PROBLEMAS PROPUESTOS

1 Elabora una tabla de valores de la función $f(x) = x^2 - 4x + 3$ en puntos x próximos a $x = 2$. ¿Sugiere la tabla que f(x) es continua en $x = 2$?

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

x	1'9	1'99	1'999	2'1	2'01	2'001
$f(x) = x^2 - 4x + 3$	-0'99	-0'9999	-0'999999	-0'99	-0'9999	-0'999999

Se aprecia que, por la izquierda (valores menores de 2) y por la derecha (valores de x mayores de 2), tiende a $f(2) = 2^2 - 4\cdot 2 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1$.

◈◈◈▣▣⊗▣▣◈◈◈

2 Cuáles de estas funciones tienen límite cuando $x \to 0$?

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

(a) $\lim_{x\to 0}(2x-10) = 2\cdot 0 - 10 = -10$

(b) $\lim_{x\to 0}(x^3 - x) = 0 - 0 = 0$

(c) $\lim_{x\to 0}\dfrac{3x+1}{x^2+5x} = \dfrac{0+1}{0+0} = \dfrac{1}{0} = \infty$, no tiene límite.

◈◈◈▣▣⊗▣▣◈◈◈

3 Calcula los siguientes límites:

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

(a) $\lim_{x\to 0}(x+4) = 0 + 4 = 4$

(b) $\lim_{x\to -1}(3x^4 - 3x) = 3(-1)^4 - 3(-1) = 3 + 3 = 6$

(c) $\lim_{x\to -2}\dfrac{x}{3x+5} = \dfrac{-2}{3\cdot(-2)+5} = \dfrac{-2}{-6+5} = \dfrac{-2}{-1} = 2$

◈◈◈▣▣⊗▣▣◈◈◈

4 Halla los límites en $+\infty$ y en $-\infty$ del polinomio $3x^5 - 4x^2 + 7$.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

El termino dominante es el de mayor grado (que crece o disminuye más rápido):

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} 3x^5 = 3(-\infty)^5 = 3(-\infty) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 3x^5 = 3(+\infty)^5 = 3(+\infty) = +\infty \end{cases}$$

5 Halla los límites cuando $x \to +\infty$ de las funciones racionales:

(a) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^2-3}{8x^3} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{5x^2}{x^3}-\frac{3}{x^3}}{\frac{8x^3}{x^3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{5}{x}-\frac{3}{x^3}}{8} = \frac{\frac{5}{\infty}-\frac{3}{\infty}}{8} = \frac{0}{8} = 0$$

Como el grado del numerador es menor que el del denominador, tiende a cero (crece más deprisa el denominador.

(b) Como numerador y denominador tienen el mismo grado, el límite tiende al cociente entre los coeficientes de mayor grado :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-6x^3}{2x^3+8x-2} = \frac{-\infty}{\infty} \text{Ind} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{-6x^3}{x^3}}{\frac{2x^3}{x^3}+\frac{8x}{x^3}-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-6}{2+\frac{8}{x^2}-\frac{2}{x^3}} = \frac{-6}{2+\frac{8}{\infty}-\frac{2}{\infty}} = \frac{-6}{2} = -3$$

(c) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4-5}{30x^3+5x^2} = \frac{\infty}{\infty} \text{Ind} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4/x^4 - 5/x^4}{30x^3/x^4 + 5x^2/x^4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{5}{x^4}}{\frac{30}{x}+\frac{5}{x^2}} = \frac{1-\frac{5}{\infty}}{\frac{30}{\infty}+\frac{5}{\infty}} = \frac{1}{0} = \infty$$

Como el grado del numerador es mayor que el del denominador, el límite es infinito.

