

PROBLEMAS PROPUESTOS (  1 1 9 )

1 ¿Entre qué límites está el valor exacto de cada una de estas magnitudes?

(a)  $3.750 \pm 100$

(b)  $2,98 \pm 0,02$

(c)  $0,05618 \pm 0,00005$



(a)  $3.750 \pm 100 = ( 3.750 + 100, 3.750 - 100 ) = (3.850, 3650)$

(b)  $2'98 \pm 0'02 = ( 2'98 + 0'02, 2'98 - 0'02 ) = (3'00, 2'96)$

(c)  $0'05618 \pm 0'00005 = ( 0'05618+0'00005, 0'05618 - 0'00005 ) = (0'05623, 0'5613)$



2 Expresa en la forma  $x = x \pm \Delta x$  una magnitud cuyo valor está entre 13,95 y 14,41.



$x = 14'18 \pm 0'23$

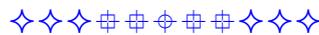


3 Redondea a tres cifras los números:

(a)  $26/16$

(b)  $1 + \sqrt{7}$

(c)  $\pi/2$



(a)  $\frac{26}{16} \approx 1'63$

(b)  $1 + \sqrt{7} \approx 3'65$

(c)  $\frac{\pi}{2} \approx 1'57$



4 *¿Qué error absoluto y relativo se comete al redondear 28,184 a tres cifras?*



Redondeo a tres cifras = 28'2

Error absoluto =  $|x - \bar{x}| = |28'184 - 28'2| = 0'016$ .

$$\text{Error relativo} = \frac{|x - \bar{x}|}{|\bar{x}|} = \frac{0'016}{28'184} = 0'00057$$



5 *Estima la precisión de 355/113 como aproximación de π.*



La medimos mediante el error relativo :

$$\frac{|355/113 - \pi|}{\pi} = \frac{|3'1415929 - \pi|}{\pi} = 8'49 \cdot 10^{-8}$$



6 *Expresa la suma y la diferencia de los datos  $x = 45 \pm 3$  e  $y = 43 \pm 5$ .*

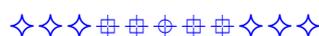


$$x + y = (x + y) \pm (\Delta x + \Delta y) = (45 + 43) \pm (3 + 5) = \mathbf{88 \pm 8}$$

$$x - y = (x - y) \pm (\Delta x + \Delta y) = (45 - 43) \pm (3 + 5) = \mathbf{2 \pm 8}$$



7 *Calcula los errores relativos de  $x + y$  y de  $x - y$  en el problema anterior. ¿Por qué salen tan diferentes?*



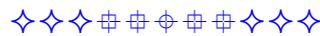
$$\delta(x + y) = \frac{\Delta(x + y)}{|x + y|} \underset{\text{estimación}}{=} \frac{\Delta(x + y)}{|x + y|} = \frac{\Delta x + \Delta y}{|x + y|} = \frac{8}{88} = 0'09 \approx 9\%$$

$$\delta(x - y) = \frac{\Delta(x - y)}{|x - y|} \underset{\text{estimación}}{=} \frac{\Delta(x - y)}{|x - y|} = \frac{\Delta x + \Delta y}{|x - y|} = \frac{8}{2} = 4 \approx 400\%$$

Porque al estar una diferencia en el denominador y ser tan iguales los valores, como la diferencia es pequeña, el cociente será grande, el riesgo de cometer errores relativos grandes es mucho.



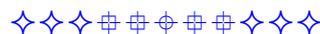
8 En una práctica un estudiante da como valor de la aceleración de la gravedad  $g = 9,83 \pm 0,3$ . ¿Es correcta su presentación del resultado?



Si está indicando una precisión de 0'3 (m/s<sup>2</sup>, se entiende ) del orden de las décimas, **no puede indicar** en la medida hasta la centésimas. Debe escribir  $g = 9'8 \pm 0'3$



9 ¿Cuál es el error relativo de una balanza de baño graduada en kilos para pesar a una persona de unos 60 kilos?



