22 Halla el punto de la recta y = 2x - 4 que se encuentra más cerca del punto P(3, 1).

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

Cualquier punto de la recta es de la forma (a, 2a - 4) y la distancia de este a l punto P es viene dada por :

$$d(a) = \sqrt{(a-3)^2 + (2a-4-1)^2} = \sqrt{a^2 - 6a + 9 + 4a^2 - 20a + 25} = \sqrt{5a^2 - 26a + 34}$$

Para maximizar la función anterior basta maximizar la función D(a) = $5a^2 - 26a + 34$:

(1) Derivada primera D'(a) = 10a - 26

(2) Valores que anulan la derivada primera : D'(a) = 0, 10a - 26 = 0, a = 26/10 = 13/5 .

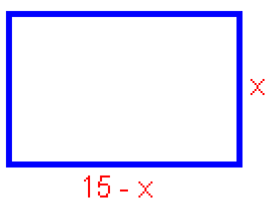
(3) Comprobación que es mínimo : D"(a) = 10, D"(2'6= 13/5) = 10 > 0 luego mínimo.

El punto buscado es (13/5, 6/5)

✱✱✱✽✽✪✽✽✱✱✱

23 Con 30 m de cuerda disponibles ¿ cual es el máximo área rectangular que es posible acotar?.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈



Si llamamos x a uno de los lados del rectángulo, como la suma de los cuatro (perímetro) ha de ser la longitud de la cuerda, el otro será x = (30 – 2x)/2 = 15 – x (ver figura adjunta)

Función o optimizar (maximizar) : Área = A(x) = x (15-x) = 15x – x^2

(1) Derivada A'(x) = 15 – 2x.

(2) Valores que anulan la primera derivada, A'(x) = 0, 15 – 2x = 0, x = 15/2.

(3) Comprobación mediante el criterio de la derivada segunda A"(x) = - 2 y A"(15/2) = - 2 < 0, luego máximo.

El otro lado vale 15 –x = 15 – 15/2 = 15/2, luego es un cuadrado de lado 15/2 = 7'5 cm.

El área es A = (7'5 cm)^2 = 56'25 cm^2.

✱✱✱✽✽✪✽✽✱✱✱

24 Una tráquea, de radio r en reposo, se contrae al estornudar y pasa a tener un radio menor, digamos $x < r$. La velocidad de expulsión del aire en el estornudo, medida en ciertas unidades, viene dada por

$$v=(r-x)x^2$$

¿Para qué valor del radio x de la tráquea contraída alcanza el aire la máxima velocidad de salida?

(1) Derivada primera de la función velocidad de salida del aire $v = rx^2 – x^3$:

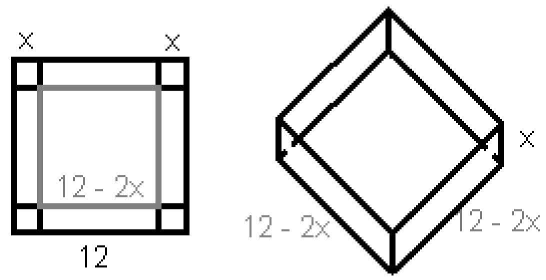
$$v'(x) = 2rx – 3x^2$$

(2) Valores que anulan la primera derivada : $v'(x) = 0$, $2rx – 3x^2 = 0$, $x(2r – 3x) = 0$, $x = 0$ y $x = 2r/3$.

(3) Derivada segunda $v''(x) = 2r – 6x$.

(4) Caracterización de los puntos singulares $v''(0) = 2r > 0$, mínimo y $v''(2r/3) = 2r – 6(2r/3) = 2r – 4r = -2r < 0$, luego **la máxima velocidad de salida del aire por la tráquea se alcanza para un radio de x = 2r/3.**

25 Resolver de forma rigurosa el Problema resuelto 8 de la Unidad 8.



El volumen de la caja paralepipédica es :

$V(x) = (12 – 2x)^2 \cdot x = (144 - 48x + 4x^2) \cdot x = 4x^3 – 48x^2 + 144x$. Para maximizarla :

(1) Hallamos la derivada primera :

$V'(x) = 12x^2 – 96x + 144$.

(2) Hallamos los valores que anulan esta derivada : $V'(x) = 0$, $12x^2 – 96x + 144 = 0$, resolvemos la ecuación equivalente de 2º grado : $x^2 – 8x + 12 = 0$ y obtenemos las soluciones $x = 2$ y $x = 6$.

(3) Hallamos la segunda derivada : $V''(x) = 24x – 96$.

(4) Caracterizamos las soluciones : V”(2) = 24 · 2 – 96 = 48 – 96 = -48, V”(6) = 24 · 6 – 96 = 48 > 0.