6 Determina un valor de la constante k para el cual la función definida por f(x) = x + k si $x \le 0$, f(x) = $2x^2$ - kx + 6 si x > 0, sea continua en x = 0.

$$f(x) = \begin{cases} x + k \text{ si } x \le 0 \\ 2x^2 - kx + 6 \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

Par que sea continua en x = 0, ha de cumplirse que el límite en x= 0 sea igual a f(0) :

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x+k = k \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (2x^2 - kx + 6) = 6\end{array}\right. \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \Leftrightarrow k = 6$$

◈◈◈▣▣⊗▣▣◈◈◈

7 Explica por qué tiene una discontinuidad evitable en x = 0 la función definida por f (x) = 2 si x < 0, f (x) =(x + 6) / 3 si x > 0.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

Como los límites laterales por la izquierda y por la derecha son iguales a 2, la condición de continuidad que falta es f(0) = 2, pero la función no está definida en x = 0, luego es discontinua en x = 0, para evitar esta discontinuidad redefinimos la función para que f(0)=2, quedando, pues :

$$fx) = \left\{\begin{array}{ll} 2 & \text{si } x \le 0 \\ \dfrac{x+6}{3} & \text{si } x > 0 \end{array}\right\}$$

◈◈◈▣▣⊗▣▣◈◈◈

8 Halla las intersecciones con los ejes de la gráfica de $y = x^2 + 4x$.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

$y = x^2 + 4x$

① **Corte con el eje horizontal, de abscisas u OX**

Los puntos de corte con el eje horizontal cumplen y = 0, es decir igualamos la función a cero y resolvemos la ecuación resultante :

$$y = 0 \Rightarrow x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x(x+4) = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -4 \end{array}\right.$$

Los puntos de corte con el eje horizontal son (0, 0) y (-4, 0).

② **Punto de corte con el eje de ordenadas**, **vertical u OY**.

El punto de corte con el eje OY se obtiene haciendo x =0 y es (0, f(0)), en nuestro caso (0, 0). Observa que, evidentemente, el origen de coordenadas es punto de corte con ambos ejes.

◈◈◈▣▣⊗▣▣◈◈◈

9 Cita ejemplos de funciones con:

(a) tres. (b) uno. (c) ningún punto de intersección con el eje x.

(a) $f(x) = (x-1)(x+2)(x+1) = x^3 + 2x^2 - x - 2$, $g(x) = -(x+2)(x-2)(x+1) = x^3 + x^2 - 4x - 4$.

(b) $f(x) = 2x - 2$, $g(x) = -3x$. $h(x) = 5x + 4$.

(c) $f(x) = x^2 - 4x + 10$, $g(x) = -3$.

10 Halla las regiones donde son positivas las funciones:

(a) $x^3 + 5x$.

(b) $x^3 - 2x$

(c) $(x^2 + 10)^2$

Estudiamos qué valores las anulan y luego el signo en cada uno de los intervalos en que esos puntos dividen a la recta real.

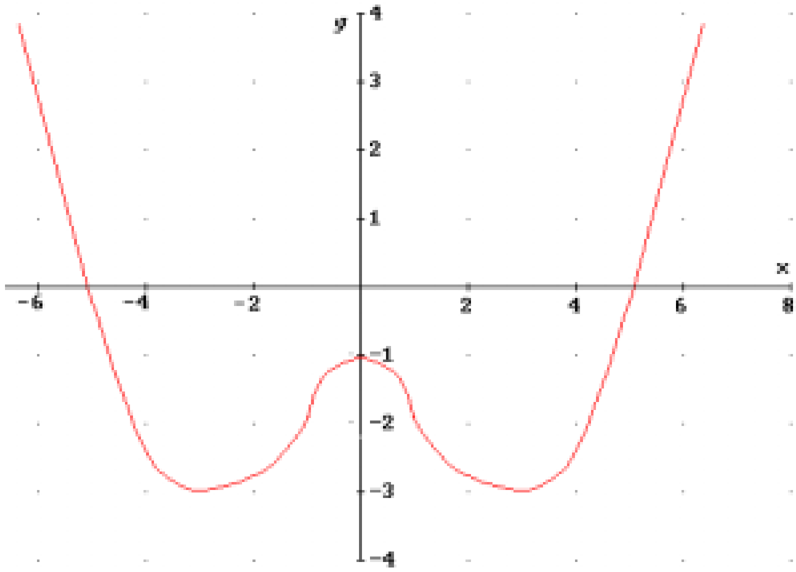
(a) $x^3 + 5x = x(x^2 + 5) = 0$, $x = 0$, como el factor $x^2 + 5$ es siempre positivo, el signo es el que tenga x, para $x < 0$, función negativa, para $x > 0$, función positiva.

