❶❺ ¿Cuál de los puntos que solucionan el Problema resuelto 11 dista del eje x doble que del eje y?

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

Se trata de hallar los puntos de la recta r : x + y – 1 = 0, que distan del eje x el doble que del eje y, Sean el punto buscado P(a, b), tenemos dos incógnitas, necesitamos, pues, dos ecuaciones :

① Por pertenecer a la recta r ha de cumplir su ecuación, es decir: a + b – 1 = 0.

② Distancia (punto P a la recta y = 0, eje de abscisas,) = 2 distancia (P a recta x = 0, eje de ordenadas), es decir :

$$d(P, y=0) = 2\cdot d(P, x=0) \Leftrightarrow b = 2a$$

Resolvemos el sistema : sustituimos la segunda en la primera a + 2a – 1 = 0; 3a = 1; a = 1/3 y por tanto b = 2a = 2/3, luego el punto buscado es **P (1/3, 2/3).**

◈◈◈▣▣◎▣▣◈◈◈

❶❻ Halla el punto de la recta $2x-3y+2=0$ que esté más próximo al origen.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

El punto que está más próximo al origen de coordenadas P (0, 0), es el que intersecta con la perpendicular que pasa por el origen.

Las rectas perpendiculares a ***r*** :2x – 3y + 2 = 0, tienen por ecuación 3x + 2y + c = 0, y de ellas la que pasa por el origen es ***s*** : 3x + 2y = 0 (sin más que sustituir en la anterior x = 0 e y = 0, obtenemos c = 0). Resolvamos el sistema formado por ***r*** y ***s*** para hallar el punto buscado :

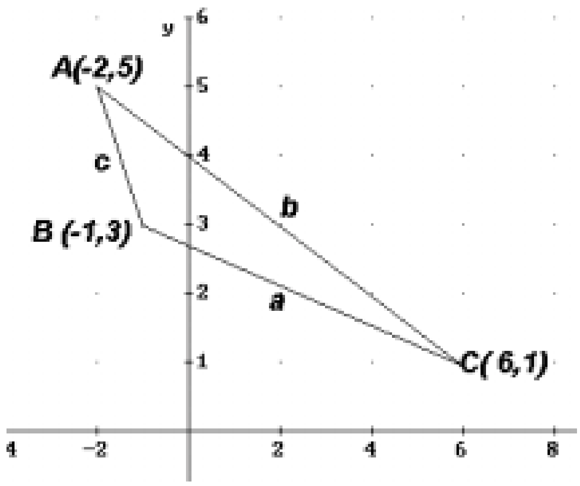
$$\left.\begin{array}{r}2x-3y+2=0\\ 3x+2y=0\end{array}\right\} \Rightarrow x=-\frac{2y}{3}, \text{sustituyendo en la 1ª}: -\frac{4y}{3}-3y+2=0 \Leftrightarrow -4y-9y=-6 \Leftrightarrow 13y=6 \Leftrightarrow y=\frac{6}{13}$$

$$\text{El valor de x es } x=-\frac{2y}{3}=-\frac{2\frac{6}{13}}{3}=-\frac{12}{39}=-\frac{4}{13}, \text{luego el punto es } P\left(-\frac{4}{13},\frac{6}{13}\right)$$

◈◈◈▣▣◎▣▣◈◈◈

❶❼ El triángulo de vértices A(- 2, 5), B(-1, 3) y C(6, 1), ¿es rectángulo, acutángulo u obtusángulo? Calcula su área por la fórmula de Herón.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧



Vamos a calcular las longitudes de los lados :

◈ Lado a = d(B, C)

$$a = d(B,C) = \sqrt{(x_c - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(6-(-1))^2 + (1-3)^2} = \sqrt{7^2 + (-2)^2} = \sqrt{49+4} = \sqrt{53}$$

◈ Lado b = d(A, C)

$$b = d(A,C) = \sqrt{(x_c - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(6-(-2))^2 + (1-5)^2} = \sqrt{8^2 + (-4)^2} = \sqrt{64+16} = \sqrt{80}$$

◈ Lado c = d(B, A)

$$c = d(B,A) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(-2-(-1))^2 + (5-3)^2} = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

El lado mayor es b, será un triángulo *rectángulo* si $b^2 = a^2 + c^2$, *acutángulo* si $b^2 < a^2 + c^2$ y *obtusángulo* si $b^2 > a^2 + c^2$. Veamos, como 80 > 53 + 5 = 58, es *obtusángulo*.

