PROBLEMAS PROPUESTOS

1 Para medir el área A de un terreno triangular, un ingeniero pasea por su borde. Camina respectivamente 40, 50 y 70 metros por sus tres lados. A la vista de lo cual, anota en su libreta que A = 980 m^2. ¿Es correcto su cálculo?

- Los lados del triángulo son : a = 40 m, b = 50 m y c = 70 m.
- El semiperímetro mide = s = (a + b + c)/2 = (40 + 50 + 70) / 2 = 80 m.
- Para hallar el área usamos la fórmula de Herón :

$$A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{80\cdot(80-40)\cdot(80-50)\cdot(80-70)}=\sqrt{80\cdot 40\cdot 30\cdot 10}=\sqrt{960000}=979'8\ m^2$$

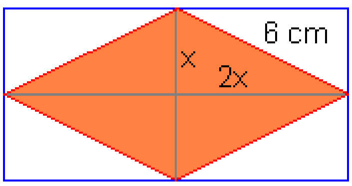
2 El edificio del Pentágono en EE.UU., que debe su nombre a su forma de pentágono regular, tiene una extensión de 34 acres (1 acre = 4.047 m^2). ¿Puedes calcular lo que mide cada uno de sus cinco lados?

Área = A = 34 · 4 047 = 137 598 m^2.
Nº de lados = n = 5 lados.

Aplicamos la fórmula obtenida en el texto para el área de un polígono regular en función de su lado L :

$$A=\frac{nL^2}{4\mathrm{tg}\frac{180}{n}}\Rightarrow L=\sqrt{\frac{4A\mathrm{tg}\frac{180}{n}}{n}}=\sqrt{\frac{4\cdot 137598\cdot\mathrm{tg}\frac{180}{5}}{5}}=282'8\ m$$

3 Halla el área de un rombo de 6 cm de lado sabiendo que una de sus diagonales tiene longitud doble que la otra.



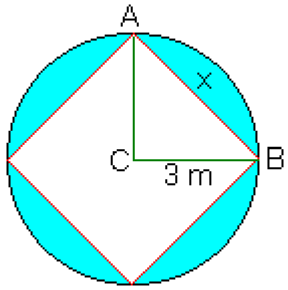
Hallamos primero el valor de x aplicando el teorema de Pitágoras :

$$6^2 = x^2 + (2x)^2 = 5x^2 \quad x = \sqrt{\frac{36}{5}} \approx 2'68\,cm$$

Ahora ya podemos calcular el área del rombo :

$$A = \frac{D \cdot d}{2} = \frac{4x \cdot 2x}{2} = 4x^2 = 4 \cdot \frac{36}{5} = 28'8\,cm^2$$

4 Si en un círculo de radio 3 m se inscribe un cuadrado, quedan cuatro porciones idénticas entre ambas figuras. Calcula el área de cada una de ellas.



$A_{azul} = A_{\text{círculo}} - A_{\text{cuadrado}}$

$A_{\text{cículo}} = \pi r^2 = 3'1416 \cdot 9 = 28'27\ m^2$.

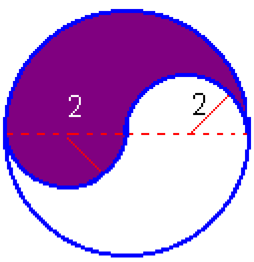
Para calcular el área del cuadrado hemos de hallar primero su lado (x) aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo isósceles ABC :

$x^2 = 3^2 + 3^2 = 9 + 9 = 18$, que es el $A_{cuadrado} = x^2 = 18\ m^2$.

El $A_{azul} = A_{\text{círculo}} - A_{\text{cuadrado}} = 28'27 - 18 = 10'27\ m^2$ y por tanto :

$A_{\text{una parte}} = A_{azul}/4 = 10'27\ m^2/4 = 2'57\ m^2$.