(b) $x^3 - 2x = x(x^2 - 2) = 0$, $x = 0$, $x = \pm\sqrt{2}$, luego hemos de estudiar el signo en tres intervalos :

Intervalos	$-\infty, \; -\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}, 0$	$0, \sqrt{2}$	$\sqrt{2}, \infty$
x	< 0	< 0	> 0	> 0
$x^2 - 2$	> 0	< 0	< 0	> 0
$x^3 - 2x$	**(+)(-) = -**	**(-)(-) = +**	**(+)(-) = -**	**(+)(+) = +**

(c) $(x^2 + 10)^2$, al estar elevada al cuadrado es siempre positiva.

11 Una función par f(x), continua en toda la recta real, es decreciente en $0 < x < 3$, creciente en $x > 3$, cóncava hacia arriba en $x > 1$, cóncava hacia abajo en $0 < x < 1$, corta al semieje x positivo en $x = 5$, y al eje y en $y = -1$. Sabiendo además que $f(3) = -3$, esboza la gráfica de la función.



◈◈◈▣▣⊗▣▣◈◈◈

12 Una función f(x), continua en toda la recta, tiene sólo tres extremos locales: en x = 0, x = 1 y x = 2. Si x = 0 y x = 2 son máximos locales, ¿ qué es x = 1?

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

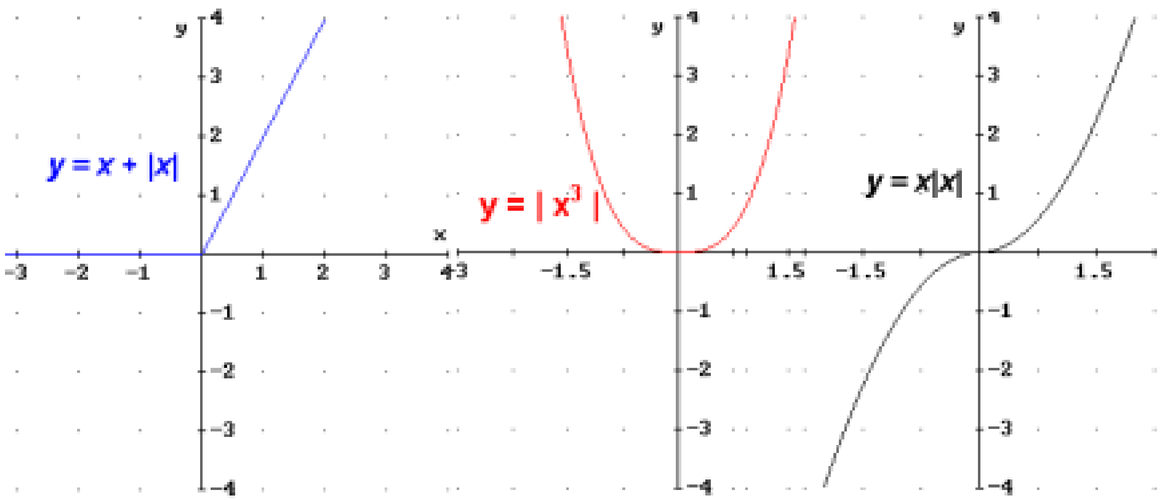
Ha de ser un mínimo el punto intermedio, si está definida y es continua, pues si a su izquierda hay un máximo, será decreciente y como a su derecha hay otro máximo, ha de ser creciente, luego ,si pasa de decreciente a la izquierda a creciente a la derecha, en x = 1 habrá un mínimo.

◈◈◈▣▣⊗▣▣◈◈◈

13 Representa las funciones:

(a) $y = x + |x|$ (b) $y = |x^3|$ (c) $y = x|x|$.