Calculo del área :

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \left\{ \begin{array}{c} a = \sqrt{53} \approx 7'28 \\ b = \sqrt{80} \approx 8'944 \\ c = \sqrt{5} \approx 2'236 \\ s = \dfrac{a+b+c}{2} = \dfrac{7'28 + 8'944 + 2'236}{2} = 9'23 \end{array} \right\} = \sqrt{9'23(9'23-7'28)(9'23-8'944)(9'23-2'236)} = 6$$

◈◈◈▣▣◎▣▣◈◈◈

❶❽ Sea la recta r: y = - 0,25x + 3 ¿Hay algún valor de k tal que la recta r': y = k x + k sea paralela a r? ¿Y para que sea perpendicular?

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

r : y = -0’25x + 3
r’ : y = kx + k

☉ Paralelas

Para que dos rectas sean paralelas han de tener la misma pendiente, luego k = -0’25

☉ Perpendiculares

Para que dos rectas **r** : y = mx + n , **s** : y = m’x + n’, sean perpendiculares ha de cumplirse que m · m’ = -1, es decir –0’25 · k = -1, luego k = -1/-0’25 = 4.

1 9 Escribe la ecuación de la recta que pasa por los puntos (2, 5) y (- 3, 0).

A(2, 5)
B(-3, 0)

La ecuación de la recta que pasa por dos puntos es :

$$\frac{y-y_A}{x-x_A}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}\xrightarrow{\text{sustituyendo}}\frac{y-3}{x-2}=\frac{0-3}{-3-2}\Leftrightarrow y-3=\frac{3}{5}(x-2)\Leftrightarrow 5y-15=3x-6\Leftrightarrow 3x-5y+9=0$$

2 0 Calcula la distancia del punto (1, 1) a la recta cuya ecuación general es 4x - 2y - 7 = 0.

P(1, 1)
r : 4x - 2y – 7 = 0

Aplicamos la ecuación de la distancia de un punto P(x_1, y_1) a la recta **r** : AX+By+C = 0 :

$$d(P,r)=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|4\cdot 1-2\cdot 1-7|}{\sqrt{4^2+(-2)^2}}=\frac{5}{\sqrt{20}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

2 1 (a) ¿Cuáles de estas rectas son paralelas?

r_1 :2x-y+11=0 r_2: -3x+2y=0 r_3: -6x+3y=0

(b) Calcula la distancia entre esas dos rectas paralelas.

(a) Dadas dos rectas r : Ax + By + C , s : A'x+ B'y + C' = 0, la condición de paralelismo es :

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$$

Estudiemos que parejas lo cumplen :

◈ r_1 y r_2

$$\frac{2}{-3} \neq \frac{-1}{2} \Rightarrow r_1 \text{ y } r_2 \text{ no son paralelas}$$

◈ r_1 y r_3

$$\frac{2}{-6} = \frac{-1}{3} \Rightarrow r_1 \text{ y } r_3 \text{ son paralelas}$$

◈ r_2 y r_3

$$\frac{-3}{-6} \neq \frac{2}{3} \Rightarrow r_2 \text{ y } r_3 \text{ no son paralelas}$$

(b) Para hallar la distancia entre dos rectas paralelas, se busca un punto de una de ellas y se halla la distancia de ese punto a la otro recta paralela.

Un punto de r_3 es x = 0 e y = 0, es decir P(0, 0).

Ahora hallamos la distancia del punto P a la recta r_1 :

$$d(P,r_1) = \frac{|2\cdot 0 - 0 + 11|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{11}{\sqrt{5}} = \frac{11\sqrt{5}}{5} \approx 4'92$$

◈◈◈▣▣◎▣▣◈◈◈

❷❷ Dada la recta r de ecuación y = 0,5x - 2:

(a) Escribe la ecuación de la recta perpendicular a r que pasa por el origen.