5 Calcula el área de la zona sombreada de la siguiente figura.



Si con el semicírculo inferior rellenamos el semicírculo que falta, obtenemos un semicírculo sombreado de radio r = 4 , cuya área es :

Área sombreada = $C_{\text{írculo}}/2 = \pi r^2/2 = 3'1416 \cdot 4^2/2 = 25'13\ u^2$.

6 Considera un hexágono regular inscrito en un círculo de radio 1 m.

(a) Da un argumento que demuestre que el lado de ese hexágono mide 1 m.

(b) Calcula su área.

(c) ¿Qué área tendría el hexágono si el radio del círculo fuese de 5 m ?

(a) Si el hexágono es regular, los seis triángulo que forman los radios de la circunferencia circunscrita son equiláteros ya que el ángulo central es α = 360º/6 = 60º y, los lados que lo forman son iguales (radios) los otros dos ángulos han de ser iguales y de valor (180º-60)/2 = 120º/2 = 60º. Al ser equilátero los tres lados han de medir 1 m (radio).

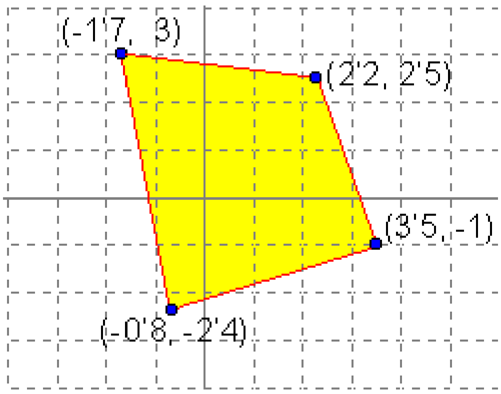
(b) Aplicando la fórmula del texto para un polígono regular :

$$A = \frac{nL^2}{4tg\frac{180^o}{n}} = \frac{6 \cdot 1^2}{4tg30^o} = 2'6\,m^2$$

(c) r = L = 5 m, aplicamos de nuevo la fórmula :

$$A = \frac{nL^2}{4tg\frac{180^o}{n}} = \frac{6 \cdot 5^2}{4tg30^o} = 64'95\,m^2$$

7 Un cuadrilátero tiene sus vértices en los puntos de coordenadas: (3’5, -1), (2’2, 2’5), (-1’7, 3) y (-0’8, -2’4). Calcula su área.

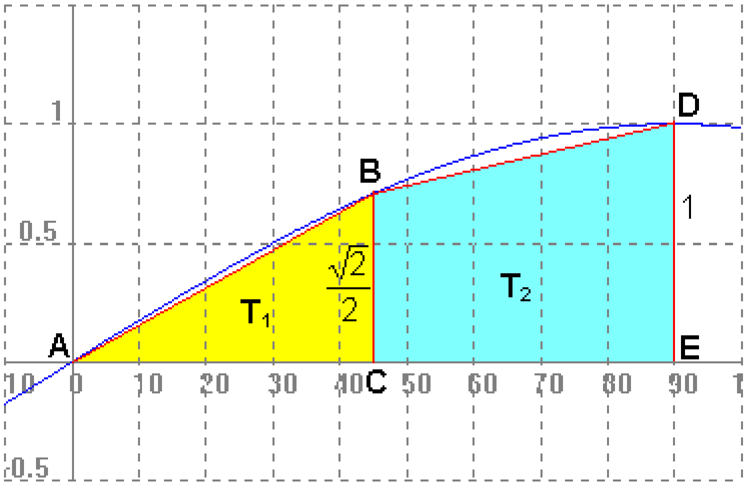


Aplicamos la fórmula del texto :

$$A = \frac{1}{2}[(x_1 - x_2)(y_1 + y_2) + (x_2 - x_3)(y_2 + y_3) + (x_3 - x_4)(y_3 + y_4) + (x_4 - x_1)(y_4 + y_1)]$$

A =0’5 [(3’5 - 2’2)(-1 + 2’5)+(2’2 + 1’7)(3 + 2’5) +(- 1’7 + 0’8) (3 -2’4) +(-0’8 – 3’5)(-2’4 –1)] = 0’5 · [1’3·1’5 + 3’9·5’5 + (-0’9) · 0’6 + (- 4’3) · (-3’4)] = 18’74 u^2.

