RESUELVE TÚ (📖 ❺❹)

¿ Y si el avión despegase con un ángulo de inclinación de 3º ?.

✧✧✧⌗⌗⌖⌗⌗✧✧✧

$$tg3^{o} = \frac{h}{d} \Rightarrow h = d \cdot tg3^{o} = 1000 \cdot 0'0524 = 52'4 \text{ m}$$

Sí choca con un edificio de 57 m, pues a los 1000 m habría alcanzado una altura de 52'4 m.

◈◈◈▣▣◎▣▣◈◈◈

RESUELVE TÚ (📖 ❺❼)

La presión en la superficie del mar es de 1 atm. El descenso más profundo en un océano lo efectuó el batiscafo Triestre en 1960, bajando a 10 916 m de profundidad. Registró allí una presión de 1.837 atm. Suponiendo que la presión P dependiese linealmente de la profundidad h:

(a) Halla una ecuación lineal P = mh + b que exprese P en términos de h.

(b) ¿ A qué profundidad podrá descender un batiscafo que tolera 1.600 atm de presión ?.

✧✧✧⌗⌗⌖⌗⌗✧✧✧

(a) P(0) = 1, P(10 916) = 1837, sustituyendo en la ecuación :

$$\left.\begin{cases} 1 = b \\ 1837 = 10916m + b \end{cases}\right\} \Rightarrow m = \frac{1837-1}{10916} = 0'1682$$

La ecuación es pues P(h) = 0'1682h +1 (atm).

(b) $1600 = 0'1682 \cdot h + 1 \Rightarrow h = \frac{1600-1}{0'1682} = 9507 \text{ m}$

◈◈◈▣▣◎▣▣◈◈◈

RESUELVE TÚ (📖 ❻⓿)

Halla la recta paralela a 4x – 3y – 5 =0 que pase por el punto (3, 1).

✧✧✧⌗⌗⌖⌗⌗✧✧✧

Al ser paralela tiene la msima pendiente pero disntinta ordenada en el origen, es de la forma 4x – 3y + C = 0, sustituyendo el punto dado 4·3 - 3·1 + C = 0 y despejando C = -12 +3 = -9, queda la ecuación pedida : **4x – 3y – 9 = 0**.

◈◈◈▣▣◎▣▣◈◈◈

RESUELVE TÚ (📖 ❻❸)

Ídem para el triángulo de vértices A (3,4), B (0, -2) y C(4, 0)

✧✧✧⌗⌗⌖⌗⌗✧✧✧

(a) Hallemos las longitudes de los tres lados mediante la distancia entre dos puntos :

$$a = d(B,C) = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(4-0)^2 + (0+2)^2} = 2\sqrt{5}$$

$$b = d(A,C) = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(4-3)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{17}$$

$$c = d(B,A) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(3-0)^2 + (4+2)^2} = 3\sqrt{5}$$

Como la medida de los lados es distinta, **no es isósceles** es escaleno.

(b) El lado mayor es c y $c^2 = 45$, como $a^2 + b^2 = 20 + 17 = 37 < 45 = c^2$ es **obtusángulo** .

(c) El área la calculamos por la fórmula de Herón :

$$\text{Semiperímetro} = s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{2\sqrt{5}+\sqrt{17}+3\sqrt{5}}{2} = 7'65$$

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{7'65(7'65-4'47)(7'65-4'12)(7'65-6'71)} = \sqrt{80'75} = 8'99$$

◈◈◈▣▣◎▣▣◈◈◈

RESUELVE TÚ (📖 ❻❹)

Realiza el mismo ejercicio con el punto P (2, 5) y la recta r : $2x - y + 7 = 0$

✧✧✧⌗⌗⌖⌗⌗✧✧✧

(a) Mediante la fórmula de d(P,r) :

$$d(P,r) = \frac{|Ax_P + By_P + C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|2\cdot 2 - 5 + 7|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6}{5}\sqrt{5}$$

(b) Sin la fórmula, los pasos son :

- Hallar la ecuación de la recta perpendicular a r que pase por P :

  Todas las perpendiculares r tiene por ecuación $x + 2y + k = 0$.
  La que pasa por P (2, 5) tiene $2 + 2\cdot 5 + k = 0$, $k = -12$, es decir p : $x + 2y - 12 = 0$

- Hallar el punto de corte de las rectas r y p, resolviendo el sistema :