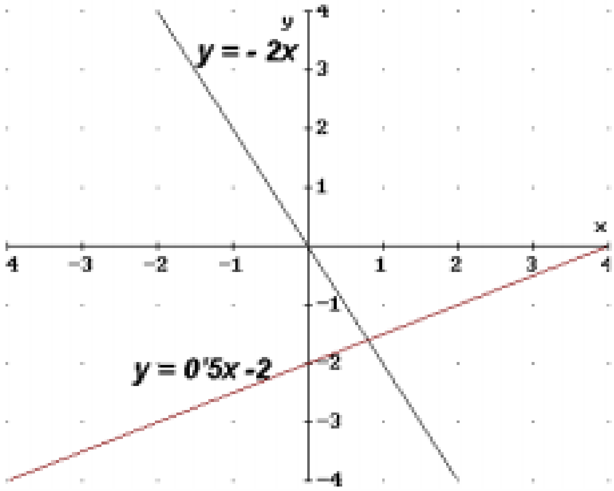
(b) Determina cuál de los puntos de la recta r está más próximo al punto (0, 0).

(c) Calcula la distancia a la que se encuentra el punto (0, 0) de la recta r.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

r : y = 0'5x – 2

(a) La recta **s**, perpendicular a **r**, tiene de pendiente m = - 1/0'5 = - 2, luego su ecuación explícita será **s** : y = -2x + n, hallamos n sustituyendo un punto de la recta, el origen (0, 0), 0 = 0 + n, luego n = 0 y por tanto la ecuación buscada es **s** : y = - 2x.



(b) El punto buscado será el punto de intersección de ambas rectas, para hallarlo resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de las dos rectas :

$$\left.\begin{array}{r} y = 0'5x - 2 \\ y = -2x \end{array}\right\} \Rightarrow 0'5x - 2 = -2x \Leftrightarrow 2'5x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{2'5} = \frac{4}{5} \Rightarrow y = -2x = -\frac{8}{5}; P\left(\frac{4}{5}, -\frac{8}{5}\right)$$

(c) La distancia del punto P (0, 0) a la recta **r** : y – 0'5x + 2 = 0, es

$$d(P,r) = \frac{|0 - 0 + 2|}{\sqrt{1 + 0'25}} = \frac{2}{\sqrt{1'25}} \approx 1'79$$

◈◈◈▣▣◎▣▣◈◈◈

❷❸ Una hormiga, situada en el punto de coordenadas (2, - 4), se dirige hacia una acequia cuyo trazado recto viene dado por la ecuación $3x - 4y + 6 = 0$ ¿Cuál es la distancia que deberá recorrer si elige el camino más corto?

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

P(2, -4)
r : 3x – 4y + 6 = 0

El camino más corto será la distancia de P a r :

$$d(P,r) = \frac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot (-4) + 6|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{6 + 16 + 6}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{28}{5}$$

◈◈◈▣▣◎▣▣◈◈◈

❷❹ Halla las coordenadas del punto medio del segmento cuyos extremos son los puntos A(0, 7), B(- 2, - 3).

Las coordenadas del punto medio(M) del segmento son :

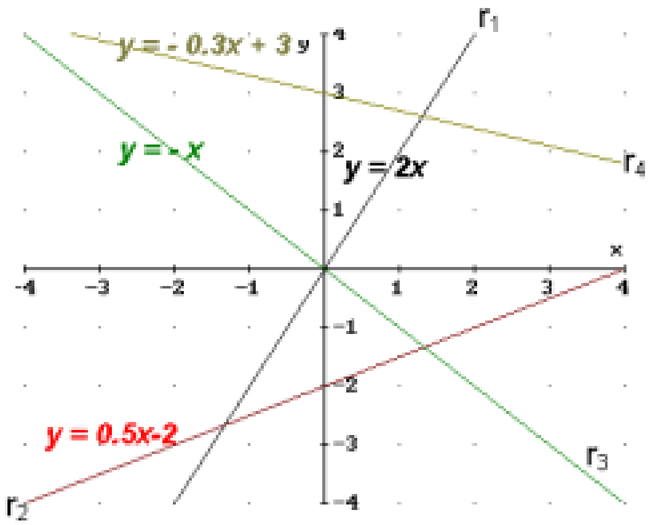
$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{0-2}{2} = 1; y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{7-3}{2} = 2 \Rightarrow M(1, 2)$$

AUTOEVALUACIÓN (📖 ❺❼)

❶ Asocia a cada ecuación su gráfica correspondiente:

(a) y = 2x (b) y = - x (c) y = 0,5x - 2 (d) 0,3x + 3

Para emparejar cada gráfica con su ecuación nos fijaremos en la pendiente y en la ordenada en el origen :



(a) y = 2x, pendiente positiva y pasa por el origen luego es la recta $\mathbf{r_1}$.

(b) y = -x, pendiente negativa y pasa por el origen luego es la recta $\mathbf{r_3}$.

