Resuelve tú (Pág ②⑤⓪)

Se lanza una piedra desde el suelo hacia arriba con una velocidad inicial de 40 m/s. La altura alcanzada viene dada por la función $s(t) = 40t - 5t^2$ (s en metros y t en segundos). Calcula la velocidad de la piedra en los instantes t = 1, t = 2 y t = 4.

Hallamos la velocidad, en general, mediante la definición, para t = a y después sustituimos :

$$v(a) = \lim_{h\to 0}\frac{s(a+h)-s(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{40(a+h)-5(a+h)^2-40a+5a^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{40a+40h-5a^2-10ah-5h^2-40a+5a^2}{h} =$$

$= \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{40h-10ah-5h^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h(40-10a-5h)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(40-10a-5h) = 40-10a$, ahora sustituimos a por los valores del tiempo pedido :

v(1) = 40 – 10 = 30 m/s, v(2) = 40 – 10 2 = 40 –20 = 20 m/s, v(4) = 40 – 10 4 = 40 – 40 = 0 m/s.

Resuelve tú (Pág ②⑤①)

Calcula la pendiente de $y = x^2$ en x = 0, y en x = - 2.

Como en el ejercicio anterior hallamos la derivada (pendiente = f ’(a)) mediante la definición para x = a y después particularizamos :

$$m = f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^2-a^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(2a+h)}{h} = \lim_{h\to 0}(2a+h) = 2a$$

Luego : **f ’(0) = 2 ·0 = 0, f ’(-2) = 2 ·(-2) = - 4**

Resuelve tú (Pág ②⑤③)

Estima con la calculadora el valor de f ’(1) para $f(x) = \sqrt{2^x}$

Cociente incremental(C.I) : $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \dfrac{\sqrt{2^{1+h}}-\sqrt{2}}{h}$, usamos la hoja de cálculo :

h	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001	0,000001	0,0000001
C.I.	0,49872	0,49098	0,49021	0,49014	0,49013	0,4901292	0,4901291

f '(1) = 0' 4901291

✱✱✱❆❆✪❆❆✱✱✱

Resuelve tú (Pág ②⑤⑨)

Halla f '(x) siendo f(x) = $(x^3 - 1) \cdot$ senx.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

f '(x) = $(x^3 - 1)'$ senx + $(x^3 - 1)$ (senx)'= $3x^2$ senx + $(x^3 - 1)$ cos x.

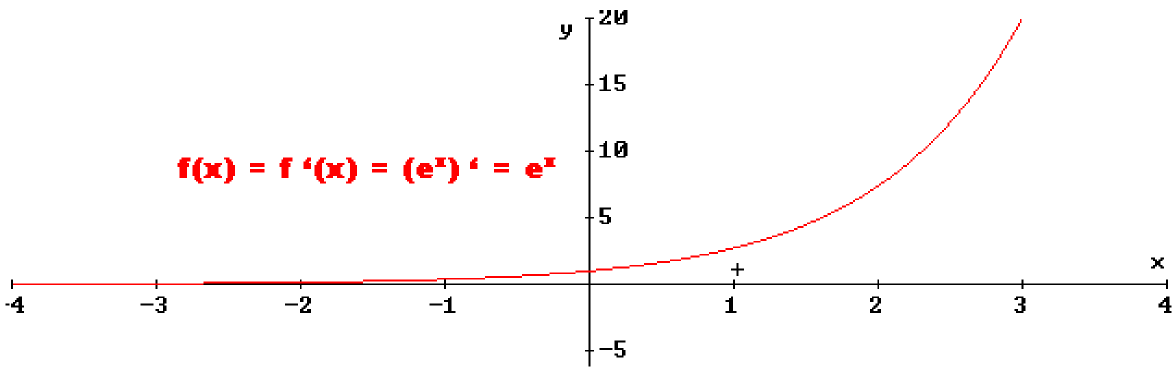
✱✱✱❆❆✪❆❆✱✱✱

Resuelve tú (Pág ②⑥②)

Usando que $(e^x)' = e^x$, demuestra que f(x) = e^x no tiene máximos ni mínimos locales. Confirma esa conclusión en la gráfica de e^x.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

Hallamos la derivada primera de la función : f '(x) = $(e^x)' = e^x$ y, como esta función no se anula para ningún valor de x (distinto de - ∞), no tiene máximos ni mínimos locales. Puede verse en la gráfica que es siempre creciente, ya que $e^x > 0$ para todo x :



✱✱✱❆❆✪❆❆✱✱✱

Resuelve tú (Pág ②⑥③)

Verifica, con el criterio de la derivada, que la función f(x) = $x^3 - 12x + 8$ tiene un máximo local en x = -2 y mínimo local en x = 2.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

$f'(x) = 3x^2 - 12$, $f''(x) = 6x$, comprobamos que se anula la derivada primera y los signos de la segunda en esos valores de x :

❀ $x = -2$, $f'(-2) = 3(-2)^2 - 12 = 3 \cdot 4 - 12 = 12 - 12 = 0$ y $f''(-2) = 6 \cdot (-2) = -12 < 0$, luego máximo.

