Resuelve tú (Pág ❶❹❷)

Analiza el dominio de la función h = 122,5 - 4,9t² ; correspondiente a una piedra que se deja caer desde 122,5 m. .¿ A qué altura se encuentra la piedra en el instante t = 3 ?¿ Y en t = 5? ¿ Y en t = 10 ?

◈◈◈▣▣◎▣▣◈◈◈

▣ h = 122'5 – 4'9 t^2, desde el punto de vista matemático, el dominio de esta función, al ser polinómica, sería R, pero según su significado físico no tiene sentido tiempos negativos, ni alturas negativas (¿bajo el suelo?), hemos de hallar para que valores se anula :

$t = \pm\sqrt{\frac{122'5}{4'9}} = \pm 5$, luego el dominio sería Dom(h) = { t / 0 ≤ t ≤ 5 }, es decir el intervalo temporal [0, 5] segundos.

▣ Para t = 3, h(3) = 122'5 – 4'9 · 3^2 = 122'5 – 44'1 = 78'4 m.

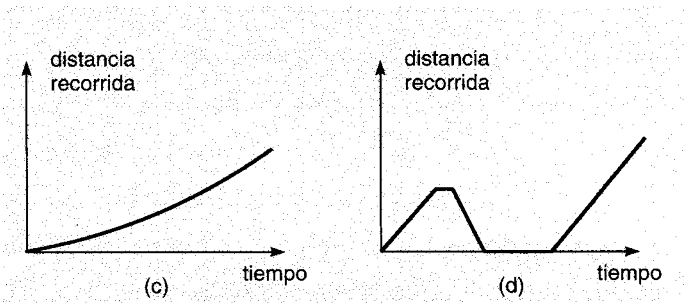
▣ Para t = 5, h(5) = 122'5 – 4'9 · 5^2 = 122'5 – 122'5 = 0 m, en el suelo.

▣ Para t = 10, sigue en el suelo, hace 5 segundos que llegó.

❖❖❖⌖⌖⌖⌖⌖❖❖❖

Resuelve tú (Pág ❶❹❹)

Da una posible interpretación de las gráficas (c) y (d)



◈◈◈▣▣◎▣▣◈◈◈

(c) Se ha movido con movimiento acelerado, recorriendo espacios cada vez un poco mayores en tiempos iguales, por eso la gráfica no es una línea recta sino curva.

(d) Se mueve cierto tiempo con velocidad constante (el primer tramo) después está cierto tiempo parado (segundo tramo), después regresa al punto de origen, también con velocidad constante (pendiente negativa, velocidad en sentido contrario) (tercer tramo), está un cierto tiempo parado en su lugar de origen (cuarto tramo) y vuelve a moverse con velocidad constante en el sentido inicial (último tramo).

❖❖❖⌖⌖⌖⌖⌖❖❖❖

Resuelve tú (Pág ❶❹❺)

Definen a y como función de x las fórmulas ¿ :

(a) $3-y^2+3x=0 \Leftrightarrow y^2=3+3x \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{3(1+x)}$, no es una función pues a cada valor de x se le asignan dos valores de y, no está unívocamente definida, (uno positivo y otro negativo). Si acordamos tomar sólo la raíz positiva, sí sería una función cuyo dominio es los valores de $x \geq -1$.

(b) $y^3-2x=1 \Leftrightarrow y=\sqrt[3]{2x+1}$, sí es una función de dominio R, pues a cada valor de $x \in R$ se le asigna una y dada por la raíz cúbica de su doble más uno.

Resuelve tú (Pág ❶❹❽)

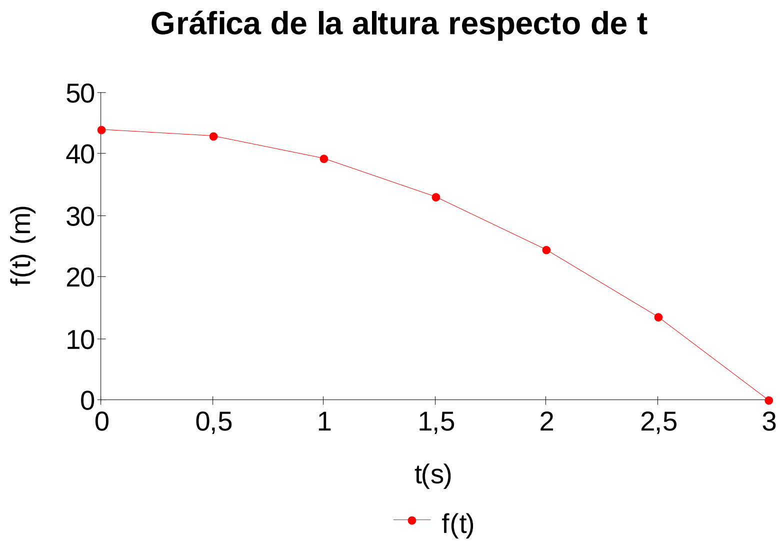
Dibuja la gráfica de ,f'(t) = 44,1 - 4,9 t^2, que describe la caída de una piedra desde una altura inicial de 44,1 metros. Comprueba que la piedra llega al suelo en 3 s. ¿Cuál es el dominio de esta función?