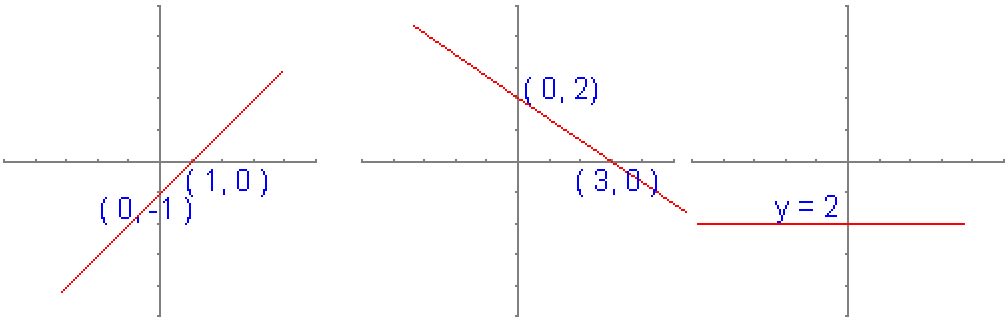
$$\left.\begin{cases} 2x - y + 7 = 0 \\ x + 2y - 12 = 0 \end{cases}\right\} \begin{matrix} \xrightarrow{2} \\ \longrightarrow \end{matrix} \left.\begin{cases} 4x - 2y + 14 = 0 \\ x + 2y - 12 = 0 \\ 5x + 2 = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow x = -\frac{2}{5} \Rightarrow y = 2\cdot(-\frac{2}{5}) + 7 = \frac{31}{5} \Rightarrow Q\left(-\frac{2}{5}, \frac{31}{5}\right)$$

- Hallar la distancia entre los dos puntos P y Q :

$$d(p,Q)=\sqrt{\left(2+\frac{2}{5}\right)^2+\left(5-\frac{31}{5}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^2+\left(-\frac{6}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{180}{25}}=\sqrt{\frac{36}{5}}=\frac{6}{\sqrt{5}}=\frac{6}{5}\sqrt{5}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS (❻❽)

❶ Determina la pendiente y las ecuaciones de las siguientes rectas:



(a) $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{0-(-1)}{1-0}=1\xrightarrow{\text{Punto pendiente}}y-y_1=m(x-x_1)\Rightarrow y+1=x\Leftrightarrow x-y-1=0$

(b) $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{2-0}{0-3}=-\frac{2}{3}\xrightarrow{\text{Punto pendiente}}y-y_1=m(x-x_1)\Rightarrow y=-\frac{2}{3}(x-3)\Leftrightarrow 2x+3y-6=0$

(c) $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{2-2}{k}=0\xrightarrow{\text{Punto pendiente}}y-y_1=m(x-x_1)\Rightarrow y-2=0$

❷ Halla el punto de intersección de las rectas

$$2x\text{-}5y\text{-}5=0 \text{ y } 4x+y+3=0.$$

El punto de intersección , en caso de haberlo, será el común a ambas rectas, luego habrá que resolver el sistema formado por las ecuaciones que las definen :

$$\left.\begin{matrix}2x-5y-5=0\\4x+y-5=0\end{matrix}\right\}\begin{matrix}\longrightarrow\\\xrightarrow{5}\end{matrix}\left.\begin{matrix}2x-5y-5=0\\20x+5y-25=0\\\hline 22x-30=0\end{matrix}\right\};x=\frac{30}{22}=\frac{15}{11}\xrightarrow{\text{De la 2ª}}y=5-4x=5-4\frac{15}{11}=\frac{55-60}{11}=\frac{-5}{11}$$

❸ Escribe las ecuaciones altura-pendiente y punto-pendiente de las rectas:

(a) $-3x+y+12=0$
(b) $x-3=0$
(c) $y+2=0$
(d) $x+4y=0$

Hallamos un punto de cada recta :

a $-3x + y + 12 = 0$, $x = 0 \Rightarrow y = -12 \Rightarrow (0, -12)$.

- **Altura pendiente**($y = mx + n$) : Despejamos y, **$y = 3x - 12$**, pendiente $m = 3$.
- **Punto pendiente** [$(y - y_1) = m(x-x_1)$] : **$y + 12 = 3(x - 0)$**.

b $x - 3 = 0$, $x = 3$, $y = k \Rightarrow (3, k)$.

- **Altura pendiente**($y = mx + n$) : Despejamos y, **$y = k$**, pendiente $m = \infty$.
- **Punto pendiente** [$(y - y_1) = m(x-x_1)$] : **$y - k = 0$**.

c $y + 2 = 0$, $y = -2$, $x = k \Rightarrow (k, -2)$.