El máximo volumen se consigue cortando un cuadrado de lado x = 2 m y ese volumen máximo sería V (2) = 4 2^3 – 48 2^2 + 144 2 = 32 – 192 + 288 = 128 cm3.

✱✱✱❁❁✪❁❁✱✱✱

AUTOEVALUACIÓN

1 Explica con toda la precisión de que seas capaz esta afirmación: « El proyectil llevaba, en el momento de impactar en el blindaje, una velocidad de 60 m/s.» ¿Cómo sugiere ese enunciado la noción matemática de derivada?

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

Quiere decir que en intervalos cada vez más pequeños en torno al instante en que impacta con el blindaje, la velocidad media del proyectil tiende a acercarse de cada vez más al valor de 60 m/s.

Expresa el límite de una variación media luego es una derivada primera de la función espacio.

✱✱✱❁❁✪❁❁✱✱✱

2 La recta tangente a la gráfica de una función f (x) en x = a, ¿por qué punto de la gráfica pasa? ¿Con qué pendiente?

¿Sabes escribir con esos datos la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f '(x) en el punto de coordenada x = a?

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

Punto : (a, f(a)).

Pendiente : f ‘(a).

La ecuación de la recta tangente en forma punto P (x_1, y_1) pendiente (m) sería :

$y - y_1 = m (x - x_1)$, que en nuestro caso queda y – f(a) = f ‘(a) (x – a).

✱✱✱❁❁✪❁❁✱✱✱

3 Completando esta tabla, con ayuda de la calculadora, estima el valor de f '(π), siendo f (x) = e^{2senx}.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

h	0’1	0’01	0’001	0’0001
f(π+h)	0’819	0’98	0’998	0’9998
f(π + h) – f(π)	- 0’181	-0’02	- 0’002	- 0’0002
$\frac{f(\pi+h)-f(\pi)}{h}$	**- 1’81**	**- 2**	**- 2**	**- 2**

Luego f ‘ (π) = - 2

✱✱✱❁❁✪❁❁✱✱✱

4 Aplicando la definición, calcula f '(2) y f '(10) para la función f(x) = 3x - 4.

◈◈◈▣▣⦿▣▣◈◈◈

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3(2+h)-4-2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{6+3h-6}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3h}{h}=\lim_{h\to 0}3=3$$

$$f'(10)=\lim_{h\to 0}\frac{f(10+h)-f(10)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3(10+h)-4-26}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{30+3h-30}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3h}{h}=\lim_{h\to 0}3=3$$

✱✱✱❁❁✪❁❁✱✱✱

5 Halla la recta tangente a la parábola y = x^2 - 2x + 3 en el punto de coordenada x=3.

◈◈◈▣▣⦿▣▣◈◈◈

(1) hallamos la ordenada correspondiente a x = 3: $y = 3^2 – 2\cdot 3 + 3 = 6$.

(2) Cálculo de la pendiente : Derivada primera y ‘ = 2x – 2, m = y ‘(3) = 6- 2 = 4.

(3) Ecuación de la tangente : **y – 6 = 4 (x – 3) , y = 4x – 6 en forma explícita o 4x – y – 6 = 0 en forma general.**

✱✱✱❁❁✪❁❁✱✱✱

6 Halla las funciones derivadas de:

(a) $3x^2 + 4x$ **(b)** x^5-5x^3+7 **(c)** x sen x + cos x

◈◈◈▣▣⦿▣▣◈◈◈

(a) $(3x^2 + 4x)' = (3x^2)' + (4x)' = 3(x^2)' + 4(x)' = 3 \cdot 2x + 4 \cdot 1 =$ **6x + 4**.

(b) $D(x^5 – 5x^3 + 7) = D(x^5) – 5\,D(x^3) + D(7) = 5x^4 – 5 \cdot (3x^2) + 0 =$ **$5x^4 – 15x^2$**.

(c) (xsenx + cosx) ‘ = (xsenx)’ + (cosx)’ = (x)’ sen x + x(senx)’ +(-senx) = senx +x cosx – sen x = **x cosx**.

✱✱✱❁❁✪❁❁✱✱✱

7 La altura h del nivel del agua en un depósito viene dado por h = f(t) (h en metros, t en segundos). ¿Qué significa f '(2)?

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

f ‘(2) es la velocidad con la que varía el nivel del depósito en el instante t = 2 segundos que será positiva si se llena y negativa si se vacía.

✱✱✱❁❁✪❁❁✱✱✱

8 Si miraras en el origen, con una lupa muy potente, las gráficas de las funciones:

(a) x^2 **(b)** 3x **(c)** senx **(d)** x - $3x^2$

¿cuáles se verían esencialmente iguales?

