PROBLEMAS PROPUESTOS (📖 ❶❶❾)

❶ *¿Entre qué limites está el valor exacto de cada una de estas magnitudes?*

(a) 3.750 ± 100

(b) 2,98 ± 0,02

(c) 0,05618 ± 0,00005

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

(a) 3.750 ±100 = (3.750 + 100, 3.750 – 100) = (3.850, 3650)

(b) 2’98 ± 0’02 = (2’98 + 0’02, 2’98 – 0’02) = (3’00, 2’96)

(c) 0’05618 ± 0’00005 = (0’05618+0’00005, 0’05618 – 0’00005) = (0’05623, 0’5613)

◈◈◈▣▣◎▣▣◈◈◈

❷ *Expresa en la forma* $x = x \pm \Delta x$ *una magnitud cuyo valor está entre 13,95 y 14,41.*

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

x = 14’18 ± 0’23

◈◈◈▣▣◎▣▣◈◈◈

❸ *Redondea a tres cifras los números:*

(a) $26/16$
(b) $1+\sqrt{7}$
(c) $\pi/2$

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

(a) $\frac{26}{16} \approx 1'63$

(b) $1+\sqrt{7} \approx 3'65$

(c) $\frac{\pi}{2} \approx 1'57$

◈◈◈▣▣◎▣▣◈◈◈

❹ *¿Qué error absoluto y relativo se comete al redondear 28,184 a tres cifras?*

Redondeo a tres cifras = 28’2

Error absoluto =| x – x | = | 28’184 – 28’2 | = 0’016.

Error relativo = $\dfrac{|x-\overline{x}|}{|x|}=\dfrac{0'016}{28'184}=0'00057$

❺ *Estima la precisión de 355/113 como aproximación de π.*

La medimos mediante el error relativo :

$$\frac{|355/113-\pi|}{\pi}=\frac{|3'1415929-\pi|}{\pi}=8'49\cdot 10^{-8}$$

❻ *Expresa la suma y la diferencia de los datos x = 45 ±3 e y = 43±5.*

x + y = (x + y) ± (Δx + Δy) = (45 + 43) ± (3 + 5) = **88 ± 8**

x - y = (x - y) ± (Δx + Δy) = (45 - 43) ± (3 + 5) = **2 ± 8**

❼ *Calcula los errores relativos de x + y y de x - y en el problema anterior. ¿Por qué salen tan diferentes?*

$$\delta(x+y)=\frac{\Delta(x+y)}{|x+y|}\xrightarrow{\text{estimación}}\frac{\Delta(x+y)}{|\overline{x+y}|}=\frac{\Delta x+\Delta y}{|\overline{x}+\overline{y}|}=\frac{8}{88}=0'\overline{09}\approx 9\%$$

$$\delta(x-y)=\frac{\Delta(x-y)}{|x-y|}\xrightarrow{\text{estimación}}\frac{\Delta(x-y)}{|\overline{x-y}|}=\frac{\Delta x+\Delta y}{|\overline{x}-\overline{y}|}=\frac{8}{2}=4\approx 400\%$$

Porque al estar una diferencia en el denominador y ser tan iguales los valores, como la diferencia es pequeña, el cociente será grande, el riesgo de cometer errores relativos grandes es mucho.

❽ *En una práctica un estudiante da como valor de la aceleración de la gravedad g = 9,83 ± 0,3. ¿Es correcta su presentación del resultado?*

Si está indicando una precisión de 0’3 (m/s^2 , se entiende) del orden de las décimas, **no puede indicar** en la medida hasta la centésimas. Debe escribir g = 9’8 ± 0’3

❾ *¿Cuál es el error relativo de una balanza de baño graduada en kilos para pesar a una persona de unos 60 kilos?*

Si la balanza está graduada en kilos la incertidumbre en la medida será de ± 0’5, es decir el error absoluto. Luego el error relativo :

$$\delta(\text{peso}) = \frac{\Delta p}{p} = \frac{0'5}{60} = 0'008\widehat{3} \approx 0'8\widehat{3}\%$$

❿ *En una balanza de baño alguien comprueba que su peso está entre 60 y 61 kilos. En un experimento de Física se da como masa de la Tierra (5,98 ± 0,01) X 10^{24} kilos. ¿Cuál de las dos medidas tiene mayor error absoluto? ¿Cuál es más precisa?*

❍ **Errores absolutos** :

✦ $P_{persona}$: 60’5 ± 0’5, error absoluto = 0’5 Kg.