- **Altura pendiente**($y = mx + n$) : Despejamos y, **$y = -2$**, pendiente $m = 0$.
- **Punto pendiente** [$(y - y_1) = m(x-x_1)$] : **$y + 2 = 0(x - k)$**.

d $x + 4y = 0$, $x = 0$, $y = 0$, $\Rightarrow (0, 0)$.

- **Altura pendiente**($y = mx +n$) : Despejamos y, **$y = (-1/4)x$** , pendiente $m=(-1/4)$.
- **Punto pendiente** [$(y - y_1) = m(x-x_1)$] : **$y + 0 = (-1/4)(x - 0)$**.

❹ Una pizzería paga a los motoristas que reparten a domicilio un fijo de 25.000 ptas. al mes más 100 ptas. por cada pizza repartida. Escribe una ecuación que exprese el salario mensual S (en miles de pesetas) en términos de la cantidad de pizzas repartidas durante el mes.

x = número de pizzas.

Salario mensual = S (x) = 0'1x + 25 (miles de pts)

❺

(a) Dibuja la gráfica de la distancia recorrida por un móvil que lleva una velocidad constante de 30 m/s y viaja en línea recta (movimiento rectilíneo uniforme).

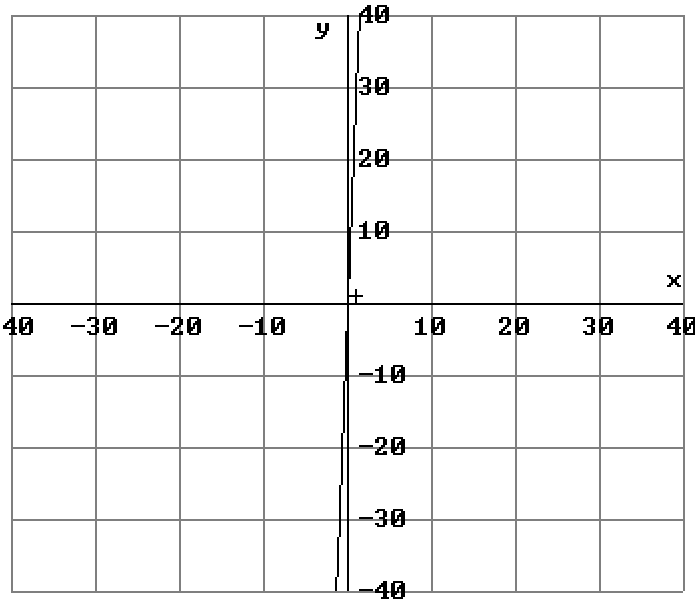
(b) Expresa en una ecuación la distancia recorrida en función del tiempo transcurrido.

(c) Dibuja una gráfica como la del apartado (a) para un móvil con velocidad constante de 40 m/s.

(d) ¿Tiene algo que ver la pendiente de la recta con la velocidad del móvil?

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

a $v = e/t \Rightarrow e = v \cdot t$; $e(t) = 30t$, la representación :



b $e(t) = 30t$.

c Es la velocidad del móvil.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❻ Una ley de Gay-Lussac establece que al calentar un gas, a volumen constante y lejos de su punto de licuación, la relación entre su presión P y su temperatura T (en °C) es lineal:

$$P = P_0\left(\frac{T}{273} + 1\right)$$

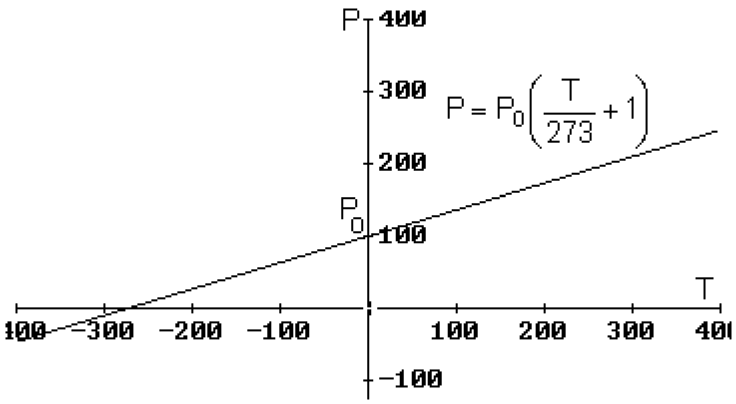
Aquí, Po es la presión del gas a 0 °C.

(a) Dibuja la gráfica de P en función de T, tomando Po = 100.

(b) Halla la pendiente de la recta y su ordenada en el origen.