$f(t) = 44'1 - 4'9t^2$

Hacemos la tabla de valores :

t	0	0'5	1	1'5	2	2'5	3
f(t)	44'1	42'88	39'2	33'08	24'5	13'48	0

Y representamos la gráfica de la función :



Como para t = 3 f(3) = 0, a los 3 segundo llega al suelo.

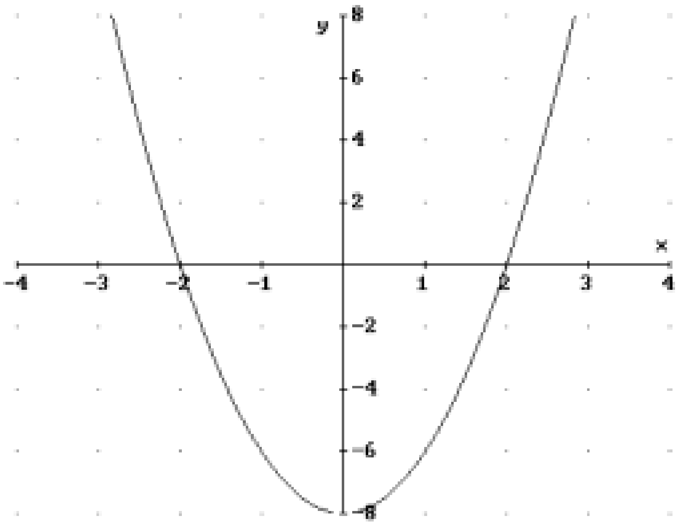
Dom(f) = $0 \leq t \leq 3 \equiv [0, 3]$

PROBLEMAS PRPUESTOS

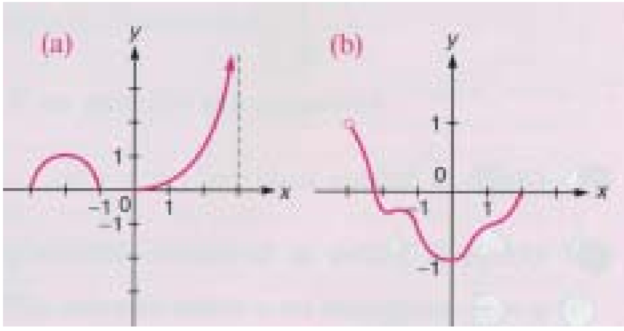
1 Representa, usando unos cuantos puntos, la gráfica de $y = 2x^2 - 8$.

$y = 2x^2 - 8$

x	- 3	-2	-1	0	1	2	3
$y = 2x^2-8$	10	0	-6	-8	-6	0	10

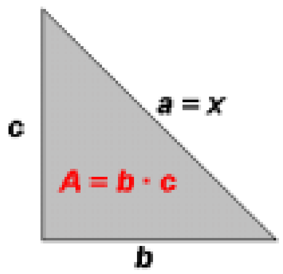


2 Halla el dominio y el rango de la función de cada figura:



(a) Dominio = [-3, -1] ∪ [0, 3), Rango = [0, +∞) ≡ { y∈ R / y ≥ 0 }.
(b) Dominio = (-3, 2] ≡ { x∈ R / -3 < x ≤ 2 }, Rango= [-1, 1) ≡ { y∈ R / -1 ≤ y < 1 }.

3 Expresa el área A de un triángulo rectángulo e isósceles en función de su hipotenusa (x).



Hemos de expresar los lados b = c (es isósceles) en función de x, aplicando el teorema de Pitágoras :

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow x^2 = b^2 + b^2 \Leftrightarrow 2b^2 = x^2 \Leftrightarrow b = \sqrt{\frac{x^2}{2}} = \frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}x$$

El área buscado será :

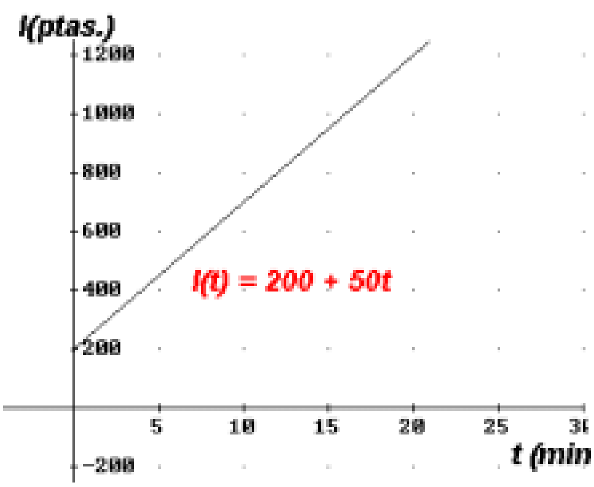
$$A(x) = b \cdot c = b^2 = c^2 = \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{x^2}{2}$$

4 Dos números suman 200. Expresa su producto P como función de uno de ellos (x).

Primer número = x, segundo número = 200 – x (ya que suman 200).