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

Hallemos sus derivadas en el origen x = 0 :

(a) f ‘(x) = 2x, f ’(0) = 0.

(b) f ‘(x) = 3 , f ‘(0) = 3.

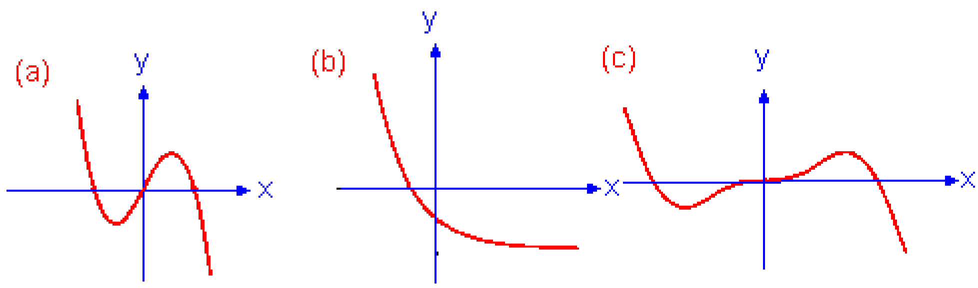
(c) f ‘(x) = cosx, f ‘(0) = cos0 = 1.

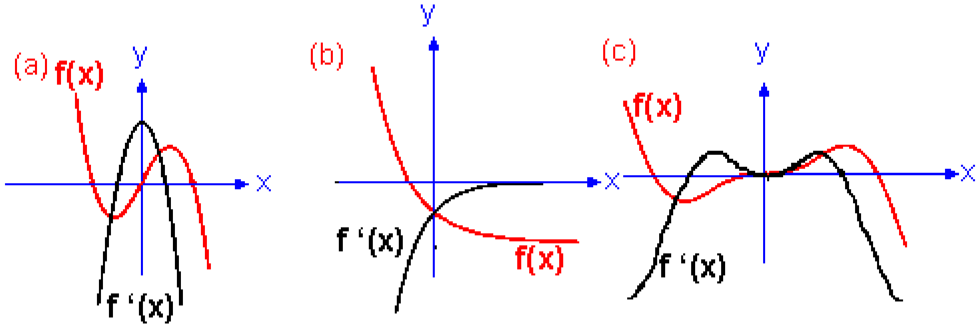
(d) f ‘(x) = 1 – 6x, f ‘(0) = 1.

Como las que tienen la misma pendiente en ese punto son la (c) y (d) serán las que se vean parecidas en el origen como si fuesen una recta de pendiente 1, es decir la recta y = x.

✱✱✱❁❁✪❁❁✱✱✱

9 Dibuja una gráfica aproximada de la función derivada de cada una de las siguientes funciones:





10

(a) ¿Cómo se definen los puntos críticos de una función?

(b) ¿Cuántos puntos críticos puede tener una función?

(a) Los puntos críticos de una función f(x) son puntos en los cuales se anula la derivada primera, f '(x) = 0.

(b) De ninguno a infinitos.

11 ¿Cuál de estas propiedades se cumple necesariamente cuando x = a es un número crítico de la función f(x)?

(a) f(a) = 0 **(b)** f '(a) = 0 **(c)** f(x) tiene en x = a un extremo local.

Hemos dicho en el ejercicio anterior que la condición necesaria para que una función f(x) tenga un punto crítico es que se anule la derivada primera f '(x) = 0, luego se cumple la (b).

12

(a) Halla los intervalos prueba de la función f (x) = x^3 - 27x.

(b) ¿Dónde es creciente esa función?

(a)

❶ Hallamos la derivada primera : f '(x) = $3x^2 - 27$.

❷ Hallamos los valores para los que se anula, f '(x) = 0 : $3x^2 - 27 = 0$, $x^2 = 9$, x = -3 y x = 3,

❸ Los intervalos de prueba serán x < -3, -3 < x < 3, y x > 3, es decir (- ∞, - 3), (-3, 3) y (3, ∞).

(b) Para estudiar el crecimiento y decrecimiento estudiamos el signo de la derivada primera en cada uno de los intervalos de prueba :

❶ Intervalo (- ∞, - 3), f '(- 4) = $3(-4)^2 - 27 = 48 - 27 = 21 > 0$, **creciente** .

❷ Intervalo (-3, 3), f '(0) = - 27 < 0, decreciente.

❸ Intervalo (3, ∞), f '(4) = $3(4)^2 - 27 = 48 - 27 = 21 > 0$, **creciente**

❋❋❋❁❁✪❁❁❋❋❋