(c) ¿Qué ocurre con la presión de un gas a la temperatura de - 273 °C, que se conoce como cero absoluto de temperatura?

a



b $P = 100\left(\frac{T}{273}+1\right) = \frac{100}{273}T + 100 \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \text{Pendiente} = m = \frac{100}{273} \\ \text{Ordenada en el origen} = n = 100 \end{array}\right\}$

c $P = P_0\left(\frac{-273}{273}+1\right) = 0$, la presión sería nula.

❼ Halla el ángulo que forman las rectas r: y=3x+2 y r': y=x-5.

Las pemdientes son $m_1 = 3$, y $m_2 = 1$, luego :

$$tg\gamma = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} = \frac{3-1}{1+3\cdot 2} = \frac{2}{7} \Rightarrow \gamma = arctg\frac{2}{7} = 15^o\ 56'\ 43''$$

❽ ¿Cuáles de estas ecuaciones generales representan la misma recta?

(a) 12x+30y-24=0
(b) - 6x + 15y - 12 = 0
(c) 4x+l5y-8=0
(d) -2x-5y+4=0

a 12x + 30y – 24 = 0 , dividiendo por 6 , 2x + 5y – 4 = 0

b –6x + 15y – 12 = 0, dividiendo por – 3, 2x – 5y + 4 = 0 c 4x + 15y – 8 = 0.

d -2x + 5y + 4 = 0, cambiando de signo, 2x + 5y – 4 = 0

La a y la d.

❾ Discute la posición relativa de las rectas

$$y = -3x + 4 \text{ y } 12x + 4y = 0.$$

Pasamos las dos rectas a forma general : $r_1 \equiv 3x + y - 4 = 0$, $r_2 \equiv 12x + 4y = 0$.

Se cumple : $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'} \rightarrow \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \neq \frac{-4}{0}$, luego son paralelas.

❿ En el Problema resuelto 11:

(a) Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B.

(b) Comprueba que la recta x + y - 1 = 0 pasa por el punto medio del segmento AB de extremos A y B, y es perpendicular a r. (Se llama la recta mediatriz del segmento AB.)

a A(3, 1) y B(0, -2) , $\frac{y - y_A}{x - x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow \frac{y-1}{x-3} = \frac{-2-1}{0-3} = 1 \Rightarrow y - 1 = x - 3 \Leftrightarrow x - y - 2 = 0$

b

1 Hallemos las coordenadas del punto medio M (x_M, y_M) del segmento AB :

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3+0}{2} = \frac{3}{2};\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1-2}{2} = -\frac{1}{2}$$

2 Comprobamos que la recta x + y – 1 = 0 pasa por M, sustituyendo el punto :

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{2} - 1 = \frac{2}{2} - 1 = 1 - 1 = 0 \Rightarrow \text{Sí lo cumple, luego pasa por el punto M}$$

3 Comprobamos la condición de ⊥: A ·A’ + B · B’ = 0, 1·1+(-1)·1 = 0, luego son ⊥.

❶❶ Encuentra la ecuación de la recta mediatriz del segmento cuyos extremos son los puntos A(9, 0) y B(5, -2).

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

❇ Hallamos el punto medio M del segemento AB :

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{9+5}{2} = 7;\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{0-2}{2} = -1 \Rightarrow M(7,-1)$$

❇ La mediatriz pasa por el punto M y es perpendicular a AB, luego vamos a calcular las pendientes de AB(m_{AB}) y de su perpendicular ($m_{mediatriz}$) :

$$m_{\overline{AB}} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2-0}{5-9} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow m_{mediatriz} = -\frac{1}{m_{\overline{AB}}} = -\frac{1}{1/2} = -2$$

❇ Por último hallamos la ecuación de la meditriz usando la ecuación punto(M)-pendiente($m_{mediatriz}$) :

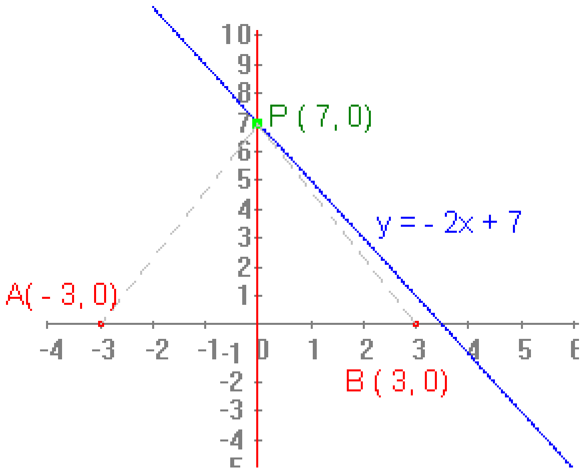
$$y - y_M = m_{mediatriz}(x - x_M) \Rightarrow y-(-1) = -2(x-7) \Leftrightarrow y+1 = -2x+14 \Leftrightarrow 2x+y-13=0$$

◈◈◈▣▣◎▣▣◈◈◈

❶❷ Halla el punto P de la recta y = - 2x + 7 que equidista de A(- 3, 0) y B(3, 0). (Intenta resolverlo con un dibujo, sin hacer cálculos.)