8 Halla un valor aproximado mediante el método de los trapecios para el área de la región comprendida entre la gráfica de y = sen x, desde x = 0 hasta x = π/2, con único punto de partición en x = π/4.



Vemos en la figura que se forman un triángulo **T_1**(ABC) y un trapecio **T_2** (CBDE), cuyas áreas calculamos :

✱ Área del triángulo T_1:

Base = AB = π/4

$$\text{Altura} = CB = \text{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Luego su área es :

$$A_{T_1} = \frac{b \cdot a}{2} = \frac{\frac{\pi}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = 0'28$$

✱ Área del trapecio T_2 :

$$\text{Base menor} = b = BC = \text{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ .$$

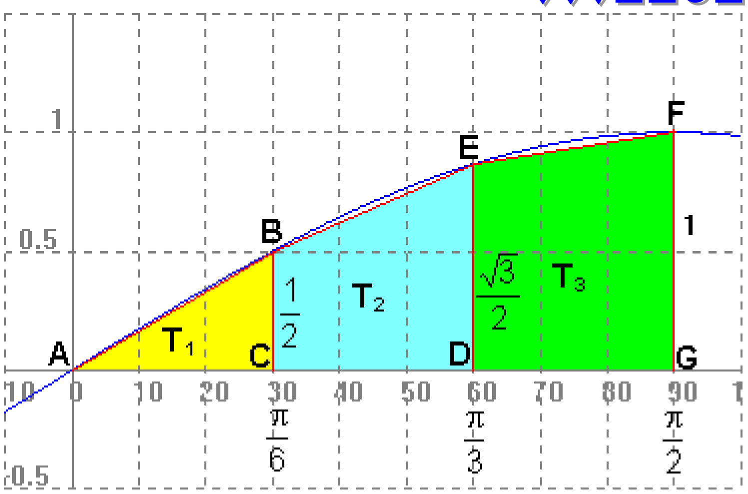
Base mayor = B = DE = sen(π/2) = 1

Altura = h = CE = π/4

$$A_{T_2} = \frac{B+b}{2} \cdot h = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = 0'67$$

El área pedida es = A_{T1} + A_{T2} = 0'28 + 0'67 = 0'95

9 Repite el problema anterior, pero esta vez con los tres trapecios que se obtienen al tomar como puntos de partición π/6 y π/3 . Compara con el resultado exacto, que es 1.



Ahora se forman tres figuras : Un triángulo **T_1** (**ABC**) y dos trapecios **T_2** (**BCDE**) y **T_3** (**CEFG**), cuyas áreas hallamos :

Área del triángulo T_1 :

Base = b = **AC** = π/6

$$\text{Altura} = a = \mathbf{CB} = \text{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$A_{T_1} = \frac{b \cdot a}{2} = \frac{\frac{\pi}{6} \cdot \frac{1}{2}}{2} = 0'131$$

Área del trapecio T_2 :

Base menor = b = **CB** = $\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

Base mayor = B = **DE** = $\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Altura = h = **CD** = $\pi/6$

$$A_{T_2} = \frac{B+b}{2} \cdot h = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{6} = 0'358$$

Área del trapecio T_3 :

Base menor = b = **DE** = $\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Base mayor = B = **GF** = $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$

Altura = h = **DG** = $\pi/6$

$$A_{T_2} = \frac{B+b}{2} \cdot h = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{6} = 0'489$$

Área = $A_{T1} + A_{T2} + A_{T3}$ = 0’131 + 0’358 + 0’489 = 0’977

Podemos apreciar que la aproximación es bastante buena de error absoluto = 1 – 0’977 = 0’023 y error relativo del 2’3 %

10 Utilizando el hecho de que (-cosx)' = sen x y la información de la Sección 14.4, demuestra que el área bajo la curva y = sen x, entre x = 0 y x = π/ 2, es igual a 1 exactamente.