Producto = P(x) = x (200 - x) = - x^2 + 200x.

5 Representa en una gráfica el importe de una llamada telefónica, supuesto que iniciar la conversación cuesta 100 pesetas y a partir de ese momento la tarifa es de 50 pesetas cada minuto. Expresa en una fórmula matemática esta función.



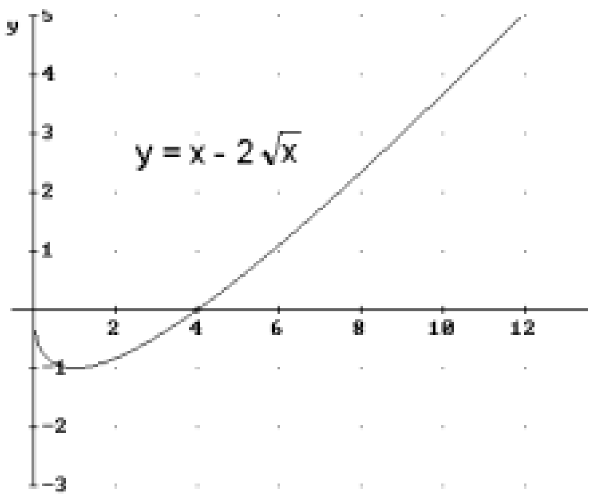
Importe = coste fijo inicial + coste variable (por minuto)

I(t) = 100 + 50t (ptas.) y t en min.

6 Calcula unos cuantos puntos de la gráfica de $y = x - 2\sqrt{x}$, especifica su dominio e intenta completar su gráfica uniendo los puntos obtenidos con un trazo continuo. Comprueba tu gráfica con un ordenador o con una calculadora gráfica.

$y = x - 2\sqrt{x}$, Dominio = $[0, \infty) \equiv \{ x \in R \,/\, x \geq 0 \}$.

x	0	1	4	9	16
y	0	-1	0	3	8



7 ¿Cuál es el dominio natural de las siguientes funciones?:

(a) $y = \dfrac{x^2 + 1}{x - 4}$

(b) $y = \dfrac{4x - 1}{x^2 + 7x}$

(c) $y = \sqrt{x + 1}$

(a) Es una función de tipo racional, no pertenecen al dominio los valores de x que anulan el denominador : Dominio = $\{ x \in R \,/\, x - 4 \neq 0,\ x \neq 4 \} \equiv (-\infty, 4) \cup (4, +\infty)$

(b) Es una función de tipo racional, no pertenecen al dominio los valores de x que anulan el denominador : Dominio = $\{ x \in R \,/\, x \neq 0 \} \equiv (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

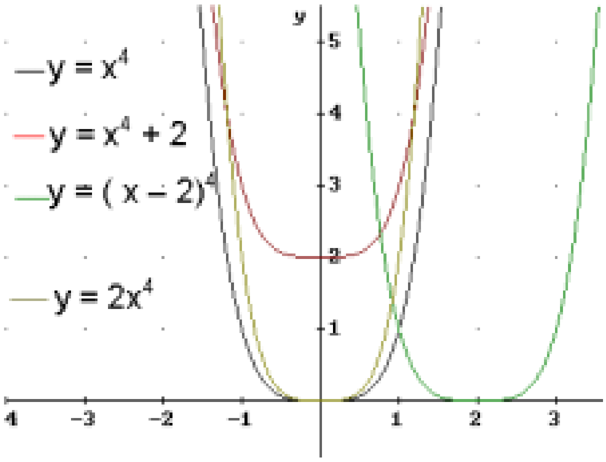
(c) Es una función de tipo irracional, pertenecen al dominio los valores de x que hacen el radicando positivo o nulo : Dominio = $\{ x \in R \,/\, x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1 \} \equiv [-1, +\infty)$

8 Usando la gráfica de $y = x^8$ dibuja las de

(a) $y = x^4 + 2$, es una traslación vertical de 2 unidades hacia arriba.

(b) $y = (x - 2)^4$, traslación horizontal de 2 unidades hacia la derecha.

(c) $y = 2x^4$, es una dilatación de grado 2.



9 Sea $f(x) = x^2 + 2x$, escribe

$f(x) = x^2 + 2x$

(a) f(x) + 2 $= x^2 + 2x + 2$.

(b) f(3x) $= (3x)^2 + 2(3x) = 9x^2 + 6x$

(c) – 4f(x) $= - 4(x^2 + 2x) = - 4x^2 – 8x$.

(d) f(x+1) – f(x - 1) $= [(x+1)^2 + 2(x+1)] – [(x-1)^2 + 2(x-1)] = x^2 + 2x + 1 + 2x + 2 – x^2 + 2x – 1 – 2x + 2 = 4x + 4$.

