Resuelve tú (Pág 98)

Resuelve la ecuación :

✰ ✰ ✰ ✾ ✾ ❁ ✾ ✾ ✰ ✰ ✰

9x + 22 = 8x – 6 ; 9x +22 –22 = 8x – 6 – 22 ; 9x = 8x – 28; 9x – 8x = 8x – 8x – 28 ; x = - 28.

❇ ❇ ❇ ✸ ✸ ❇ ✸ ✸ ❇ ❇ ❇

Resuelve tú (Pág 99)

Completa la resolución de 7x – 4 = 6x + 5 ={ pasar – 4 como +4} = 7x = 6x + 5 + 4 …

✰ ✰ ✰ ✾ ✾ ❁ ✾ ✾ ✰ ✰ ✰

$$7x-4=6x+5 \xrightarrow{\text{pasa} -4 \text{ al } 2^{\circ} \text{ como} +4} 7x=6x+5+4 \xrightarrow{\text{pasa } 6x \text{ al } 1^{\circ} \text{ como } -6x} 7x-6x=9 \Leftrightarrow x=9$$

❇ ❇ ❇ ✸ ✸ ❇ ✸ ✸ ❇ ❇ ❇

Resuelve tú (Pág 100)

Resuelve la ecuación :

✰ ✰ ✰ ✾ ✾ ❁ ✾ ✾ ✰ ✰ ✰

24x – 30 = 19x – 15 ; 24x – 19 x = 30 – 15 ; 5x = 15; x = 15/5 = 3.

❇ ❇ ❇ ✸ ✸ ❇ ✸ ✸ ❇ ❇ ❇

PROBLEMAS PROPUESTOS

1 La escritura decimal de 8 / 25, ¿es finita o periódica?

✰ ✰ ✰ ✾ ✾ ❁ ✾ ✾ ✰ ✰ ✰

El denominador 25 = 5^2, como el único factor es un 5, el número decimal será finito, exacto. 8/25 = 0’32.

❇ ❇ ❇ ✸ ✸ ❇ ✸ ✸ ❇ ❇ ❇

2 Halla los períodos de los siguientes números racionales:

✰ ✰ ✰ ✾ ✾ ❁ ✾ ✾ ✰ ✰ ✰

(a) $\frac{55}{9}=6'\widehat{1}$ **(b)** $\frac{3}{7}=0'\overline{428571}$ **(c)** $\frac{111}{11}=10'\overline{09}$ **(d)** $\frac{12}{27}=0'\widehat{4}$

❈ ❈ ❈ ✹ ✹ ❈ ✹ ✹ ❈ ❈ ❈

3 Demuestra que $\sqrt{7}$ no es racional por reducción al absurdo.

✰ ✰ ✰ ✾ ✾ ❁ ✾ ✾ ✰ ✰ ✰

Hipótesis : $\sqrt{7} = \frac{a}{b}$, es decir, la raíz de siete se puede escribir como un número racional (fracción a/b irreducible).

① $b\sqrt{7} = a \Rightarrow \left(b\sqrt{7}\right)^2 = a^2 \Leftrightarrow 7b^2 = a^2 \Leftrightarrow \frac{a^2}{b^2} = 7$

② Sí la fracción a/b es irreducible (no tiene factores comunes, son primos entre sí) su cuadrado a^2/ b^2 tampoco ha de tener factores comunes, pero según el paso anterior hemos demostrado que su cociente es 7, luego no son primos entre sí, con lo que llegamos a una contradicción respecto de la hipótesis y hemos de concluir, por reducción al absurdo, que no se puede cumplir la hipótesis, es decir el número no es racional.

❈ ❈ ❈ ✹ ✹ ❈ ✹ ✹ ❈ ❈ ❈

4 El Papiro Rhind (hacia 1700 a. C.) muestra que los egipcios utilizaban (16/9)^2 como aproximación de π. ¿Es mayor o menor que el verdadero valor? ¿Es mejor aproximación que 22/7?