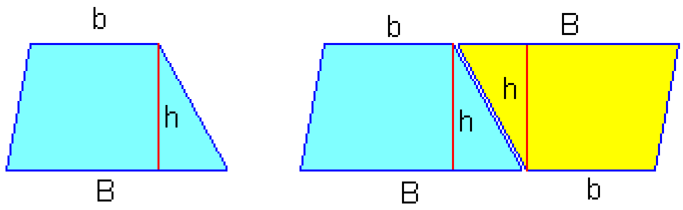
Área = A(π/2) – A(0) , en donde A(x) es la función cuya derivada es senx es decir A(x) = - cos x, ya que A ‘(x) = (-cosx) ‘ = senx.

Área = A(π/2) – A(0) = - cos(π/2) – (-cos(0)) = 0 + 1 = 1 u^2

AUTOEVALUACIÓN

1 Intenta recordar de memoria las fórmulas del área de un trapecio y de un polígono regular de n lados. ¿Podrías demostrarlas?

Trapecio



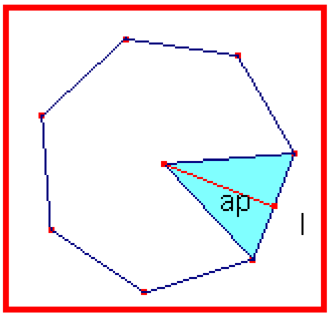
Si al trapecio original (de base mayor = B, base menor = b y altura = h) lo giramos 180º y unimos el trapecio obtenido con el original (como se ve en el segundo dibujo) se forma un paralelogramo de cuya base el la suma (B +b) y altura h, por tanto el área del paralelogramo:

Área del paralelogramo = (B + b) · h

Como el área del trapecio es la mitad del paralelogramo (lo hemos formado uniendo dos paralelogramos iguales) :

$$\text{Área del trapecio : } \frac{B+b}{2} \cdot h$$

Polígono regular



En la figura de la izquierda tenemos un heptágono regular (que tomamos para ejemplificar el cálculo del área). El polígono lo dividimos en 7 triángulo iguales, de forma que el área del polígono será el producto del número de triángulos por el área de uno de ellos. Para hallar el área del triángulo (de base = lado = l y altura = apotema = ap) aplicamos la fórmula :

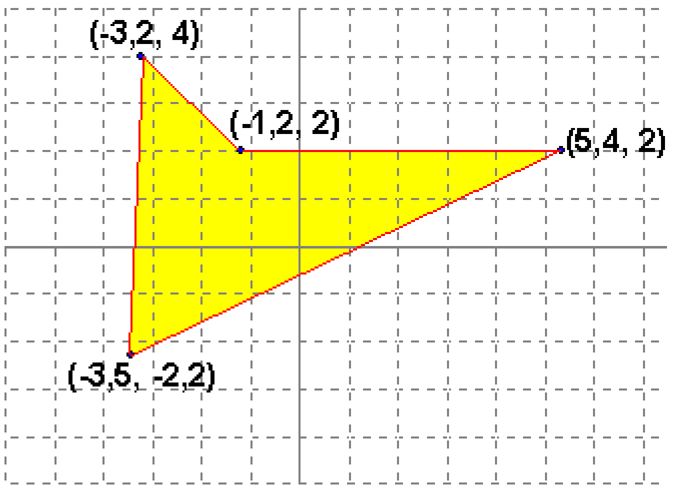
$$\text{Área del triángulo} = \frac{\text{basexaltura}}{2} = \frac{l \cdot ap}{2}$$

Luego el área del polígono es :

$$\text{Área del heptágono} = 7 \cdot \text{área de un triángulo} = 7\frac{l \cdot ap}{2} = \frac{(7 \cdot l) \cdot ap}{2} = \frac{p \cdot ap}{2}$$

Ya que 7 · l = perímetro del polígono. En el caso general sólo habría que sustituir 7 por n lados y n ·l = perímetro del polígono.