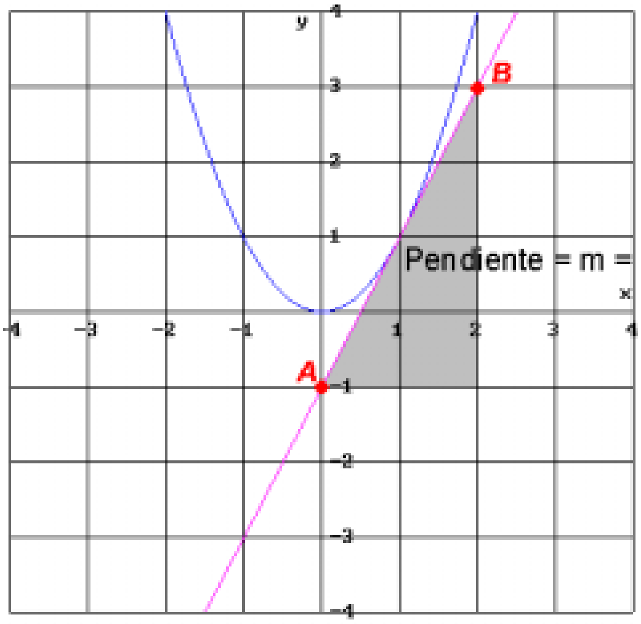
✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧



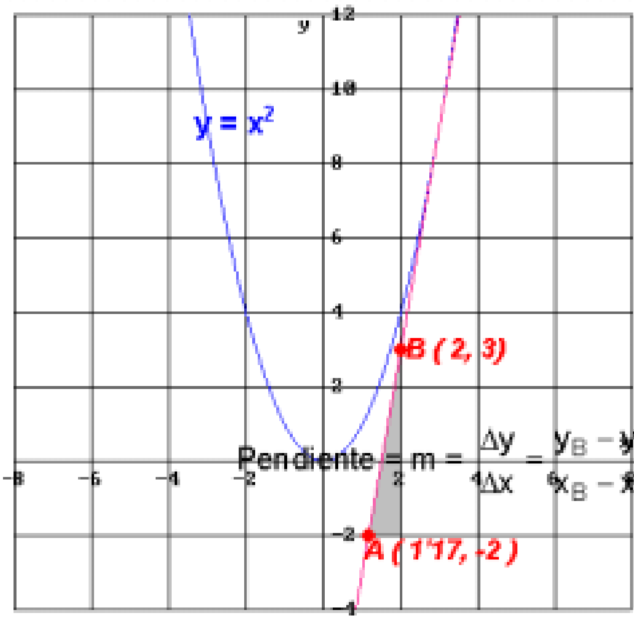
◈◈◈▣▣⊗▣▣◈◈◈

14 Con ayuda de su gráfica en papel cuadriculado, estima la pendiente de $y = x^2$ en x = 1, en x = 3 y x = - 1.

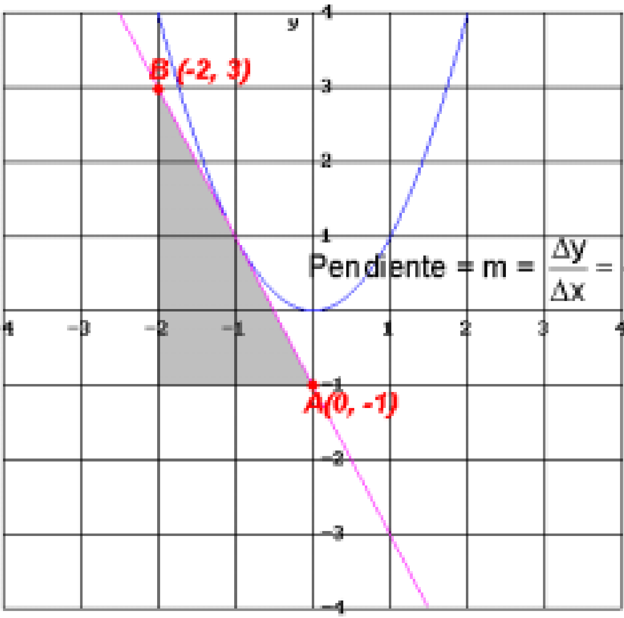
✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧



$$\text{Pendiente} = m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-(-1)}{2-0} = \frac{4}{2} = 2$$



$$\text{Pendiente} = m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-(-2)}{2-1'17} = \frac{5}{0'83} = 6'02$$



$$\text{Pendiente} = m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-(-1)}{-2-0} = \frac{4}{-2} = -2$$

◈◈◈▣▣⊗▣▣◈◈◈

15 ¿Es cierto que si una función continua es cóncava hacia arriba en el intervalo $-1 < x < 1$, no puede tener ningún máximo local en ese intervalo?