✰ ✰ ✰ ✾ ✾ ❁ ✾ ✾ ✰ ✰ ✰

$\left\{\begin{array}{l} \left(\frac{16}{9}\right)^2 = \frac{256}{81} = 3'\overline{160493827} \\ \frac{22}{7} = 3'\overline{142857} \end{array}\right\}$, luego es mayor que π =3'1415…y es peor aproximación que 22/7.

❈ ❈ ❈ ✹ ✹ ❈ ✹ ✹ ❈ ❈ ❈

5 ¿Hay algún valor de x que verifique la ecuación 8x - (12 + 2x) = 6(x - 1)?

✰ ✰ ✰ ✾ ✾ ❁ ✾ ✾ ✰ ✰ ✰

8x – (12 + 2x) = 8x – 12 – 2x =; 6x – 12
6(x – 1)= 6x – 6

Como 6x – 12 ≠ 6x – 6 ya que - 12 ≠ – 6, no tiene solución, no hay ningún valor de x que verifique la ecuación.

❈ ❈ ❈ ✹ ✹ ❈ ✹ ✹ ❈ ❈ ❈

6 Busca el gazapo en esta cadena de operaciones:

✰ ✰ ✰ ✾✾❁✾✾ ✰ ✰ ✰

$$\frac{5(2x-1)+12}{7x+3(x+1)}=\frac{10x-5+12}{7x+3x+3}=\frac{10x+7}{10x+3}=\{\text{Dividiendo por 10 numerador y denominador}\}=\frac{x+\frac{7}{10}}{x+\frac{3}{10}}$$

El error está en el tercer paso, que no se divide por 10 nada más que el primer sumando pero no el segundo y, para dividir una suma por un número, hay que dividir, por ese número, todos los sumandos.

❇ ❇ ❇ ✹ ✹ ❇ ✹ ✹ ❇ ❇ ❇

7 ¿Cuáles de estos números son irracionales?

(a) $2-\sqrt{2}$ **(b)** $\frac{1}{\pi}$ **(c)** $\frac{3\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$

✰ ✰ ✰ ✾✾❁✾✾ ✰ ✰ ✰

Los apartados **(a)** y **(b)** sí son irracionales, ya que $\sqrt{2}$ y π, lo son, pero el apartado **(c)** se puede transformar y simplificar :

$$\frac{3\sqrt{8}}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2^3}}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2^2 2}}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2^2}\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{3\cdot 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=6$$, luego no es irracional.

❇ ❇ ❇ ✹ ✹ ❇ ✹ ✹ ❇ ❇ ❇

8 Completa estas igualdades:

✰ ✰ ✰ ✾✾❁✾✾ ✰ ✰ ✰

(a) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)=\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2=3-2=1$

(b) $\frac{4-2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-4}=\frac{\left(4-2\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{2}+4\right)}{\left(2\sqrt{2}-4\right)\left(2\sqrt{2}+4\right)}=\frac{8\sqrt{2}+16-4\left(\sqrt{2}\right)^2-8\sqrt{2}}{\left(2\sqrt{2}\right)^2-4^2}=\frac{16-8}{8-16}=\frac{8}{-8}=-1$

Sin necesidad de racionalizar :

$$\frac{4-2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-4}=\frac{-\left(2\sqrt{2}-4\right)}{2\sqrt{2}-4}=-1$$

(c) $\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2=\left(\sqrt{5}\right)^2-2\sqrt{5}\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2=5-2\sqrt{15}+3=8-2\sqrt{15}$

Para que sea igual a 2 : $8-2\sqrt{15}+\left(-6+2\sqrt{15}\right)=2$

9 ¿Es cierto que |-a| = |a| para todo número real a.?

Sí, pues según la definición de valor absoluto |-a| = a y |a| = a.