2 Calcula el área del polígono de vértices (5,4, 2), (-1,2, 2), (-3,2, 4) y (-3,5, -2,2).



Aplicamos la fórmula del texto :

$$A = \frac{1}{2}\left[(x_1 - x_2)(y_1 + y_2) + (x_2 - x_3)(y_2 + y_3) + (x_3 - x_4)(y_3 + y_4) + (x_4 - x_1)(y_4 + y_1)\right] =$$

=0'5 [(5'4 + 1'2)(2 + 2)+(-1'2 + 3'2)(2 + 4) +(- 3'2 + 3'5) (4 -2'2) +(-3'5 – 5'4)(-2'2 +2)] = 0'5 · [6'6·4 + 2· 6 + (0'3) · 1'8 + (- 8'9) · (- 0'2)] = 20'76 u^2.

3 Escribe la fórmula para el área de un cuadrilátero de vértices (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) (x_4, y_4). ¿ Cómo han de ordenarse para tener la certeza de obtener en esa fórmula un valor positivo para el área ?

$$A = \frac{1}{2}\left[(x_1 - x_2)(y_1 + y_2) + (x_2 - x_3)(y_2 + y_3) + (x_3 - x_4)(y_3 + y_4) + (x_4 - x_1)(y_4 + y_1)\right]$$

De forma que al pasear del punto al punto 4 se vea el interior del polígono a al izquierda.

4 A 2.000 pesetas el metro cuadrado, ¿cuánto cuesta una parcela triangular cuyos lados miden 25, 40 y 45 m?

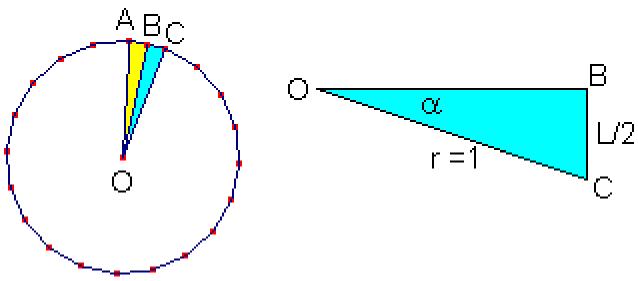
Lados del triángulo : a = 25 m, b = 40 m y c = 45 m. Semiperímetro = s = (a +b + c) / 2 = (25 + 40 + 45) / 2 = 55 m

Hallamos el área del triángulo mediante la fórmula de Herón :

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{55\cdot(55-25)\cdot(55-40)\cdot(55-45)} = \sqrt{55\cdot 30\cdot 15\cdot 10} = \sqrt{247500} = 497'5\ m^2$$

El precio de compra es : 497’5 m^2 ·2000 ptas/m^2 = 994987 ptas.

5 El área de un círculo de radio 1 es π. Supongamos que se toma como aproximación de 7u el área de un polígono regular de 20 lados inscrito en ese círculo. Halla, con calculadora, el error absoluto y el error relativo cometidos con esa aproximación.



Para hallar el área del polígono de 20 lados necesitamos saber la medida del lado y, para ellos nos fijamos en uno de los veinte triángulos isósceles iguales que se forman (el OAC), el ángulo central es 360º/20 = 18º y , trazando la apotema del polígono (OB) obtenemos un triángulo rectángulo, el OBC, (exagerado en la figura de la derecha para visualizarlo mejor) cuyo ángulo es la mitad del central (la apotema es bisectriz por ser isósceles) α = 18º/2 = 9º. Para hallar la mitad de la mediad del lado (cateto BC) usamos la definición del seno :

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CO}} = \frac{\frac{L}{2}}{r} = \frac{L}{2} \Leftrightarrow L = 2\operatorname{sen}\alpha = 2\operatorname{sen}9^o \approx 0'3129$$

Ya podemos hallar el área del polígono, aplicando la fórmula :

$$A = \frac{nL^2}{4tg\frac{180^o}{n}} = \frac{20\cdot 0'3129^2}{4tg9^o} = 3'09017\,m^2$$