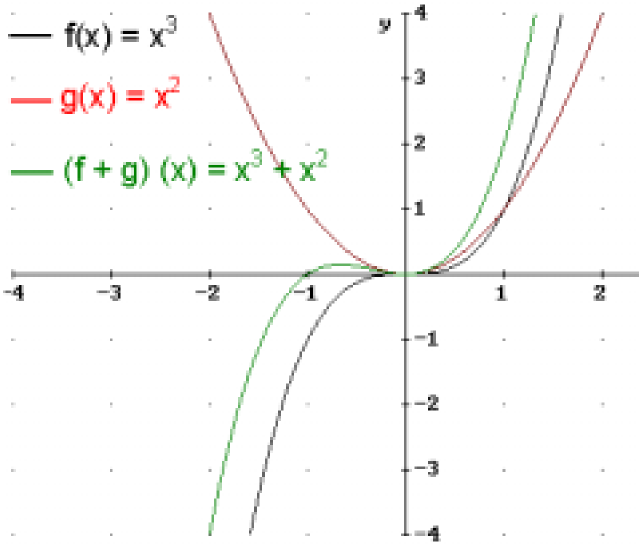
10 Dadas $f(x) = x^3$ y $g(x) = x^2$, representa

(a) f + g
(b) f - g
(c) fg

◈◈◈▣▣◎▣▣◈◈◈

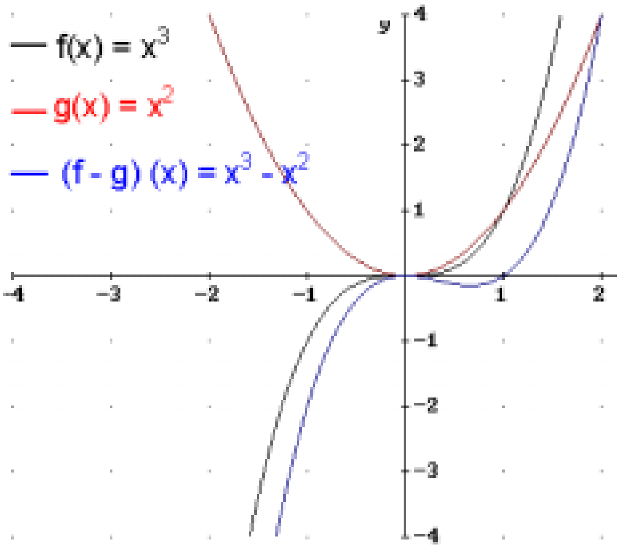
(a) La tabla de valores :

x	-2	-1	0	1	2
$f(x) = x^3$	-8	-1	0	1	8
$g(x) = x^2$	4	1	0	1	4
$(f+g)(x)=x^3+x^2$	**- 8+4=- 4**	**-1+1= 0**	**0**	**1+1 = 2**	**8+4 = 12**



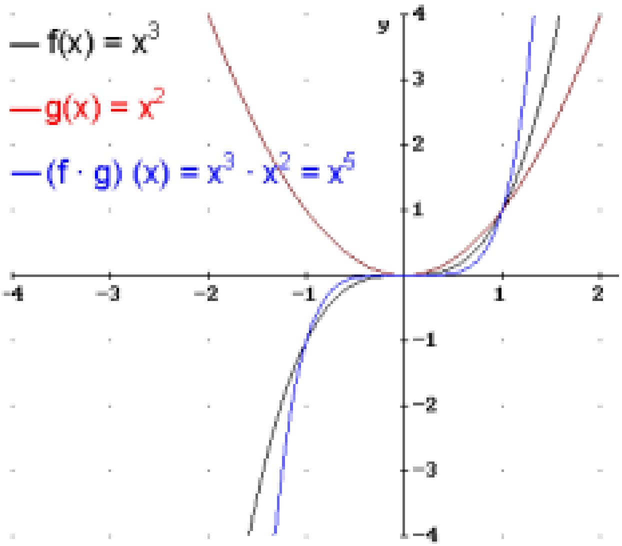
(b)

x	-2	-1	0	1	2
$f(x) = x^3$	-8	-1	0	1	8
$g(x) = x^2$	4	1	0	1	4
$(f -g)(x)= x^3- x^2$	**- 8-4=-12**	**-1-1= -2**	**0**	**1-1 = 0**	**8- 4 = 4**



(c)

x	-2	-1	0	1	2
$f(x) = x^3$	-8	-1	0	1	8
$g(x) = x^2$	4	1	0	1	4
$(f \cdot g)(x) = x^5$	**$-8 \cdot 4 = -32$**	**$-1 \cdot (-1) = 1$**	**0**	**$1 \cdot 1 = 1$**	**$8 \cdot 4 = 32$**



11 ¿Cuáles de las funciones del Problema propuesto 10 son pares y cuáles impares?

$f(x) = x^3$
$g(x) = x^2$
$h(x) = (f+g)(x) = x^3 + x^2$
$i(x) = (f - g)(x) = x^3 - x^2$
$j(x) = (f \cdot g)(x) = x^5$

- **$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$, es impar.**
- **$g(-x) = (-x)^2 = x^2 = g(x)$, es par.**
- **$h(-x) = (-x)^3 + (-x)^2 = -x^3 + x^2 \neq \pm h(x)$, ni par ni impar.**
- **$i(-x) = (-x)^3 - (-x)^2 = -x^3 - x^2 \neq \pm i(x)$, ni par ni impar.**
- **$j(-x) = (-x)^5 = -x^5 = -j(x)$, impar.**

12

(a) ¿Es par la suma de dos funciones pares definidas en toda la recta?