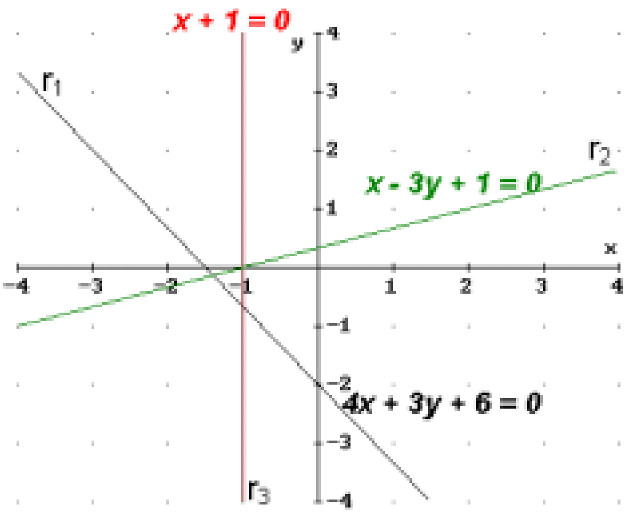
(c) Pendiente positiva y pasa por el (0, -2) luego es la recta $\mathbf{r_2}$.

(d) Tiene por ordenada en el origen el valor 3 luego es la recta $\mathbf{r_4}$.

❷ Identifica en la figura las rectas:

(a) $x-3y+1=0$
(b) $x + 1 = 0$
(c) $4x+3y+6=0$

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧



(a) Hallemos los puntos de corte con los ejes : Para x = 0 y = 1/3, pasa por el punto A (0, 1/3), para y = 0, x = -1, luego pasa también por el punto B(-1, 0) por tanto es la recta $\mathbf{r_2}$.

(b) No hay duda posible es la recta vertical x = -1, la $\mathbf{r_3}$.

(c) Hallando los puntos de corte con los ejes : para x = 0 , y = -2, el punto A (0, -2) y para y = 0, x = -3/2, que es el punto B(-3/2, 0), luego es la recta $\mathbf{r_1}$.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❸ Una compañía de seguros contrata agentes para realizar visitas a domicilio por 50.000 pesetas fijas al mes, más una cantidad adicional de 2.500 ptas. por cada póliza contratada. Escribe una ecuación que exprese el salario mensual S (en miles de pesetas) en función del número x de pólizas contratadas en el mes.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

S(x) = 50 + 2'5x en miles de pts / mes.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❹ ¿Cuántas ecuaciones generales distintas tiene una recta? ;Y ecuaciones altura-pendiente?

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

La ecuación de la recta en forma *general* es Ax + By + C = 0, que puede haber infinitas :

$kAx + kBy + kC = 0$ siendo $k \in \Re$.

La ecuación *altura - pendiente* es :

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \text{ que puede también escribirse : } y = -\frac{kA}{kB}x - \frac{kC}{kB}; k \in \Re$$

Una sola.

❺ Escribe una ecuación de la recta:

(a) Que pasa por (0, 0) y es paralela a la recta $y = -2x + 1$.

(b) Que pasa por (-1, 4) y es perpendicular a la recta $5x + 4y = 0$.

(c) Que pasa por (0, 0) y es perpendicular a la recta $x/3 – y/5 = 1$.

(a) **P**(0, 0) **r** : y = -2x + 1

Las rectas paralelas a r tendrán la misma pendiente y = - 2x + c y de todas ellas la que pasa por el punto P cumple 0 = c, luego es **y = - 2x** .

(b) **P** (-1, 4), **r** : 5x + 4y = 0.

Una recta perpendicular a otra dada tiene los coeficientes de la x e y intercambiados y con un signo opuesto, luego las rectas perpendiculares a r tendrán de ecuación 4x – 5y + C = 0, como ha de pasar por el punto P, sustituyendo calculamos el valor de C : 4 (-1) – 5 · 4 + C = 0, luego –24 + C = 0, es decir C = 24 y la ecuación pedida es **4x – 5y + 24 = 0**.

(c) **P** (0, 0) , **r** : x /3 – y/5 = 1.

Las ecuaciones de las rectas perpendiculares a r son de la forma 3x + 5y + C = 0, luego al sustituir el punto P se deduce que C = 0 y por tanto la ecuación pedida es **3x + 5y = 0**.