Si la balanza está graduada en kilos la incertidumbre en la medida será de  $\pm 0'5$ , es decir el error absoluto. Luego el error relativo :

$$\delta(\text{peso}) = \frac{\Delta p}{p} = \frac{0'5}{60} = 0'008\bar{3} \approx 0'83\%$$



10 En una balanza de baño alguien comprueba que su peso está entre 60 y 61 kilos. En un experimento de Física se da como masa de la Tierra  $(5,98 \pm 0,01) \times 10^{24}$  kilos. ¿Cuál de las dos medidas tiene mayor error absoluto? ¿Cuál es más precisa?



○ **Errores absolutos :**

- ◆  $P_{\text{persona}} : 60'5 \pm 0'5$ , error absoluto = 0'5 Kg.
- ◆  $P_{\text{Tierra}} : (5'98 \pm 0'01) \times 10^{24}$  kg , error absoluto  $0'01 \cdot 10^{24}$  kg.

Luego es mucho mayor el error absoluto en la medida de la masa de la Tierra.

○ **Errores relativos :**

$$\delta(P_{\text{persona}}) = \frac{0'5}{60'5} \cdot 100 = 0'82\%$$

$$\delta(P_{\text{Tierra}}) = \frac{0'01 \cdot 10^{24}}{5'98 \cdot 10^{24}} \cdot 100 = 0'17\%$$

Luego es menor el error relativo cometido al medir la Tierra y por tanto esa medida es más precisa.



**1 1** *Calcula la suma de estos doce números: 1,0422, 1,1056, 0,9892, 0,8944, 1,0292, 1,1218, 0,7718, 1,0551, 0,4593, 1,3414, 0,8816, 1,0147.*

*(a) Sumando primero y redondeando después el resultado a tres cifras.*

*(b) Redondeando cada uno de ellos a tres cifras y sumando después.*



**(a)**  $1,0422+1,1056+0,9892+0,8944+1,0292+1,1218+0,7718+1,0551+0,4593+1,3414+0,8816+1,0147 = 11'61126 \approx 11'6.$

**(b)**  $1,04+1,11+0,99+0,89+1,03+1,12+ 0,77+ 1,06+ 0,46+1,34+ 0,88+1,01 = 11'7$



**1 2** *Se ha medido el lado de un cubo con el resultado  $L = 20,5 \pm 0,5$  cm. ¿Qué se puede decir acerca de su volumen?*



El volumen de un cubo se halla mediante  $V = L^3$ , hallemos dicho volumen y el error relativo cometido en el volumen :

$$V_{\text{estimado}} = L^3 = (20'5)^3 = 8\ 615'1 \text{ cm}^3.$$

$$\delta(V) = \delta(L^3) = \delta(L \cdot L \cdot L) = \delta L + \delta L + \delta L = 3\delta L = 3 \cdot \frac{0'5}{20'5} \cdot 100 = 7'3\%$$

Como los valores superiores e inferiores de la longitud del lado son  $L_i = 20$  y  $L_f = 21$ , los valores extremos del volumen son  $V_i = (L_i)^3 = 20^3 = 8\ 000 \text{ cm}^3$  y  $V_f = (L_f)^3 = 21^3 = 9261$  y el valor medio :

$$\bar{V} = \frac{8000 + 9261}{2} = 8630'5 \text{ cm}^3 \text{ y el error absoluto } |8000 - 8630'5| = |9261 - 8630'5| = 630'5$$

Luego expresaremos  $V = 8615'1 \pm 630'5 \text{ cm}^3$ .



**1 3** *Sabiendo que un OVNI ha recorrido  $s = 2,5 \pm 0,1$  km en  $t = 4,3 \pm 0,1$  s estima su velocidad y halla una cota de error relativo para esa estimación.*



Estimamos primero la velocidad :

$$\bar{v} = \frac{\bar{s}}{\bar{t}} = \frac{2'5}{4'3} = 0'58 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

y ahora hallamos una cota del error relativo para esa estimación :

$$\delta v = \delta \left( \frac{s}{t} \right) = \delta s + \delta t = \frac{0'1}{2'5} + \frac{0'1}{4'3} = 0'063 \approx 6'3\%$$



**Autoevaluación** (  1 2 0 )

1 Medir con un cronómetro que, por defecto de fabricación, retrasa un segundo cada hora ¿es un error sistemático o aleatorio?