❀ $x = 2$, $f'(2) = 3(2)^2 - 12 = 3 \cdot 4 - 12 = 12 - 12 = 0$ y $f''(2) = 6 \cdot 2 = 12 > 0$, luego mínimo.

❁❁✪❁❁

Resuelve tú (Pág ②⑥⑤)

Halla el máximo valor posible del producto de dos números cuya suma es 60.

◈◈◈▣▣⊙▣▣◈◈◈

❂ 1er número = x.

❂ 2º numero = 60 – x .

❂ Función producto = $P(x) = x(60 - x) = -x^2 + 60x$.

❂ Hallamos los valores que anulan la derivada primera : $P'(x) = -2x + 60$; $-2x + 60 = 0$; $2x = 60$; $x = 60/2 = 30$.

❂ Usamos el criterio de la derivada segunda para comprobar si es máximo o mínimo :

❂ $f''(x) = -2$, luego $f''(30) = -2 < 0$ y por tanto máximo.

❂ Los dos número son iguales a la mitad, 30, ya que $30 \cdot 30 = 900$, es máximo.

❁❁✪❁❁

Resuelve tú (Pág ②⑥⑤)

Demuestra analizando la función $f(x) = 5x^2 - 12x + 9$, que la distancia mínima del ejercicio 8 se alcanza en el punto (1’2, 0’6) de la recta y vale $\sqrt{1'8} = 1'34$.

◈◈◈▣▣⊙▣▣◈◈◈

❂ Hallamos los valores que anula la primera derivada : $f'(x) = 10x - 12$, $10x - 12 = 0$, $x = 12/10 = 1'2$.

❂ Comprobamos que es mínimo, por el criterio de la derivada segunda ; $f''(x) = 10$, $f''(1'2) = 10 > 0$, luego mínimo. Si $x = 1'2$ $y = -2 \cdot 1'2 + 3 = -2'4 + 3 = 0'6$. Punto (1’2, 0’6).

❂ Hallamos el valor de $f(1'2) = 5 \cdot 1'2^2 - 12 \cdot 1'2 + 9 = 1'8$, luego la distancia vale $d = \sqrt{1'8}$

❁❁✪❁❁

PROBLEMAS PROPUESTOS

1 ¿Cuál es la pendiente media en:

(a) El perfil de una etapa de la Vuelta Ciclista a España, con salida y llegada en Jaca.

(b) La gráfica de $y = x^2 + 3x - 5$, entre $x = 1$ y $x=3$.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

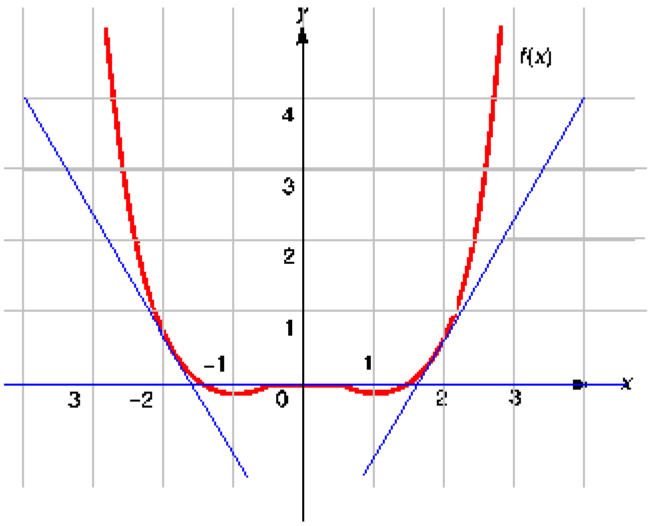
Pendiente media = $p_m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

(a) Como f(b) = f(a), f(b) – f(a) = 0, $p_m = 0$.

(b) $p_m = \frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{(3^2+3\cdot3-5)-(1^2+3\cdot1-5)}{2} = \frac{-5+1}{2} = \frac{-4}{2} = -2$

✱✱✱❁❁✪❁❁✱✱✱

2 Calcula aproximadamente f '(-2), f '(0) y f '(2) para la función de la Figura:



◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

En x = 0, la recta tangente la curva es horizontal luego su pendiente es nula f '(0) = 0.