Y ahora calculamos los errores cometidos :

Error absoluto = | π -3’09017| ≈ 0’0514

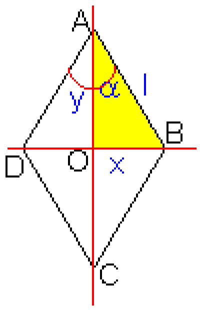
$$\text{Error relativo} = \frac{|\pi - 3'09017|}{\pi}\cdot 100 = 1'63\%$$

6 ¿ Es posible calcular el área de un polígono de seis lados sabiendo sólo las longitudes de sus seis lados y que uno de los ángulos es recto ?

No porque aunque se fije un ángulo (dos lados) los otros lados y ángulos pueden modificarse de formas distintas y obtendremos diferentes áreas.

7 Piensa en las diversas formas que puede adoptar el rombo articulado de la Figura 14.21, al ir estirándolo horizontalmente. Representa en una gráfica con el ángulo a en el eje horizontal y el área del rombo en el vertical lo que sucede en ese proceso, desde que α = 0° (rombo cerrado en posición vertical) hasta α = 180° (rombo cerrado en posición horizontal).

A la vista de la gráfica que habrás obtenido, ¿puedes esbozar un argumento para demostrar que el área máxima se consigue con el cuadrado, o sea con α = 90°?



El área del rombo es :

$$A = \frac{D \cdot d}{2} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{DB}}{2} = \frac{2y \cdot 2x}{2} = 2xy$$

Esta área lo vamos a expresar en función del ángulo y la longitud del lado(l) :

En el triángulo rectángulo AOB :

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \frac{x}{l} \Rightarrow x = l\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$$

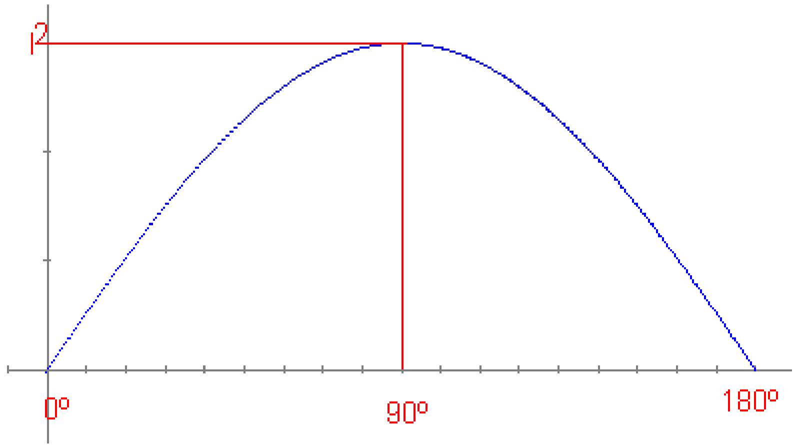
Y, aplicando el teorema de Pitágoras y sustituyendo :

$$l^2 = x^2 + y^2 = l^2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} + y^2 \Rightarrow y = \sqrt{l^2\left(1 - \operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}\right)} = l\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2}} = l\cos\frac{\alpha}{2}$$

Luego el área en función del ángulo :

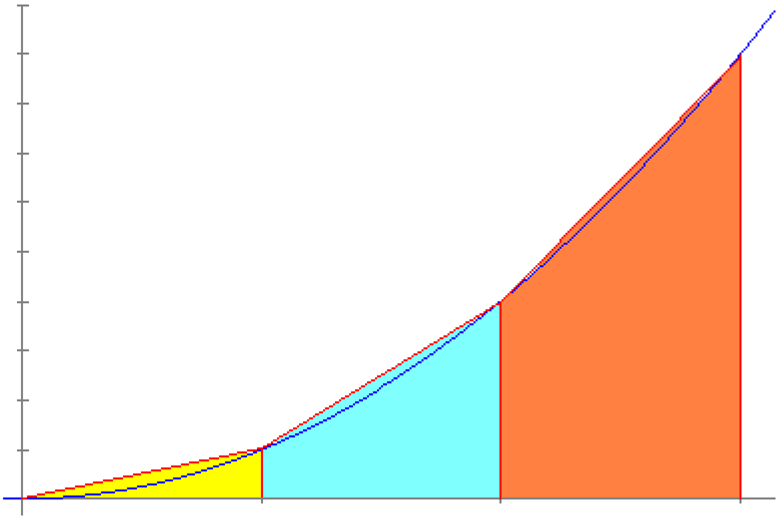
$A(\alpha) = 2xy = 2l^2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = l^2\operatorname{sen}\alpha$, aplicando la fórmula del ángulo doble sen2a = 2senacosa