❻ Los lados de un triángulo miden 11 m, 13 m y 16 m. ¿Cuál es su área?

a = 11m, b = 13 m y c = 16 m

Aplicamos la fórmula de Herón.

$$s=\frac{a+b+c}{2}=\frac{11+13+16}{2}=20m \Rightarrow A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{20(20-11)(20-13)(20-16)}\approx 71m$$

❼ Calcula las longitudes de los lados y el área del triángulo de vértices A(0, 3), B(2, 2) y C(4, - 3).

Vértices : A(0, 3), B(2, 2) y C(4, -3).

Vamos a calcular las longitudes de los lados :

- Lado a = d(B, C)

$$a=d(B,C)=\sqrt{(x_c-x_B)^2+(y_C-y_B)^2}=\sqrt{(4-2)^2+(-3-2)^2}=\sqrt{2^2+(-5)^2}=\sqrt{4+25}=\sqrt{29}$$

- Lado b = d(A, C)

$$b=d(A,C)=\sqrt{(x_c-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}=\sqrt{(4-0)^2+(-3-3)^2}=\sqrt{4^2+(-6)^2}=\sqrt{36+16}=\sqrt{52}$$

- Lado c = d(B, A)

$$c=d(B,A)=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}=\sqrt{(0-2)^2+(3-2)^2}=\sqrt{(-2)^2+1^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$$

$$A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\left\{\begin{array}{c} a=\sqrt{29}\approx 5'385 \\ b=\sqrt{52}\approx 7'211 \\ c=\sqrt{5}\approx 2'236 \\ s=\frac{a+b+c}{2}=\frac{5'385+7'211+2'236}{2}=7'42 \end{array}\right\}=\sqrt{7'42(7'42-5'385)(7'42-7'211)(7'42-2'236)}=4'04$$

❽ ¿Qué ángulo forman las rectas r: y = 4x - 2 y r' : 2x-4y+1=0?

r : y = 4x – 3 ⇒ m = 4
r’ : 2x - 4y + 1 =0 ⇒ y = x/2 + 1/4 ⇒ m’ = 1/2

Aplicamos la fórmula del ángulo entre dos rectas :

$$tg\,\gamma=\frac{m'-m}{1+m\cdot m'}=\frac{4-\frac{1}{2}}{1+\frac{4}{2}}=\frac{\frac{7}{2}}{\frac{6}{2}}=\frac{7}{6}\Rightarrow \gamma=arctg\frac{7}{6}=49^o23'5''$$

❾ Determina valores de las constantes k y k' tales que las rectas kx + 6y - 1 = 0 y x + 2y + k'= 0:

(a) Sean coincidentes.

(b) Sean paralelas.

(c) Se corten en el punto (8, - 2,5).

r : kx + 6y –1 = 0
s : x + 2y + k' = 0

(a) Para que sean coincidentes :

$$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}\Rightarrow\frac{k}{1}=\frac{6}{2}=\frac{-1}{k'}\Rightarrow\begin{cases}\frac{k}{1}=3\Leftrightarrow k=3\\ \frac{-1}{k'}=3\Leftrightarrow k'=-\frac{1}{3}\end{cases}$$

(b) Para que dos rectas sean paralelas han de cumplir :

$$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}\neq\frac{C}{C'}\Rightarrow\frac{k}{1}=\frac{6}{2}\neq\frac{-1}{k'}\Rightarrow\begin{cases}\frac{k}{1}=3\Leftrightarrow k=3\\ \frac{-1}{k'}\neq 3\Leftrightarrow k'\neq-\frac{1}{3}\end{cases}$$

(c) Para que se corten en el punto P (8, -2'5), sustituimos el punto en ambas rectas y despejamos los valores de k y k', pues ha de ser el punto común, solución del sistema formado por ambas :

8k + 6 · (-2'5) – 1 = 0 ; 8k – 15 – 1 = 0 ; 8k = 16 k = 2.

8 + 2 · (-2'5) + k' = 0; 8 – 5 + k' = 0; k' = -3.

❿ Calcula la distancia:

(a) Entre los puntos (3, 10) y (-1, 5).
(b) Del punto (5, - 7) a la siguiente recta y – 2 =(7/8) (x + 6).
(c) Entre las rectas x + 3y - 14 = 0 e y = -1/ 3 x+2.