(b) ¿Y el producto?

(a) Sean f(x) y g(x) funciones pares, se cumple f(x) = f(-x) y g(x) = g(-x), su suma f(x) + g(x) = f(-x) + g(-x), luego sí es par.

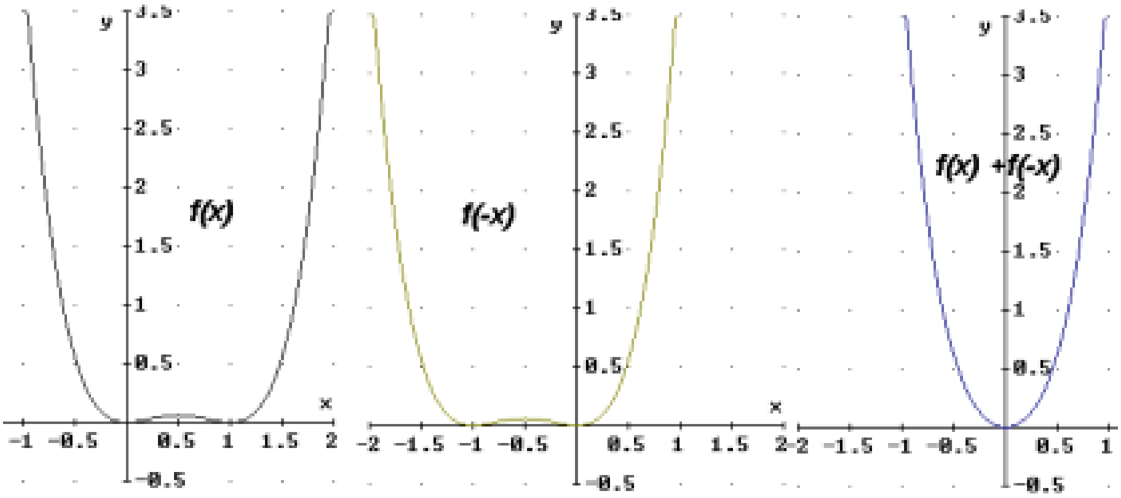
(b) (f ·g) (-x) = f(-x) ·g(-x) = f(x) · g(x) = (f·g)(x), ya que f(x) y g(x) son pares.

13 Dibuja la gráfica de una función f(x). Dibuja a continuación la de f(-x). Forma la suma de ambas, es decir la nueva función

h(x) = f(x) + f(- x)

Si has hecho bien las cosas has tenido que obtener una función par, o sea de gráfica simétrica respecto del eje vertical. ¿Puedes justificar este hecho?

$f(x) = x^4 – 2x^3 + x^2$
$f(-x) = x^4 + 2x^3 + x^2$.
$f(x) + f(-x) = 2x^4 +2x^2$.



Como f(x) y f(-x) son reflexiones respecto del eje vertical , al sumarlas quedan puntos equidistantes respecto del eje de ordenadas y por tanto es par.

14 Dadas f(x) = sen x y g(x) = 2x halla las funciones compuestas $f \circ g$ y $g \circ f$. ¿Son iguales?

$f(x) = \operatorname{sen}x$
$g(x) = 2x$

$f \circ g\ (x) = f(g(x)) = f\ (2x) = \operatorname{sen}2x$

$g \circ f\ (x) = g(f(x)) = g\ (\operatorname{sen}x) = 2\ \operatorname{sen}x.$
$f \circ g\ (x) \neq g \circ f\ (x)$

15 Repite el ejercicio anterior con f(x) = 3x y g(x) = x/3

$f(x) = 3x$
$g(x) = x/3.$

$f \circ g\ (x) = f(g(x)) = f\ (x/3) = 3(x/3) = x$

$g \circ f\ (x) = g(f(x)) = g(3x) = 3x/3 = x$

Sí son iguales.

AUTOEVALUACIÓN

1 Da un ejemplo de funciones cuyos dominios sean:

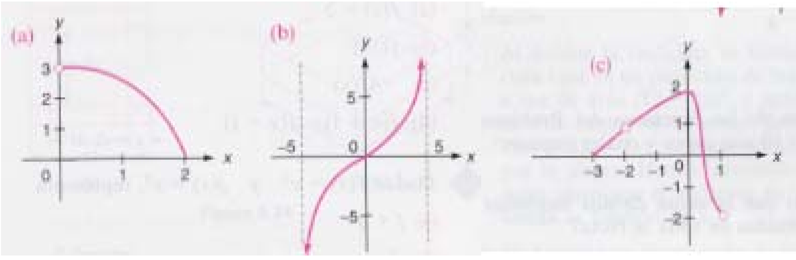
(a) Los números reales positivos $x > 0$.
(b) El intervalo $0 \leq x \leq 1$.
(c) Los enteros desde 1 hasta 12.