10 Completa estas igualdades:

(a) $\left(\sqrt{7'25}\right)^2 = \sqrt{7'25^2} = 7'25$ **(b)** $\left(\sqrt[3]{27}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{3^3}\right)^2 = 3^2 = 9$

(c) $\left(-\sqrt{5}\right)^4 = \sqrt{5^4} = 5^2 = 25$ **(d)** $\left(-\sqrt[3]{8}\right)^5 = \left(-\sqrt[3]{2^3}\right)^5 = (-2)^5 = -32$

11 Halla varias aproximaciones racionales, por exceso y por defecto, de $\sqrt[3]{10}$.

$$\sqrt[3]{10} \approx 2'15443469... \Rightarrow \frac{1939}{900} = 2'15\widehat{4} > \sqrt[3]{10} > \frac{43}{20} = 2'15$$

12 Explica si es correcta o no esta cancelación: 3(2x + 10) = 5x + 75 = {cancelar 10} = 3(2x) = 5x + 75 - 10

No, pues al restar 10 en el primer miembro queda 6x + 20, ya que el 3 multiplica a los dos sumandos 3 (2x + 10) = 6x + 30, y al restar 10 no queda 3(2x).

13 Escribe en notación científica:

(a) 899 000 000 = 8'99 · 10^8 **(b)** 0'001 = 1'00 · 10^{-3}

(c) 102'2 = 1'022 · 10^2 **(d)** 0'0000000001= 1'0 · 10^{-10}

❈ ❈ ❈ ✸ ✸ ❈ ✸ ✸ ❈ ❈ ❈

14 Aproxima $\frac{1}{\pi}$ hasta las centésimas.

✰ ✰ ✰ ✾ ✾ ❁ ✾ ✾ ✰ ✰ ✰

$1/\pi \approx 0'31830988\ldots \approx 0'32$

❈ ❈ ❈ ✸ ✸ ❈ ✸ ✸ ❈ ❈ ❈

15 ¿Son ciertas estas igualdades?

✰ ✰ ✰ ✾ ✾ ❁ ✾ ✾ ✰ ✰ ✰

(a) $\sqrt{64-25} = \sqrt{39} \neq \sqrt{64} - \sqrt{25} = 8-5=3$, pues la raíz de una suma no es la suma de las raíces.

(b) $\sqrt[3]{x^3y^3} = \sqrt[3]{(xy)^3} = xy \Rightarrow$ Cierta

(c) $\sqrt[4]{a^4+b^4} = a+b$. No es cierta por la misma razón que el apartado **(a)**, la raíz de una suma no es la suma de las raíces.

❈ ❈ ❈ ✸ ✸ ❈ ✸ ✸ ❈ ❈ ❈

16 Efectúa en tu calculadora el producto de 52.627.289 x 8.298.117.234. ¿Qué significas lo que aparece en la pantalla? ¿Es el resultado exacto? ¿Por qué?

✰ ✰ ✰ ✾ ✾ ❁ ✾ ✾ ✰ ✰ ✰

52 627 289 x 8 298 117 234 = $4'367074138 \cdot 10^{17}$, está en notación científica con 10 cifras significativas. Es una aproximación porque en la pantalla de la calculadora no caben todas las cifras del resultado, aunque internamente la operación la hace exacta el resultado al no poder presentarlo, presenta una aproximación con los 10 dígitos que caben.

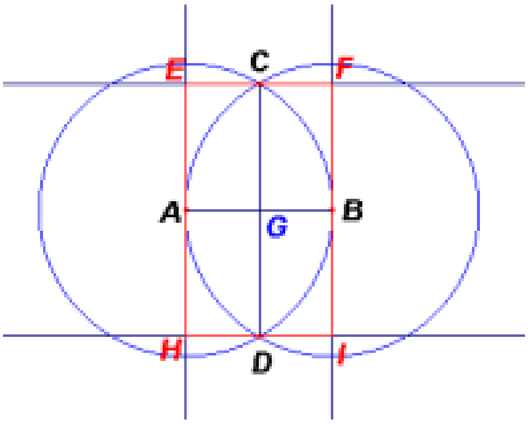
Si realizamos la operación con un programa informático (Derive por ejemplo) el resultado exacto obtenido es = 436 707 413 829 598 626.