Es un error sistemático pues depende del aparato de medida. Luego sistemáticamente cometeremos ese error al medir con él.



2 ¿Cuál de los dos errores, el absoluto o el relativo, suele dar una idea más justa de la bondad de una aproximación?



La precisión suele medirse por el error relativo que nos da idea de la relación entre la medida y el error absoluto cometido.



3 (a) ¿Entre qué valores estará la suma de los datos  $x = 160 \pm 15$  e  $y = 148 \pm 12$ ?  
 (b) ¿Y su diferencia  $x - y$ ?



(a)  $x + y = (x + y) \pm (\Delta x + \Delta y) = (160 + 148) \pm (15 + 12) = 308 \pm 27.$

(b)  $x - y = (x - y) \pm (\Delta x + \Delta y) = (160 - 148) \pm (15 + 12) = 12 \pm 27.$



4 Misma cuestión para:

(a) el producto  $x \cdot y$ ,  
 (b) el cociente  $x/y$ , de los datos del ejercicio anterior.



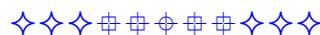
El valor más pequeño de  $x$ ,  $x_{\min} = 160 - 15 = 145$ , el de  $y$  es  $y_{\min} = 148 - 12 = 136$ . Los mayores valores de ambas variables son:  $x_{\max} = 160 + 15 = 175$  e  $y_{\max} = 148 + 12 = 160$ , luego :

(a) El producto estará entre  $x_{\min} \cdot y_{\min} = 145 \cdot 136 = 19\,720$  y  $x_{\max} \cdot y_{\max} = 175 \cdot 160 = 28\,000$ ,  $19\,720 \leq x \cdot y \leq 28\,000$ .

(b) El cociente entre :  $\frac{x_{\min}}{y_{\max}} = \frac{145}{160} = 0'906 \leq \frac{x}{y} \leq \frac{x_{\max}}{y_{\min}} = \frac{175}{136} = 1'287$



5 Halla una cota de error relativo para los cuatro resultados obtenidos en las cuestiones 3 y 4.



☐ Para la suma :  $\delta(x + y) = \frac{\Delta(x + y)}{x + y} = \frac{27}{308} = 0'087 \approx 0'09(9\%)$

☐ Para la diferencia :  $\delta(x - y) = \frac{\Delta(x - y)}{x - y} = \frac{27}{12} = 2'25 \approx 2(200\%)$

☐ Para el cociente y el producto :  $\delta(x \cdot y) = \delta\left(\frac{x}{y}\right) = \delta x + \delta y = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} = \frac{15}{160} + \frac{12}{148} = 0'17 \approx 0'2(20\%)$



6 A1 medir un trozo de cable con una regla graduada en milímetros, su extremo queda entre las marcas de 133 y 134 mm. ¿Cómo se debe presentar el resultado de esa medida?



El valor estimado es la media o mitad  $(133 + 134)/2 = 133'5$  y el error absoluto máximo que podemos cometer es de 0'5 mm ( está graduada en mm) luego la representaremos :

**133'5 ± 0'5 mm**



7 Redondear el número 2,09928 a 2, 3, 4 y 5 cifras.



- 2'1           
  2'10           
  2'099           
  2'0993



8 ¿Qué error relativo se comete como máximo al redondear un número a dos cifras?



$$\delta = \frac{5}{100} = 0'05 \text{ (5\%)}$$



9 ¿Qué cota de error relativo garantiza una calculadora de diez dígitos?



$$\delta = \frac{5}{10000000000} = 5 \cdot 10^{-10}$$



10 ¿A cuántas cifras hay que redondear 0,02772 para cometer un porcentaje de error relativo por debajo del 1 %?



Como se ha visto en el ejercicio nº 8, habría que redondear a 2 cifras para cometer un error menor del 1 %.



11 Un cronómetro digital graduado en centésimas de segundo se utiliza para medir el tiempo del vencedor de una carrera de 100 m libres en natación. Si marca 56 segundos y 35 centésimas, da una cota para el porcentaje de error relativo cometido en ese cronometraje.