En x = -2 y x = 2 las rectas tangentes a la curva tienen pendientes opuestas, ya que la función tiene simetría par.

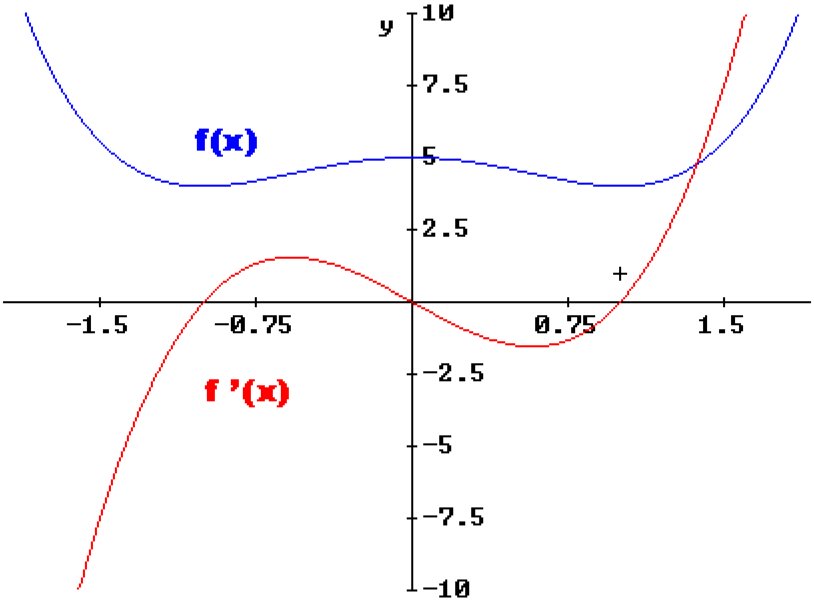
Para hallar de forma aproximada calculamos la pendiente de la recta tangente :

$f'(-2) = m = \frac{f(-2) - f(-3)}{-2-(-3)} = \frac{1-4}{1} = -3$, análogamente f ‘(2) = 3.

✱✱✱❁❁✪❁❁✱✱✱

3 Dibuja una gráfica aproximada. de f '(x), siendo f(x) la función de la Figura 13.37.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈



✱✱✱❁❁✪❁❁✱✱✱

4 Con ayuda de la calculadora, haz una tabla de valores para el cociente incremental de f(x) = lnx cerca de x = 8 y estima con ellos el valor de f '(8), que es exactamente 0,125.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

$$\text{Cociente incremental = C.I.} = \frac{f(8+h) - f(8)}{h} = \frac{\ln(8+h) - \ln 8}{h}$$

Con la hoja de cálculo o la calculadora completamos la tabla :

h	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001	0,000001	0,0000001
C.I.	0,1242252	0,1249219	0,1249922	0,1249992	0,1249999	0,1250000	0,1250000

✱✱✱❁❁✪❁❁✱✱✱

5 La altura h sobre el agua del río de una piedra lanzada (en el instante t = 0) al aire hacia arriba desde un puente viene dada por la función h(t) = 10 + 20t - 5t^2, con h en metros y t en segundos.

(a) ¿Qué altura tiene el puente sobre el río?

(b) Halla la velocidad media de la piedra en el primer segundo.

(c) Calcula su velocidad en el instante inicial t=0 y en t=1.

(d) Dibuja la gráfica de esa función y estima en ella la máxima altura que alcanza la piedra. ¿Qué velocidad lleva en ese momento?

(e) Calcula aproximadamente, a la vista de la gráfica, en qué instante t alcanza la piedra su máxima altura.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