(a) A(3, 10) B(-1,5). En vez de aplicar la fórmula vamos a hallar el módulo del vector v = AB = B – A = (-1, 5) – (3, 10) = (-4, -5) :

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-4)^2 + (-5)^2} = \sqrt{16+25} = \sqrt{41} \approx 6'403$$

(b) Distancia del punto P (5, -7) a la recta r : $y - 2 = \frac{7}{8}(x+6) \Leftrightarrow 7x - 8y + 58 = 0$:

$$d(P,r) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|7 \cdot 5 - 8 \cdot (-7) + 58|}{\sqrt{7^2 + (-8)^2}} = \frac{149}{\sqrt{113}} \approx 14'02$$

(c) **r** : x + 3y – 14 = 0, **s** : y = -x/3 + 2.

Comprobemos primero que son paralelas (pues si no la distancia es cero, ya que se cortan o son coincidentes), pasamos r a forma explícita y = -x/3 + 14/3, luego sí son paralelas pues tienen la misma pendiente m = -1/3.

Hallemos un punto de una de ellas, de **s** por ejemplo : para x = 0, y = 2, luego tenemos el punto P(0, 2) y la recta r y aplicamos la fórmula de la distancia de un punto a una recta :

$$d(P,r) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|1 \cdot 0 + 3\,2 - 14|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{8}{\sqrt{10}} \approx 2'53$$

◈◈◈◙◙◎◙◙◈◈◈

❶❶ Dadas las rectas 4x - ky = 0 y x + 3y - 2 = 0, determina el valor de k:

(a) Para que sean perpendiculares.
(b) Para que sean paralelas.

Halla el punto de intersección en el primer caso, y la distancia entre las rectas, en el segundo.

✧✧✧⌖⌖✧⌖⌖✧✧✧

r : 4x – ky = 0
s : x + 3y – 2 = 0

(a) La condición de perpendicularidad de dos rectas **r** : Ax + By + C = 0 y **s** : A'x + B'y + C' = 0 es A · A' + B · B' = 0 , en nuestro caso 4 · 1 + (- k) · 3 = 0, - 3k = - 4 luego k = 4/3

(b) La condición de paralelismo es :

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'} \Rightarrow \frac{4}{1} = \frac{-k}{3} \Leftrightarrow k = -12$$

◈ Punto de corte entre r : 3x – y = 0 y s : x + 3y – 2 = 0.

Resolvemos el sistema :

$$\left.\begin{array}{r} 3x - y = 0 \\ x + 3y - 2 = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{despejamos y de la 1ª}} y = 3x \xrightarrow{\text{sustituimos en la 2ª}} x + 9x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} \Rightarrow y = \frac{3}{5}$$

El punto de intersección es (1/5, 3/5).

◈Distancia entre **r** : 3x + 12 y = 0 = x +3y =0 y **s** : x + 3y – 2 = 0.

Hallamos un punto de r, el P(0, 0) y después la distancia de P a s:

$$d(P,s) = \frac{|0 + 3\cdot 0 - 2|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{5} \approx 0'63$$

◈◈◈▣▣◎▣▣◈◈◈

❶❷ Sea la recta r: y = 0,5x + 2:

(a) Halla la recta r' perpendicular a r que pasa por el origen.
(b) Determina el punto P en que se cortan r y r'.
(c) Calcula la distancia de P al origen.
(d) ¿Es P el punto de r que más cerca está del origen?

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

(a) **r** : y = 0'5x + 2, O (0, 0).

La rectas perpendiculares a **r** tiene de pendiente - 1/0'5 = -2, o sea de la forma y = -2x + c, como la que buscamos ha de pasar por el punto O, sustituyendo queda que c = 0 y por tanto la recta **r' : y = -2x**.

(b) el punto de corte entre **r** : y = 0'5x + 2 y **r'** : y = -2x, lo obtenemos resolviendo el sistema formada por ambas :

Igualamos ambas ecuaciones , 0'5x + 2 = -2x, 2'5x = - 2 , x = -2/2'5 = -4/5 , y = 8/5, luego el punto de corte es P (-4/5, 8/5)

(c) Distancia del punto O al P :

$$d(O,P) = \sqrt{(x_P - x_O)^2 + (y_P - y_O)^2} = \sqrt{\left(-\frac{4}{5} - 0\right)^2 + \left(\frac{8}{5} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{64}{25}} = \sqrt{\frac{80}{25}} = \frac{4}{5}\sqrt{5} \approx 1'789$$

(d) Como el punto P es la intersección de **r** con su perpendicular que pasa por el origen, sí es el que más cerca está del origen.

◈◈◈▣▣◎▣▣◈◈◈