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

Sí, si es cóncava hacia arriba puede tener mínimo, pero no máximo relativo.

◈◈◈▣▣⊗▣▣◈◈◈

16

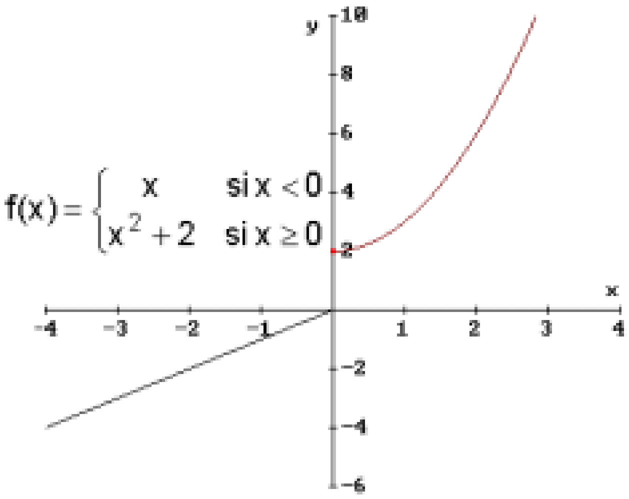
(a) Dibuja la gráfica de $y = f(x)$, donde $f(x)=x$ si $x < 0$, $f(x) = x^2+2$ si $x > 0$, y además $f(0) = 2$.

(b) ¿Es continua $f(x)$ en $x = 1$?

(c) En $x = 0$, ¿ de qué tipo es la discontinuidad?

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

(a) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$



(b) Como x = 1 > 0, estamos en el segundo trozo o intervalo de definición de la función, en él se cumple :

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(x^2 + 2) = 1^2 + 2 = 3 = f(1)$$

luego es continua en x = 1.

(c) Es una discontinuidad de primera especie, de salto finito, la cuantía del salto es 2.

◈◈◈▣▣⊗▣▣◈◈◈

17 Describe el dominio natural y las discontinuidades de las siguientes funciones:

(a) $f(x)=\dfrac{x+3}{x}$ (b) $f(x)=\dfrac{3x-15}{x(x-5)}$ (c) $f(x)=\dfrac{x^3+x^2}{x}$

(a) $f(x)=\dfrac{x+3}{x}$, dominio = { x ∈R / x ≠ 0 }. La discontinuidad es de segunda especie o infinita pues en x = 0 no tiene límite (es infinito).

(b) $f(x)=\dfrac{3x-15}{x(x-5)}$, al ser de tipo racional, no pertenecen al dominio lo valores de x que anulan el denominador, es decir x = 0 y x – 5 = 0, x = 5, dominio = { x ∈R / x ≠ 0 y x≠ 5 }.

Discontinuidades :

① En x = 0, tiene una discontinuidad de segunda especie o infinita pues no existe el límite cuando x →0.

② En x = 5, la discontinuidad es evitable, pues aunque no existe f(5) sí existe el límite :

$$\lim_{x\to 5}\frac{3x-15}{x(x-5)}=\lim_{x\to 5}\frac{3(x-5)}{x(x-5)}=\lim_{x\to 5}\frac{3}{x}=\frac{3}{5}$$

basta, pues redefinir la función en x = 5 de forma f(5) = 3/5 para que la discontinuidad en ese punto se evite y sea continua en x = 5.

(c) $f(x)=\dfrac{x^3+x^2}{x}$, la función es de tipo racional y no existe para los valores que anulan el denominador x = 0, pero es una discontinuidad evitable, ya que su límite es :

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3+x^2}{x}=\lim_{x\to 0}(x^2+x)=0$$

Si redefinimos la función : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3+x^2}{x} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$, la función sería continua.