❈ ❈ ❈ ✸ ✸ ❈ ✸ ✸ ❈ ❈ ❈

17 Demuestra que la relación indicada en la Figura 5.1, que puedes observar en la introducción de esta Unidad, es en efecto $\sqrt{3}:1$ (Ayuda: AB, BC y CA miden lo mismo.)

✰ ✰ ✰ ✾ ✾ ❁ ✾ ✾ ✰ ✰ ✰

El triángulo ABC es equilátero, el lado AB es lo que mide el ancho del rectángulo y el largo o



alto mide el doble de la altura del triángulo, hallemos la altura, aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo CGB :

$$\overline{CB}^2 = \left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2 + h^2 \xrightarrow{\text{Como } \overline{CB}=\overline{AB}} h = \sqrt{\overline{AB}^2 - \frac{\overline{AB}^2}{4}} = \sqrt{\frac{4\overline{AB}^2 - \overline{AB}^2}{4}} = \sqrt{\frac{3\overline{AB}^2}{4}} == \frac{\overline{AB}}{2}\sqrt{3}$$

Como el lado menor del rectángulo mide EF = HI = AB y el mayor EH = FI = CD = 2CG = 2h se cumple :

$$\frac{\text{Lado mayor}}{\text{Lado menor}} = \frac{2h}{\overline{AB}} = \frac{2\frac{\overline{AB}}{2}\sqrt{3}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{3}\,\overline{AB}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{3}}{1}; \text{relación}: \sqrt{3}:1$$

❈ ❈ ❈ ✹ ✹ ❈ ✹ ✹ ❈ ❈ ❈

AUTOEVALUACIÓN

1

(a) La suma y el producto de dos números racionales, ¿son siempre racionales?

(b) La suma y el producto de dos irracionales, ¿son siempre irracionales?

✰ ✰ ✰ ✾ ✾ ❁ ✾ ✾ ✰ ✰ ✰

(a) Sí **(b)** Sí .

❈ ❈ ❈ ✹ ✹ ❈ ✹ ✹ ❈ ❈ ❈

2 ¿Cuáles de estas igualdades son correctas?

✰ ✰ ✰ ✾ ✾ ❁ ✾ ✾ ✰ ✰ ✰

(a) | 2 – 7 | = | - 5 | = 5 , correcta.

(b) | 1 - a | ≤ |1| - |a| = 1 - |a|, No es correcta.

(c) - | -3 | = - 3, correcta.

(d) - | 9 – 11| = - | - 2 | = - 2 ≠ 2, incorrecta.

❊ ❊ ❊ ✹ ✹ ❊ ✹ ✹ ❊ ❊ ❊

3 Halla dos puntos de la recta real que disten 4 del punto 2.

✰ ✰ ✰ ✾ ✾ ❁ ✾ ✾ ✰ ✰ ✰

El centro es 2 y los puntos son el 2 + 4 = 6 y el 2 – 4 = -2 , que son las soluciones de la ecuación en valor absoluto :

$$|x-2| = 4 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x-2=4 \Leftrightarrow x=6 \\ x-2=-4 \Leftrightarrow x=-2 \end{array} \right\}$$

❊ ❊ ❊ ✹ ✹ ❊ ✹ ✹ ❊ ❊ ❊

4 ¿Es cierto que d(a, - b) = d(- a, b) para todo par de números reales a y b?

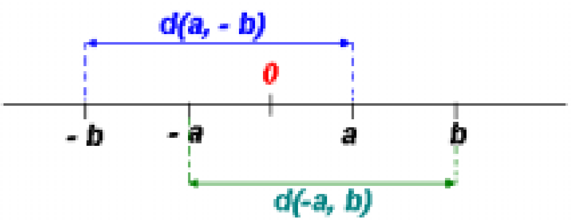
✰ ✰ ✰ ✾ ✾ ❁ ✾ ✾ ✰ ✰ ✰

Aplicando la definición :

d(a, - b) = | - b – a | = | - (a+ b) | = a + b

d(-a, b) = | b – (-a) | = | b+a | = b + a = a + b, luego sí es la misma.