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

Trazamos la recta de ecuación y = -2x + 7 y la mediatriz del segmento AB, que es el eje vertical x = 0, y, donde se corten ambas será el punto pedido:



◈◈◈▣▣◎▣▣◈◈◈

❶❸ Encuentra valores de k y k' de modo que las rectas

$$kx+6y-1=0 \text{ y } x+2y+k'=0$$

cumplan las siguientes condiciones:
(a) Sean coincidentes.
(b) Sean paralelas.
(c) Se corten en un punto.
¿En qué punto se cortan en el apartado (c)?

a Para que sean coincidentes se ha de cumplir :

$$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'} \Rightarrow \frac{k}{1}=\frac{6}{2}=\frac{-1}{k'} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{k}{1}=\frac{6}{2}=3 \Rightarrow k=3 \\ \frac{-1}{k'}=3 \Rightarrow k'=-\frac{1}{3} \end{array}\right\}$$

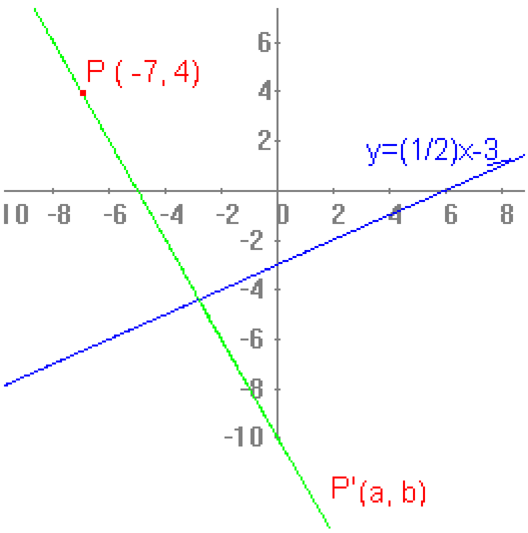
b Para que sean paralelas k ha de tener el mismo valor paro k' ≠ –1/3

c Para que se corten en un punto k ≠ 3 y k' cualquiera.

Para saber el punto de corte resolvemos el sistema :

$$\left.\begin{array}{r} kx+6y-1=0 \\ x+2y+k'=0 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \xrightarrow{-3} \end{array} \left.\begin{array}{r} kx+6y-1=0 \\ -3x-6y-3k'=0 \\ \hline (k-3)x-(1+3k')=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x=\frac{1+3k'}{k-3}; y=\frac{-k'-\frac{1+3k'}{k-3}}{2}=\frac{-k'k-6k'-1}{2k-6}, \text{para } k\neq 3$$

❶❹ Halla las coordenadas del punto P', simétrico de P(- 7, 4) respecto de la recta y=1/2x-3



Como vemos en la gráfica adjunta el punto simétrico P'(a, b) ha de pertenecer a la recta perpendicular a la recta dada que pase por P y estar a misma distancia de ella que el punto P, esas son las dos condiciones qu nos permitirán hallar las dos coordenadas de P' :

Ecuación de la recta perpendicular a la dada en forma punto (P) pendiente m = -2 :

$$y-4=-2(x+7) \Rightarrow y=-2x-10$$

Como el punto P' ha de pertenecer a esta recta se ha de cumplir b = -2a –10, sin más que sustituir las coordenadas del punto P'.

¿ Cuál es la ecuación que nos falta para poder hallar las dos incógnitas a y b ?

Hay varias posiblidades :

M punto medio de PP'

d(p,r) = d(P',r).

Condición de perpendicularidad.

Elegimos la segunda :

$$d(P,r) = d(p',r) \Rightarrow \frac{-7-2\cdot 4-6}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} = \frac{a-2b-6}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} \Leftrightarrow \frac{-21}{\sqrt{5}} = \frac{a-2b-6}{\sqrt{5}} \Rightarrow a-2b=-15$$