(a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x}$

(b) $f(x) = \sqrt{(1-x)}$

(c) $f(x) = 5x$ para $x \in N$ y $1 \leq x \leq 12$.

2 Halla el dominio y el rango de las funciones cuyas gráficas se dan a continuación:



◈◈◈▣▣◎▣▣◈◈◈

(a) Dominio = { x ∈ R / 0 < x ≤ 2 } ≡ (0, 2] , Rango = { x ∈ R / 0 ≤ y < 3} ≡ [0, 3).

(b) Dominio = { x ∈ R / -5 < x < 5} ≡ (-5, 5) , Rango ={ x ∈ R } ≡ (- ∞, ∞)

(c) Dominio = { x∈ R / -3 ≤ x < -2 y –2 < x < 1 } ≡ [-3, -2)∪ (-2, 1) , Rango = { x∈ R / -2 < x≤ 2} ≡ (-2 ,2].

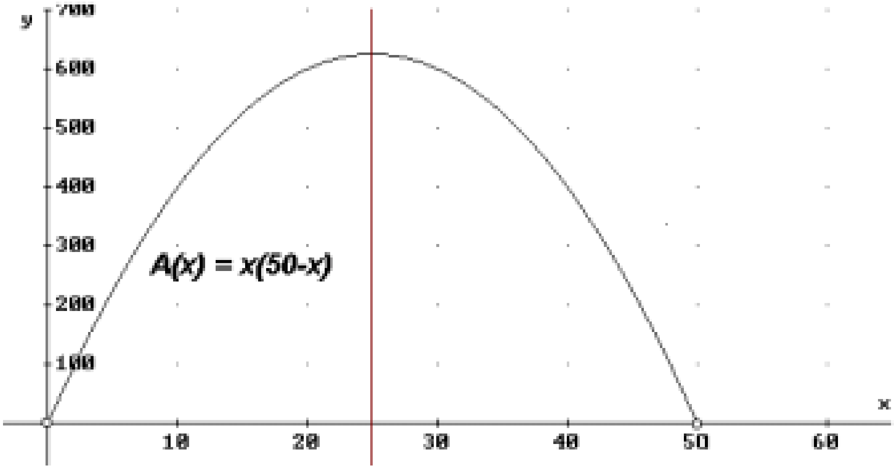
❖❖❖⊕⊕⊕⊕⊕❖❖❖

3 Con 100 m de valla se quiere acotar un campo rectangular. Sea x la medida de uno de sus lados (así que el otro medirá 50 - x). Escribe una expresión del área A del campo en función de x. ¿Cuál es el dominio de esta función? Haciendo una gráfica, con ayuda de varios puntos, estima aproximadamente para qué valor de x se logrará un campo de área máxima.

◈◈◈▣▣◎▣▣◈◈◈

A(x) = x (50 –x) = - x^2 + 50x, Dominio = { x ∈ R / 0 < x < 50 } ≡ (0, 50)

x	5	10	15	20	25	30	35	40	45
A(x)	225	400	525	600	625	600	525	400	225



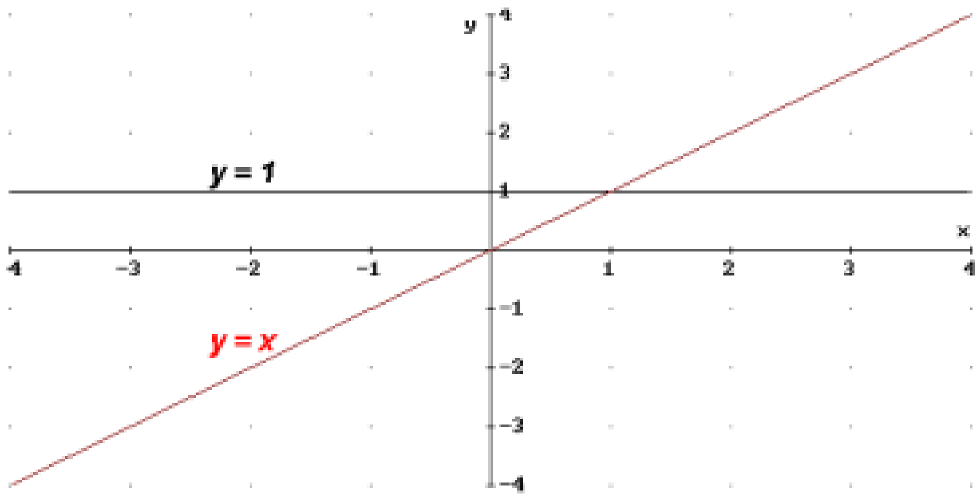
Tanto en la tabla como en la gráfica se aprecia que es simétrica respecto de la recta x = 25, que es el máximo, un cuadrado de lado x = 25.

❖❖❖⊕⊕⊕⊕⊕❖❖❖

4 Dibuja la gráfica de:

(a) La función constante y = 1.

(b) La función identidad y = x.