✦ P_{Tierra} : (5’98 ± 0’01) x 10^{24} kg , error absoluto 0’01·10^{24} kg.

Luego es mucho mayor el error absoluto en la medida de la masa de la Tierra.

❍ **Errores relativos** :

$$\delta(P_{persona}) = \frac{0'5}{60'5} \cdot 100 = 0'82\%$$

$$\delta(P_{Tierra}) = \frac{0'01 \cdot 10^{24}}{5'98 \cdot 10^{24}} \cdot 100 = 0'17\%$$

Luego es menor el error relativo cometido al medir la Tierra y por tanto esa media es más precisa.

❶❶ *Calcula la suma de estos doce números: 1,0422, 1,1056, 0,9892, 0,8944, 1,0292, 1,1218, 0,7718, 1,0551, 0,4593, 1,3414, 0,8816, 1,0147.*

(a) Sumando primero y redondeando después el resultado a tres cifras.

(b) Redondeando cada uno de ellos a tres cifras y sumando después.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

(a) 1,0422+1,1056+0,9892+0,8944+1,0292+1,1218+0,7718+1,0551+0,4593+1,3414+ +0,8816+1,0147 = 11'61126 ≈ **11'6**.

(b) 1,04+1,11+0,99+0,89+1,03+1,12+ 0,77+ 1,06+ 0,46+1,34+ 0,88+1,01 = **11'7**

◈◈◈▣▣◎▣▣◈◈◈

❶❷ *Se ha medido el lado de un cubo con el resultado L = 20,5 ± 0,5 cm. ¿Qué se puede decir acerca de su volumen?*

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

El volumen de un cubo se halla mediante $V = L^3$, hallemos dicho volumen y el error relativo cometido en el volumen :

$$V_{estimado} = L^3 = (20'5)^3 = 8\,615'1 \text{ cm}^3.$$

$$\delta(V) = \delta(L^3) = \delta(L \cdot L \cdot L) = \delta L + \delta L + \delta L = 3\delta L = 3 \cdot \frac{0'5}{20'5} \cdot 100 = 7'3\%$$

Como los valores superiores e inferiores de la longitud del lado son $L_i = 20$ y $L_f = 21$, los valores extremos del volumen son $V_i = (L_i)^3 = 20^3 = 8\,000 \text{ cm}^3$ y $V_f = (L_f)^3 = 21^3 = 9261$ y el valor medio :

$$\overline{V} = \frac{8000 + 9261}{2} = 8630'5 \text{ cm}^3 \text{ y el error absoluto } |8000 - 8630'5| = |9261 - 8630'5| = 630'5$$

Luego expresaremos $V = 8615'1 \pm 630'5 \text{ cm}^3$.

◈◈◈▣▣◎▣▣◈◈◈

❶❸ *Sabiendo que un OVNI ha recorrido s = 2,5 ± 0,1 km en t = 4,3 ± 0,1 s estima su velocidad y halla una cota de error relativo para esa estimación.*

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

Estimamos primero la velocidad :

$$\overline{v} = \frac{\overline{s}}{\overline{t}} = \frac{2'5}{4'3} = 0'58 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

y ahora hallamos una cota del error relativo para esa estimación :

$$\delta v = \delta\left(\frac{s}{t}\right) = \delta s + \delta t = \frac{0'1}{2'5} + \frac{0'1}{4'3} = 0'063 \approx 6'3\%$$

◈◈◈▣▣◎▣▣◈◈◈

Autoevaluación (📖 ❶❷⓿)

❶ *Medir con un cronómetro que, por defecto de fabricación, retrasa un segundo cada hora ¿es un error sistemático o aleatorio?*

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

Es un error sistemático pues depende del aparato de medida. Luego sistemáticamente cometeremos ese error al medir con él.

◈◈◈▣▣◎▣▣◈◈◈

❷ *¿Cuál de los dos errores, el absoluto o el relativo, suele dar una idea más justa de la bondad de una aproximación?*

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

La precisión suele medirse por el error relativo que nos da idea de la relación entre la medida y el error absoluto cometido.