Como mide centésimas, la imprecisión será de 1 centésima = 0'01 s y la marca se puede expresar : 56'35 ± 0'01 s, siendo una cota para el error relativo :

$$\delta = \frac{\Delta x}{x} = \frac{0'01}{56'35} = 1'77 \cdot 10^{-4} \approx 2 \cdot 10^{-4}$$



12 Si  $x = 12 \pm 3$  e  $y = 20 \pm 5$  ¿entre qué valores puede estar una magnitud definida por  $z = 2x + y$ ? Da una cota de error absoluto para z.



Como  $x_{\min} = 12 - 3 = 9$ ,  $x_{\max} = 12 + 3 = 15$ ,  $y_{\min} = 20 - 5 = 15$  e  $y_{\max} = 20 + 5 = 25 \Rightarrow z_{\min} = 2 \cdot x_{\min} + y_{\min} = 2 \cdot 9 + 15 = 18 + 15 = 33$  y  $z_{\max} = 2 \cdot x_{\max} + y_{\max} = 2 \cdot 15 + 25 = 55$ , luego z está comprendida :  **$z_{\min} = 33 \leq z \leq z_{\max} = 55$**

El valor más desfavorable es el central  $(33+55)/2 = 44$ , que tiene un error absoluto de :

$$\Delta z = |33 - 44| = |55 - 44| = 11$$



**1 3** (a) Sabiendo que los lados de un salón rectangular miden  $5,4 \pm 0,1$  m y  $3,8 \pm 0,1$  ¿ cómo hay que presentar el resultado obtenido para su área A a partir de esos datos?

(b) Halla una cota de error absoluto y una cota de error relativo para el área.



(a)  $a = 5,4 \pm 0,1$  m y  $b = 3,8 \pm 0,1$  m, el área estimada será  $A = 5'4 \cdot 3'8 = 20'52 \approx 20'5$  m<sup>2</sup> que estará comprendido entre :

$A_{\min} = a_{\min} \cdot b_{\min} = (5'4 - 0'1) \cdot (3'8 - 0'1) = 5'3 \cdot 3'7 = 19'6$  m<sup>2</sup> y  $A_{\max} = a_{\max} \cdot b_{\max} = (5'4 + 0'1) \cdot (3'8 + 0'1) = 5'5 \cdot 3'9 = 21'45$  m<sup>2</sup>, luego el máximo error absoluto o incertidumbre posible es  $\Delta A = |19'6 - 20'5| \approx |21'45 - 20'5| \approx 0'9$  m<sup>2</sup>, luego el área debe expresarse :

$$A = 20'5 \pm 0'9 \text{ m}^2$$

(b) La cota del error absoluto ya está dada ( 0'9 o 1 m<sup>2</sup> si deseamos asegurarnos más), para el relativo :

$$\delta A = \frac{\Delta A}{A} = \frac{0'9}{20'5} = 0'0439 \approx 0'05 \text{ máximo}$$



**1 4** Queremos medir un pasillo de unos cinco metros de largo con un error relativo inferior al 1 %. ¿Es suficiente medirlo con una cinta métrica graduada en centímetros?



Para medirlo con un error relativo menor del 1 % basta redondear a dos cifras y con una cinta métrica graduada en centímetros podemos precisar como mínimo 3 cifras ( hasta las centésimas ) luego **es más que suficiente**.



**1 5** A1 presentar datos científicos obtenidos por redondeo, ¿significa lo mismo 7,40 m que 7,4 m?



No, la primera cantidad significa que podemos precisar hasta las centésimas ( centímetros en este caso pues estamos tratando de longitudes) mientras que en la segunda sólo podemos precisar hasta las décimas ( decímetros ).



16 Sabiendo que un avión ha recorrido  $3,5 \pm 0,1$  kilómetros en  $14 \pm 0,1$  s, estima su velocidad y halla una cota de error relativo para esa estimación.



Estimamos primero la velocidad :

$$\bar{v} = \frac{\bar{s}}{t} = \frac{3'5}{14} = 0'25 \frac{\text{km}}{\text{s}} = 250 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

y ahora hallamos una cota del error relativo para esa estimación :

$$\delta v = \delta \left( \frac{s}{t} \right) = \delta s + \delta t = \frac{0'1}{3'5} + \frac{0'1}{14} = 0'03571 \approx 0'04(4\%)$$