Si representamos la función entre 0º y 180º podemos apreciar que el máximo se alcanza en el centro cuando el ángulo es de 90º es decir que el rombo se convierte en cuadrado y su área sería el lado al cuadrado (l^2) y después al irse abriendo se va cerrando y se van repitiendo los valores de la primara mitad debido a la simetría de la figura :



8 En el método de los trapecios, ¿siempre es menor la suma de áreas de los trapecios que el área exacta?

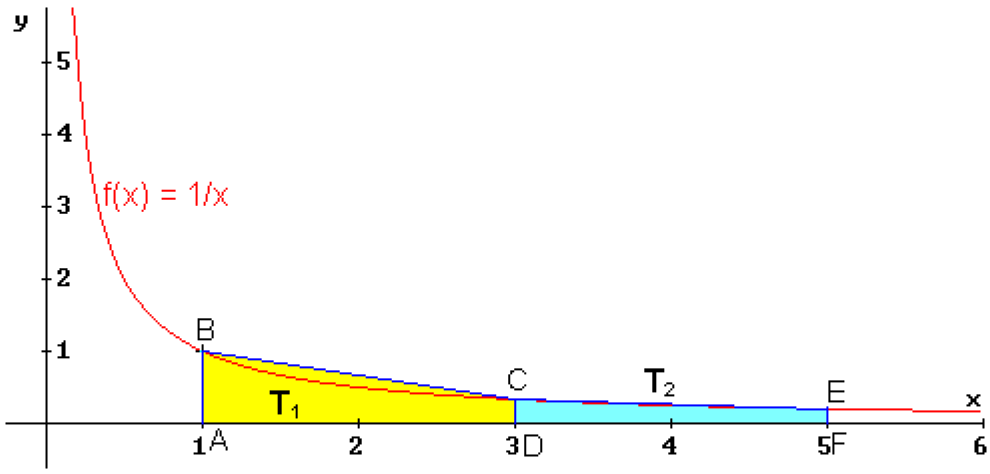
No, si la figura es cóncava hacia arriba, como en la figura, el método de los trapecios, al quedar estos por encima, nos proporcionan un área mayor que la real :



9 Usando como único punto de partición x = 3, estima mediante el método de los trapecios el valor del área bajo la gráfica de y = 1 / x entre x = 1 y x = 5.

Sea f(x) = 1/x , por tanto

f(1) = 1 , f(3) = 1/3 y f(5) = 1/5. Se forman dos trapecios $\mathbf{T_1}$ y $\mathbf{T_2}$



Trapecio ABCD

- Base mayor = **B** = AB = f(1) = 1.
- Base menor = **b** = DC = f(3) = 1/3.
- Altura = **h** = AD = 3 -1 = 2.
- Luego el área es :

$$A_{T_1} = \frac{B+b}{2}\cdot h = \frac{1+\frac{1}{3}}{2}\cdot 2 = \frac{4}{3}$$

Trapecio CDEF

- Base mayor = **B** = DC = f(3) = 1/3.
- Base menor = **b** = FE = f(5) = 1/5.
- Altura = **h** = DF = 5 - 3 = 2.
- Luego el área es :

$$A_{T_2} = \frac{B+b}{2}\cdot h = \frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}{2}\cdot 2 = \frac{8}{15}$$