◈◈◈▣▣◎▣▣◈◈◈

❸ *(a) ¿Entre qué valores estará la suma de los datos $x = 160 \pm 15$ e $y = 148 \pm 12$?*

(b) ¿Y su diferencia $x - y$?

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

(a) **x + y** = (x + y) ± (Δx + Δy) = (160 + 148) ± (15 + 12) = **308 ± 27.**

(b) **x - y** = (x - y) ± (Δx + Δy) = (160 - 148) ± (15 + 12) = **12 ± 27.**

◈◈◈▣▣◎▣▣◈◈◈

❹ *Misma cuestión para:*

(a) el producto $x \cdot y$,
(b) el cociente x/y, de los datos del ejercicio anterior.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

El valor más pequeño de x, $x_{min} = 160 – 15 = 145$, el de y es $y_{min} = 148 – 12 = 136$. Los mayores valores de ambas variables son: $x_{Máx} = 160 + 15 = 175$ e $y_{máx} = 148 + 12 = 160$, luego :

(a) El producto estará entre $x_{min} \cdot y_{min} = 145 \cdot 136 = 19\ 720$ y $x_{máx} \cdot y_{máx} = 175 \cdot 160 = 28\ 000$, $19\ 720 \le x{\cdot}y \le 28\ 000$.

(b) El cociente entre : $\frac{x_{min}}{y_{máx}} = \frac{145}{160} = 0'906 \le \frac{x}{y} \le \frac{x_{máx}}{y_{min}} = \frac{175}{136} = 1'287$

◈◈◈▣▣◎▣▣◈◈◈

❺*Halla una cota de error relativo para los cuatro resultados obtenidos en las cuestiones 3 y 4.*

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

▣ Para la suma : $\delta(x+y) = \frac{\Delta(x+y)}{\overline{x+y}} = \frac{27}{308} = 0'087 \approx 0'09(9\%)$

▣ Para la diferencia : $\delta(x-y) = \frac{\Delta(x-y)}{\overline{x-y}} = \frac{27}{12} = 2'25 \approx 2(200\%)$

▣ Para el cociente y el producto : $\delta(x{\cdot}y) = \delta\left(\frac{x}{y}\right) = \delta x + \delta y = \frac{\Delta x}{\bar{x}} + \frac{\Delta y}{\bar{y}} = \frac{15}{160} + \frac{12}{148} = 0'17 \approx 0'2(20\%)$

◈◈◈▣▣◎▣▣◈◈◈

❻*A1 medir un trozo de cable con una regla graduada en milímetros, su extremo queda entre las marcas de 133 y 134 mm. ¿Cómo se debe presentar el resultado de esa medida?*

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

El valor estimado es la media o mitad (133+ 134)/2 = 133'5 y el error absoluto máximo que podemos cometer es de 0'5 mm (está graduada en mm) luego la representaremos :

133'5 ± 0'5 mm

◈◈◈▣▣◎▣▣◈◈◈

❼*Redondear el número 2,09928 a 2, 3, 4 y 5 cifras.*

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

⦿ 2'1 ⦿ 2'10 ⦿ 2'099 ⦿ 2'0993

◈◈◈▣▣◎▣▣◈◈◈

❽ *¿Qué error relativo se comete como máximo al redondear un número a dos cifras?*

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

$$\delta = \frac{5}{100} = 0'05\ (5\%)$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❾ *¿Qué cota de error relativo garantiza una calculadora de diez dígitos?*

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

$$\delta = \frac{5}{10000000000} = 5 \cdot 10^{-10}$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❿ *¿A cuántas cifras hay que redondear 0,02772 para cometer un porcentaje de error relativo por debajo del 1 %?*

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

Como se ha visto en el ejercicio nº ❽, habría que redondear a 2 cifras para cometer un error menor del 1 %.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❶❶ *Un cronómetro digital graduado en centésimas de segundo se utiliza para medir el tiempo del vencedor de una carrera de 100 m libres en natación. Si marca 56 segundos y 35 centésimas, da una cota para el porcentaje de error relativo cometido en ese cronometraje.*