5 Describe las transformaciones necesarias para hacer que la gráfica de $y = x^3$ coincida con las siguientes:

$f(x) = x^3$

(a) $g(x) = x^3/4 = (1/4)x^3 = (1/4)f(x)$, es una contracción vertical de valor 4.

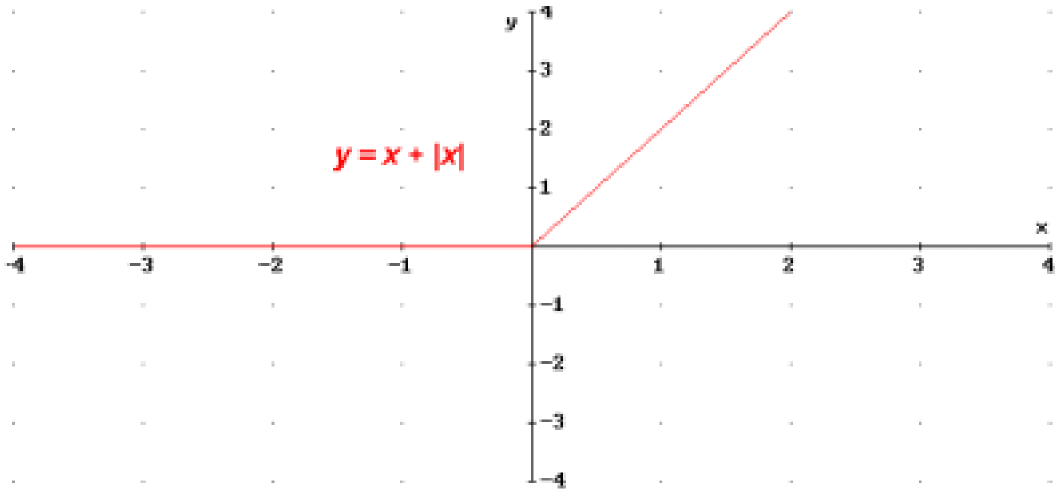
(b) $h(x) = x^3 + 2 = f(x) + 2$, traslación de dos unidades hacia arriba, en vertical.

(c) $i(x) = (x-2)^3 = f(x-2)$, traslación horizontal de 2 unidades hacia la derecha.

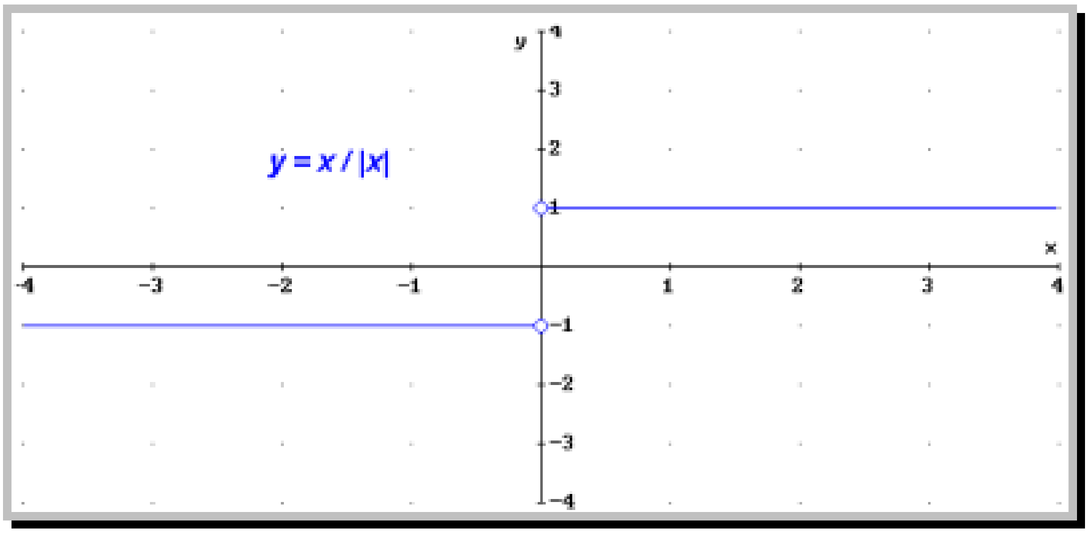
(d) $j(x) = 4x^3 = 4f(x)$, contracción vertical de factor 4.

6 Dibuja la función dada por $y = x + |x|$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y = x + |x|	0	0	0	0	2	4	6



7 Dibuja la gráfica de la función definida por y = x/|x| para todos los x reales no nulos. ¿Puedes justificar la razón de que esta función reciba el nombre de **función signo**?



Porque cuando x es negativa y = -1, cuando x es positiva y = +1, luego nos da el signo de x.