Y gráficamente :



❊ ❊ ❊ ✹ ✹ ❊ ✹ ✹ ❊ ❊ ❊

5 Completa estos tríos, donde m denota el punto medio entre a y b:

(a) a= 1, b= 10, m= □

(b) a= -3, b=□ , m=3

(c) a= □, b= -2, m= -10

✰ ✰ ✰ ✾ ✾ ❁ ✾ ✾ ✰ ✰ ✰

(a) a = 1, b = 10 $\Rightarrow m = \frac{a+b}{2} = \frac{1+10}{2} = \frac{11}{2} = 5'5$

(b) a = - 3 , m = 3 $\Rightarrow b = 2m - a = 2\cdot 3 - (-3) = 6 + 3 = 9$

(c) b = -2, m = - 10, $\Rightarrow a = 2m - b = 2\cdot(-10) - (-2) = -20 + 2 = -18$.

❊ ❊ ❊ ✸ ✸ ❊ ✸ ✸ ❊ ❊ ❊

6 ¿Es irracional la raíz cuadrada de cualquier entero impar?

✰ ✰ ✰ ✾ ✾ ❁ ✾ ✾ ✰ ✰ ✰

No, por ejemplo el número 49 es impar y $\sqrt{49} = 7$, que no es irracional.

❊ ❊ ❊ ✸ ✸ ❊ ✸ ✸ ❊ ❊ ❊

7 ¿Cuáles de estas igualdades son correctas?

✰ ✰ ✰ ✾ ✾ ❁ ✾ ✾ ✰ ✰ ✰

(a) $\sqrt{32} = \sqrt{2^5} = \sqrt{2^4 2} = \sqrt{2^4}\sqrt{2} = 2^2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$, correcta.

(b) $3\sqrt{2} = \sqrt{3^2 2} = \sqrt{9\cdot 2} = \sqrt{18} \neq \sqrt{6}$, incorrecta.

(c) Incorrecta, pues la suma de raíces, no es igual a la raíz de una suma.

(d) $\sqrt{3}\sqrt{6} = \sqrt{18} \neq \sqrt{9} \Rightarrow$ Incorrecta.

(e) $\sqrt{2}\sqrt{5} = \sqrt{2\cdot 5} = \sqrt{10} \Rightarrow$ Correcta.

❊ ❊ ❊ ✸ ✸ ❊ ✸ ✸ ❊ ❊ ❊

8 Busca el gazapo en esta cadena de pasos: $x^2 + x - 5 = (4x - 16)/4 \rightarrow x^2 + x - 5 = x - 4 \rightarrow x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = 1$.

✰ ✰ ✰ ✾ ✾ ❁ ✾ ✾ ✰ ✰ ✰

El error reside en el último paso, pues si $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$, tiene dos soluciones.

❊ ❊ ❊ ✸ ✸ ❊ ✸ ✸ ❊ ❊ ❊

9 Utilizando cancelaciones, halla x sabiendo que 5x-18=2x+72.

✫ ✫ ✫ ✾ ✾ ❁ ✾ ✾ ✫ ✫ ✫

5x – 18 = 2x + 72 ,{ sumamos a ambos miembros 18 }; 5x – 18 + 18 = 2x + 72 + 18; 5x = 2x + 90, { sumamos – 2x a ambos miembros }, 5x – 2x = 2x + 90 – 2x ; 3x = 90, { multiplicamos ambos miembros por 1/3), 3x · (1/3) = 90 · (1/3) ; x = 30.