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

Como mide centésimas, la imprecisión será de 1 centésima = 0'01 s y la marca se puede expresar : 56'35 ± 0'01 s, siendo una cota para el error relativo :

$$\delta = \frac{\Delta x}{\bar{x}} = \frac{0'01}{56'35} = 1'77 \cdot 10^{-4} \approx 2 \cdot 10^{-4}$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❶❷ *Si x =12 ± 3 e y =20 ± 5 ¿entre qué valores puede estar una magnitud definida por z = 2x + y ?Da una cota de error absoluto para z.*

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

Como $x_{mín}$ = 12 – 3 = **9**, $x_{máx}$ = 12 + 3 = **15**, $y_{mín}$ = 20 – 5 = **15** e $y_{máx}$ = 20 + 5 = **25** ⇒ $z_{mín} = 2 \cdot x_{mín} + y_{mín}$ = 2 · 9 + 15 = 18 + 15 = **33** y $z_{máx} = 2 \cdot x_{máx} + y_{máx}$ = 2 · 15 + 25 = **55**, luego z está comprendida : **$z_{mín} = 33 \le z \le z_{máx} = 55$**

El valor más desfavorable es el central (33+55)/2 = 44, que tiene un error absoluto de :

Δz = | 33 – 44 | = | 55 – 44 | = 11

❶❸ *(a) Sabiendo que los lados de un salón rectangular miden 5,4 ± 0,1 m y 3,8 ± 0,1 ¿ cómo hay que presentar el resultado obtenido para su área A a partir de esos datos?*

(b) Halla una cota de error absoluto y una cota de error relativo para el área.

(a) a = 5,4 ± 0,1 m y b = 3,8 ± 0,1 m, el área estimada será A = 5'4 · 3'8 = 20'52 ≈20'5 m^2 que estará comprendido entre :

$A_{mín} = a_{mín} \cdot b_{min}$ = (5'4 - 0'1) · (3'8 – 0'1) = 5'3 · 3'7 = 19'6 m^2 y $A_{máx} = a_{máx} \cdot b_{máx}$ = (5'4 + 0'1) · (3'8 + 0'1) = 5'5 · 3'9 = 21'45 m^2 , luego el máximo error absoluto o incertidumbre posible es ΔA = | 19'6 – 20'5 | ≈ | 21'45 – 20'5| ≈ 0'9 m^2, luego el área debe expresarse :

A = 20'5 ± 0'9 m^2

(b) La cota del error absoluto ya está dada (0'9 o 1 m^2 si deseamos asegurarnos más), para el relativo :

$$\delta A = \frac{\Delta A}{A} = \frac{0'9}{20'5} = 0'0439 \approx 0'05 \text{ máximo}$$

❶❹ *Queremos medir un pasillo de unos cinco metros de largo con un error relativo inferior al 1 %. ¿Es suficiente medirlo con una cinta métrica graduada en centímetros?*

Para medirlo con un error relativo menor del 1 % basta redondear a dos cifras y con una cinta métrica graduada en centímetros podemos precisar como mínimo 3 cifras (hasta las centésimas) luego **es más que suficiente.**

❶❺ *A1 presentar datos científicos obtenidos por redondeo, ¿significa lo mismo 7,40 m que 7,4 m?*

No, la primera cantidad significa que podemos precisar hasta las centésimas (centímetros en este caso pues estamos tratando de longitudes) mientras que en la segunda sólo podemos precisar hasta las décimas (decímetros).

❶❻ *Sabiendo que un avión ha recorrido 3,5 ± 0,1 kilómetros en 14 ± 0,1 s, estima su velocidad y halla una cota de error relativo para esa estimación.*

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

Estimamos primero la velocidad :

$$\bar{v} = \frac{\bar{s}}{\bar{t}} = \frac{3'5}{14} = 0'25\,\frac{km}{s} = 250\,\frac{m}{s}$$

y ahora hallamos una cota del error relativo para esa estimación :

$$\delta v = \delta\left(\frac{s}{t}\right) = \delta s + \delta t = \frac{0'1}{3'5} + \frac{0'1}{14} = 0'03571 \approx 0'04(4\%)$$

◈◈◈▣▣◎▣▣◈◈◈