18 Sea $f(x)=\dfrac{x^2-1}{3(x-1)}$

(a) ¿Cuál es su dominio natural?
(b) ¿Es continua en el punto x = 1?
(c) ¿Tiene alguna discontinuidad evitable?

(a) Como es de tipo racional, no pertenecen a su dominio los valores que anulan el denominador, x – 1 = 0, x = 1, es decir dominio = { $x \in R$ / $x \neq 1$ }.

(b) No, pues aunque sí tiene límite cuando x tiende a 1, no existe f(1).

(c) Sí en x = 1, pues :

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{3(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{3(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{3}=\frac{2}{3}$$

Evitamos la discontinuidad si la redefinimos :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{3(x-1)} & \text{si } x\neq 1\\[2mm] \dfrac{2}{3} & \text{si } x=1\end{cases}$$

◈◈◈▣▣⊗▣▣◈◈◈

19

(a) Halla el dominio natural de $f(x)=\dfrac{x^2+6x}{x(x-2)}$

(b) ¿Tiene discontinuidad infinita en x = 2?

(c) ¿Y en x = 0?

✧✧✧⊕⊕⊕⊕⊕✧✧✧

(a) Es de tipo racional, luego no pertenecen al dominio los valores que anulan el denominador x = 0 y x = 2. Dominio = { $x \in R$ / $x \neq 0$ y $x \neq 2$ }.

(b) Sí pues $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2+6x}{x(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+6}{x-2}=\frac{8}{0}=\infty$

(c) En x = 0, es una discontinuidad evitable, ya que : $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2+6x}{x(x-2)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+6}{x-2}=\frac{6}{-2}=-3$

◈◈◈▣▣⊗▣▣◈◈◈

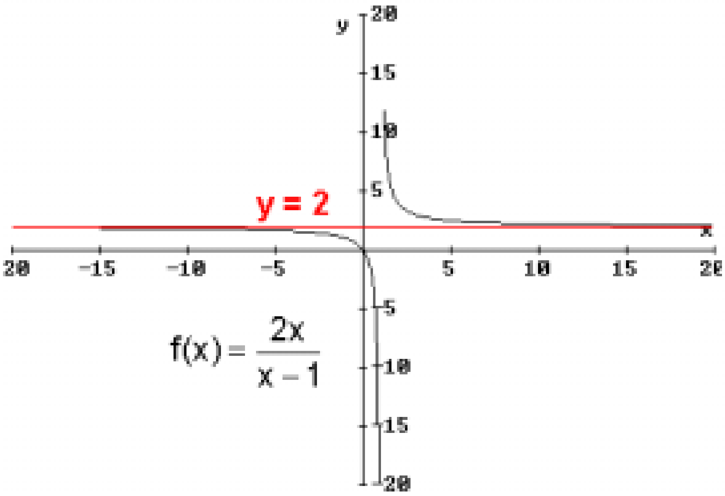
20 Sea la función $f(x)=\dfrac{2x}{x-1}$

(a) ¿ Tiene asíntota en $x \to +\infty$?

(b) ¿Y en $x \to -\infty$?

✧✧✧⊕⊕⊕⊕⊕✧✧✧

Como $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2x}{x-1} = 2$, tiene las dos comportamientos asintóticos (**y = 2**), como puede apreciarse en la representación gráfica :



2 1 Halla las asíntotas de $f(x) = 4x - 1 - \dfrac{2}{x}$ para

(a) x ⟶ +co

(b) x ⟶ - ce.

Cuando $x \to \pm\infty$, $2/x \to 0$, luego tiene una asíntota oblicua de ecuación $y = 4x - 1$

2 2 ¿Tienen alguna asíntota vertical las funciones del Problema 17 de esta sección?

(a) Sí en x = 0, su límite es infinito..

(b) Sí en x = 0, en x = 5 es una discontinuidad evitable, su límite no es infinito

(c) No, pues x = 0 es una discontinuidad evitable, su límite no es infinito.

2 3 ¿Puede una función tener más de una asíntota vertical?

Sí, hasta infinitas asíntotas verticales como la función f(x) = tgx.