❉ ❉ ❉ ✹ ✹ ❈ ✹ ✹ ❉ ❉ ❉

10 Si a < b y c < d, ¿implica eso que ac < bd?

✫ ✫ ✫ ✾ ✾ ❁ ✾ ✾ ✫ ✫ ✫

Siempre que a, b, c y d sean positivos, si no es así, no se cumplirá.

❉ ❉ ❉ ✹ ✹ ❈ ✹ ✹ ❉ ❉ ❉

11 Decide si es cierta esta afirmación: Si a < 0 entonces $a^2 > 0$.

✫ ✫ ✫ ✾ ✾ ❁ ✾ ✾ ✫ ✫ ✫

El cuadrado de todo número distinto de cero es siempre positivo.

❉ ❉ ❉ ✹ ✹ ❈ ✹ ✹ ❉ ❉ ❉

12 Completa estas igualdades:

✫ ✫ ✫ ✾ ✾ ❁ ✾ ✾ ✫ ✫ ✫

(a) $\sqrt{160} - 4\sqrt{10} = \sqrt{4^2 10} - \sqrt{4^2 10} = 0$

(b) $\dfrac{2\sqrt{27}}{6\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3^3}}{6\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3^2 3}}{6\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3^2}\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} = \dfrac{2\cdot 3\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} = \dfrac{6\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} = 1$

(c) $\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right) = \left(\sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 = 2 - 3 = -1$

(d) $\left(\sqrt[4]{5}\right)^8 = \sqrt[4]{5^8} = 5^{\frac{8}{4}} = 5^2 = 25$

❉ ❉ ❉ ✹ ✹ ❈ ✹ ✹ ❉ ❉ ❉

13 Si n es un entero positivo, ¿es cierto que $5^n = \dfrac{1}{5^{-n}}$

✫ ✫ ✫ ✾ ✾ ❁ ✾ ✾ ✫ ✫ ✫

$$\frac{1}{5^{-n}} = \frac{5^0}{5^{-n}} = 5^{0-(-n)} = 5^n$$

14 Escribe en notación científica:

(a) 107'9 = 10'79 · 10 **(b)** 10 000 000 = 1'0 · 10^7 **(c)** 12'9008 = 1'29008 · 10

(d) 0'0000000002 = 2'0 · 10^{-10}

15 ¿Se puede comprar un televisor con

$$\frac{\left(3x10^8\right)x\left(4x10^5\right)x\left(6x10^{-4}\right)}{\left(9x10^{12}\right)x\left(8x10^{-6}\right)}=\frac{3x4x6x10^{8+5-4}}{9x8x10^{12-6}}=\frac{72x10^9}{72x10^6}=1x10^{9-6}=10^3=1000\text{ ptas.}$$

Aún no dan televisores (nuevos) por mil pesetas.

16 ¿Son correctas estas relaciones?

(a) $\frac{x}{x^4}=x^{1-4}=x^{-3}\Rightarrow$ Correcta.

(b) $xy^{-1}=\frac{x}{y}\neq\frac{1}{xy}\Rightarrow$ Incorrecta.

(c) $x^{-1}+y^{-1}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}\neq\frac{1}{x+y}\Rightarrow$ Incorrecta.

(d) $x^5x^{10}=x^{5+10}=x^{15}\neq x^{50}\Rightarrow$ Incorrecta.

17 ¿Es cierto en general que $\sqrt{x^2+y^2}=x+y$?

No es cierto, ya hemos dicho anteriormente que la raíz de una suma no es igual a la suma de las raíces.

18 Teclea en tu calculadora la operación 85^{12}. Interpreta el resultado que verás aparecer en su pantalla.

✰ ✰ ✰ ✾ ✾ ❁ ✾ ✾ ✰ ✰ ✰

$85^{12} = 1'422417571 \cdot 10^{23}$. Es una aproximación pues no se pueden presentar en pantalla todos los dígitos del resultado correcto, que es : **142 241 757 136 172 119 140 625.**

❉ ❉ ❉ ✹ ✹ ❉ ✹ ✹ ❉ ❉ ❉