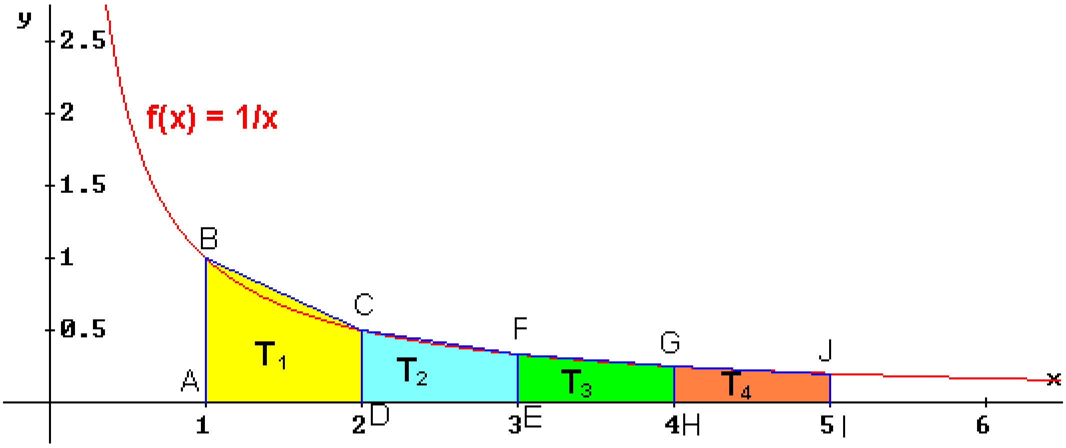
Y el área pedida será la suma de las dos anteriores :

$$A = A_{T1} + A_{T2} = 4/3 + 8/15 = 28/15 = 1'87\ u^2$$

10 Repite el cálculo anterior usando puntos de partición en 2, 3 y 4. ¿Ha mejorado la aproximación?

Nota: Puede demostrarse que el valor exacto del área es In 5 = 1,6094...

◊◊◊◘◘⊗◘◘◊◊



El área que hemos de hallar, es la suma de las áreas de 4 trapecios :

Trapecio ABCD

- Base mayor = **B** = AB = f(1) = 1.
- Base menor = **b** = DC = f(2) = 1/2.
- Altura = **h** = AD = 2 -1 = 1.
- Luego el área es :

$$A_{T_1} = \frac{B+b}{2} \cdot h = \frac{1+\frac{1}{2}}{2} \cdot 1 = \frac{3}{4}$$

Trapecio CDEF

- Base mayor = **B** = DC = f(2) = 1/2.
- Base menor = **b** = FE = f(3) = 1/3.
- Altura = **h** = DF = 3 - 2 = 1.
- Luego el área es :

$$A_{T_2} = \frac{B+b}{2} \cdot h = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{2} \cdot 1 = \frac{5}{12}$$

Trapecio EFGH

- Base mayor = **B** = FE = f(3) = 1/3.
- Base menor = **b** = HG = f(4) = 1/4.
- Altura = **h** = AD = 4 - 3 = 1.

- Luego el área es :

$$A_{T_1} = \frac{B+b}{2} \cdot h = \frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}}{2} \cdot 1 = \frac{7}{24}$$

Trapecio HGJI

- Base mayor = **B** = HG = f(4) = 1/4.

- Base menor = **b** = JI = f(5) = 1/5.

- Altura = **h** = DF = 5 - 4 = 1.

- Luego el área es :

$$A_{T_2} = \frac{B+b}{2} \cdot h = \frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}}{2} \cdot 1 = \frac{9}{40}$$

Y el área pedida será la suma de las de los cuatro trapecios anteriores :

$A = A_{T1} + A_{T2} + A_{T3} + A_{T4} = 4/3 + 8/15 = 202/120 = 101/\ 60 = 1'68333\ u^2$

Sí ha mejorado la aproximación respecto de la anterior, pues cuanto más particiones hagamos más se acercará al valor real.