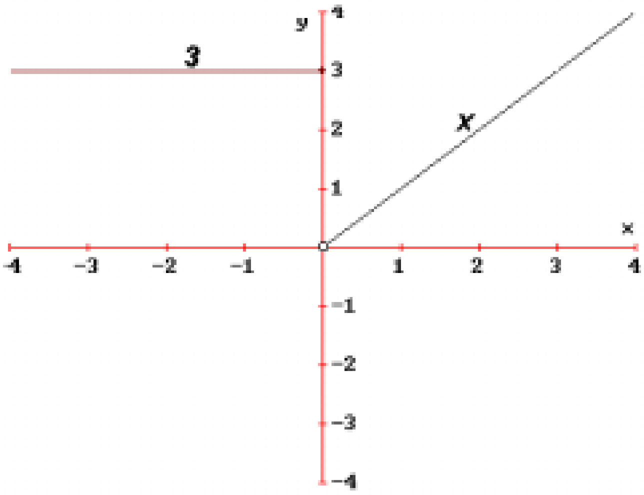
◈◈◈▣▣⊗▣▣◈◈◈

15

(a) Representa la gráfica de la función y = f(x), donde f(x) =3 si x < 0, f(x) = x si x > 0, y además f (0) = 3.
(b) ¿Es continua f(x) en x = 2?
(c) ¿Y en x = 0? ¿De qué tipo es la discontinuidad?

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

(a) $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{Si } x < 0 \\ x & \text{Si } x > 0 \\ 3 & \text{Si } x = 0 \end{cases}$, la gráfica :



(b) Sí, pues $\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} x = 2 = f(2)$

(c) No es continua pues los límites laterales no coinciden : $\begin{matrix} \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 3 = 3 \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x = 0 \end{matrix}$

Es una discontinuidad de primera especie, de salto, el salto es 3.

◈◈◈▣▣⊗▣▣◈◈◈

16 Sea la función y =,f(x), donde f(x) = 1 si x < 0, f (x) = x + 1 si x > 0, y además f (0) = 0.

(a) ¿Es continua f(x) en x = 3?
(b) ¿Y en x = 0? ¿De qué tipo es la discontinuidad?

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x+1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

(a) Sí pues $\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} (x+1) = 3 + 1 = 4 = f(3)$

(b) No pues, aunque los límites laterales coinciden, no coinciden con f(0) :

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 1 = 1 = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x + 1 = 0 + 1 \neq f(0) = 0$$

Es una discontinuidad evitable, pues puede evitarse haciendo f(0) = 1.

◈◈◈▣▣⊗▣▣◈◈◈

17 Sea $f(x)=\dfrac{5x^2-20}{x-2}$

(a) ¿Cuál es su dominio natural?
(b) ¿Es continua en el punto x = 2?
(c) ¿Tiene alguna discontinuidad evitable?
(d) Dibuja una gráfica aproximada con ayuda de varios puntos.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

$$f(x)=\frac{5x^2-20}{x-2}$$

(a) Como es una función de tipo racional, no pertenecen al dominio los valores que anulan el denominador, x – 2 = 0, x = 2, dominio = { $x \in R \,/\, x \neq 2$ }.

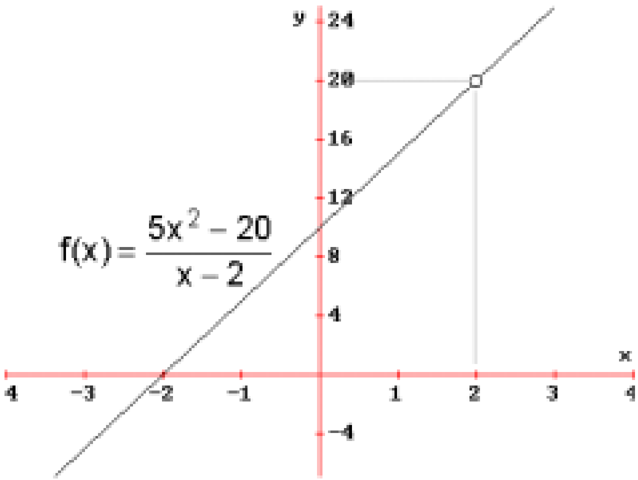
(b) No ya que no existe f(2).

(c) Sí, precisamente en x = 2, pues existe límite :

$$\lim_{x\to 2}\frac{5x^2-20}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{5(x+2)(x-2)}{(x-2)}=\lim_{x\to 2}5(x+2)=5(2+2)=20$$

pero no existe f(2), podría evitarse la discontinuidad redefiniendo f(2) = 20.

(d)



◈◈◈▣▣⊗▣▣◈◈◈

18
(a) Halla el dominio natural de $f(x)=\dfrac{x+5}{x-1}$
(b) ¿De qué tipo es la discontinuidad en x = 1?

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

(a) Al ser una función racional, no pertenece al dominio x = 1, que anula el denominador, dominio = { $x \in R$ / $x \neq 1$ }.

(b) Como el límite cuando x tiende a 1 es infinito, la discontinuidad es de segunda especie.

◈◈◈▣▣⊗▣▣◈◈◈

19 ¿Puede tener una función dos asíntotas diferentes cuando $x \to +\infty$?

✧✧✧⌗⌗⌖⌗⌗✧✧✧

No, pues el límite de la función cuando x tiende al infinito positivo, será único (en caso de existir).

◈◈◈▣▣⊗▣▣◈◈◈

20 La función $f(x)=\frac{2}{x+8}$ ¿tiene asíntota oblicua u horizontal en $x \to +\infty$?¿Y en $x \to -\infty$?

✧✧✧⌗⌗⌖⌗⌗✧✧✧

Veamos primero si tiene asíntota horizontal, hallando el límite :

$y=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x+8}=\frac{2}{\infty+8}=\frac{2}{\infty}=0=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x+8}$, sí tiene una asíntota horizontal, la recta y = 0, por tanto no puede tener asíntotas oblicuas.

◈◈◈▣▣⊗▣▣◈◈◈

21 Halla las asíntotas de $f(x)=x+1-\frac{3}{x}$ para

(a) $x \to +\infty$. (b) $x \to -\infty$.

✧✧✧⌗⌗⌖⌗⌗✧✧✧

Hallemos el límite :

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-(x+1)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(x+1-\frac{3}{x}\right)-(x+1)=\lim_{x\to\pm\infty}-\frac{3}{x}=-\frac{3}{\pm\infty}=0$$

Luego tiene una asíntota oblicua y = x + 1 en sendos extremos.

◈◈◈▣▣⊗▣▣◈◈◈