8 Dibuja una gráfica aproximada de las siguientes funciones, transformando adecuadamente la de y = x^2:

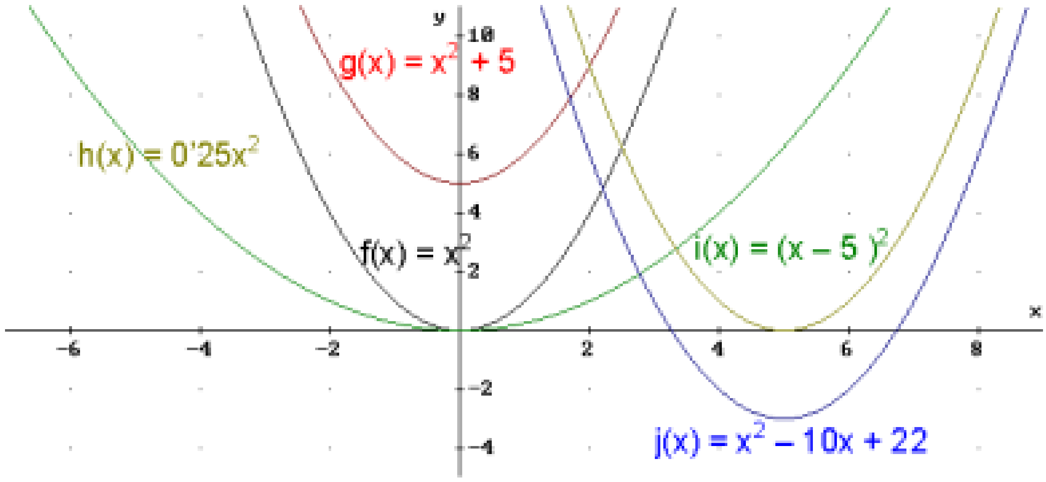
$f(x) = x^2$

(a) $g(x) = x^2 + 5$ = f(x) + 5, es una traslación vertical hacia arriba de 5 unidades.

(b) $h(x) = 0'25x^2 = (1/4)x^2 = (1/4)\ f(x)$, contracción horizontal de factor 4.

(c) $i(x) = (x - 5)^2 = f(x - 5)$, traslación horizontal hacia la derecha de 5 unidades.

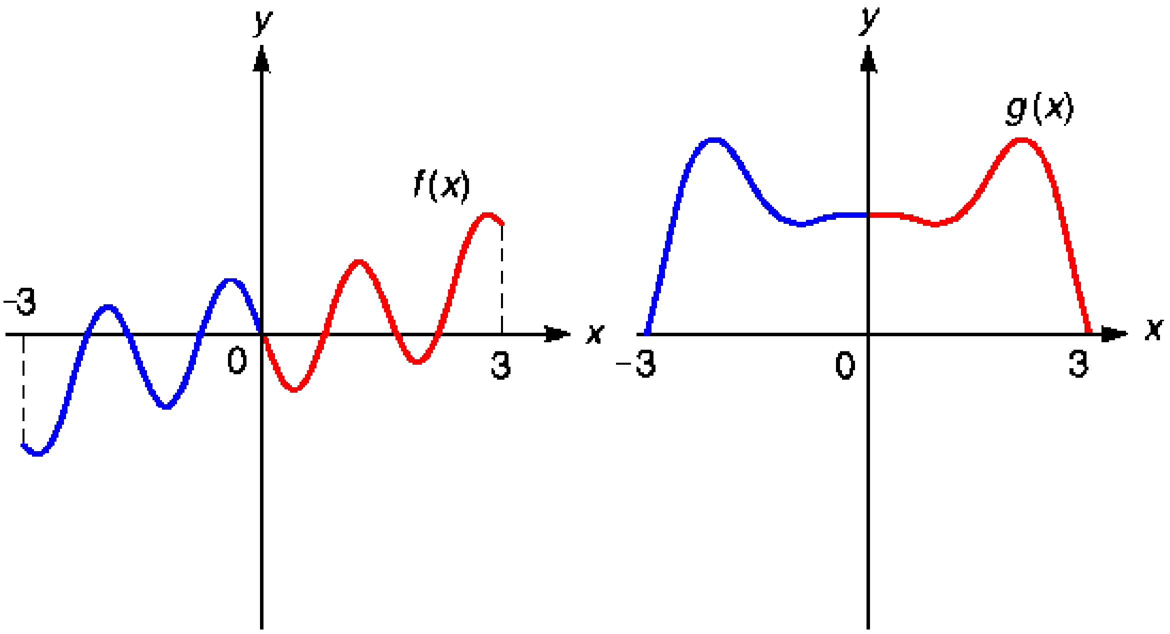
(d) $j(x) = x^2 - 10x + 22 = x^2 - 10x + 25 - 3 = (x - 5)^2 - 3 = f(x - 5) - 3$, una traslación horizontal hacia la derecha de 5 unidades y una traslación vertical hacia abajo de 3 unidades .



9 ¿Para qué valor del número c es par la siguiente función?: $f(x) = cx^3 - 2x^2 + 10$.

$f(x) = cx^3 - 2x^2 + 10$, para que ser par el término de grado 3 ha de ser nulo, luego c = 0, entonces $f(x) = -2x^2 + 10$, $f(-x) = -2(-x)^2 + 10 = -2x^2 + 10 = f(x)$.

10 Copia en tu cuaderno y completa entre - 3 y +3 las gráficas siguientes, sabiendo que f(x) es impar y g(x) par.



(a) (b)