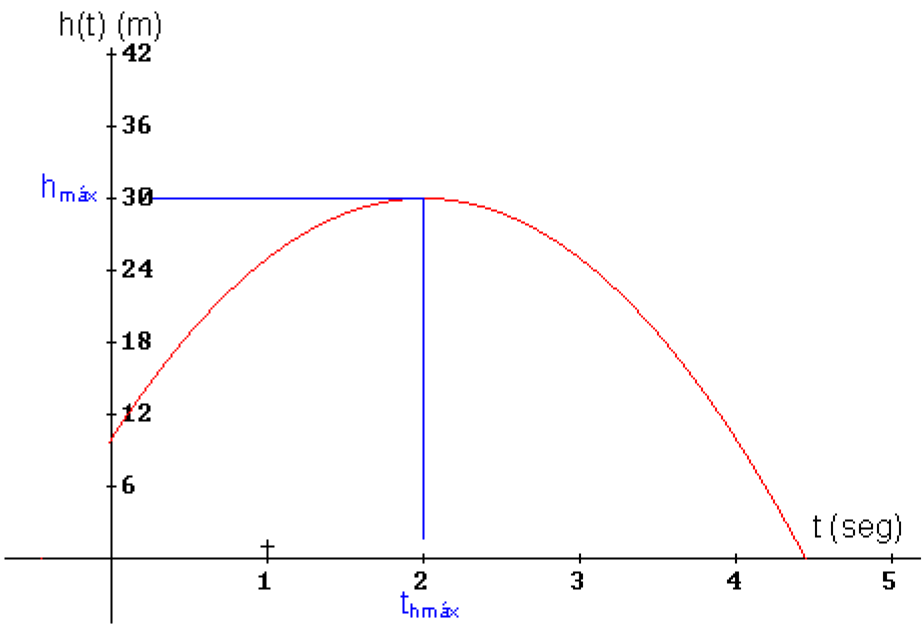
(a) Hemos de calcular la altura para t = 0 h(0) = 10 m

(b) $v_m[0,1] = \frac{h(1)-h(0)}{1-0} = \frac{10+20-5-10}{1} = 15\frac{m}{s}$

(c) La velocidad es la derivada del espacio respecto del tiempo, v(t)= h '(t) = dh/dt = d(10+20t – 5t^2) /dt = 20 – 10t. Ahora sustituimos el tiempo por los dos valores pedidos :

- **v(0) = 20 – 0 = 20 m/s**.
- **v(1) = 20 – 10 = 10 m/s**.

(d) La gráfica es, en la parte positiva del eje temporal (ya que el tiempo negativo no tiene sentido físico, ya que siempre aumenta) :



En la gráfica el máximo se alcanza en $h_{Máx}$ = 30 m.

La velocidad en ese momento ha de ser v = 0 m/s, ya que :

- Si la velocidad no fuese cero, seguiría subiendo y no sería la máxima altura.

❂ La velocidad es la derivada primera del espacio y, en ese punto, al ser un máximo se ha de anular la derivada primera.

❂ La recta tangente en ese punto es horizontal, es decir de pendiente nula, y la interpretación geométrica de la pendiente es su derivada y la deriva representa la velocidad.

(e) t = 2 seg.

✱✱✱❁❁✪❁❁✱✱✱

6 Con ayuda de la calculadora, estima la derivada de la función $f(x) = 3^x$ en $x = 1$.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3^{1+h}-3}{h}$$

Estimamos este límite mediante la calculadora o la hoja de cálculo :

h	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001	0,000001	0,0000001	0,00000001
C.I.	3,4836952	3,3140076	3,297648	3,2960179	3,295855	3,2958387	3,2958371	3,295836937

Luego f'(1) = 3'295836937...

✱✱✱❁❁✪❁❁✱✱✱

7 Aplicando la definición, calcula f '(0) para la función .f (x) = $2x^4$ - 3x. ¿Es creciente f (x) en x=0?

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(2h^4-3h)-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(2h^3-3)}{h} = \lim_{h\to 0}(2h^3-3) = -3$$

✱✱✱❁❁✪❁❁✱✱✱

8 Demuestra, aplicando la definición, que la función derivada de $10x^3$ es $30x^2$.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{10(x+h)^3-10x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{10(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3)-10x^3}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{10x^3+30x^2h+30xh^2+10h^3-10x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(30x^2+30xh+10h^2)}{h} = \lim_{h\to 0}(30x^2+30xh+10h^2) = 30x^2$$

✱✱✱❁❁✪❁❁✱✱✱

9 Halla la recta tangente a la gráfica de $5x + 20$ en $x = 6$ sin hacer ningún cálculo.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

Como es una función lineal, representa una recta y la tangente a una recta, en cualquier punto, es la misma recta **$y = 5x + 20$**

✱✱✱❁❁✪❁❁✱✱✱

10 Halla la recta tangente a la gráfica de $f(x) = 2x^4 - 3x + 2$ en el punto de abscisa $x=0$.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

La ecuación de la recta tangente a una función f(x) en un punto x = a, en forma punto pendiente es :

$$y - f(a) = f'(a)\,(x - a)$$

para hallarla necesitamos conocer :

❁ $x = a = 0$ (en nuestro caso).

❁ $f(a) = f(0) = 2 \cdot 0^4 - 3\cdot 0+2 = 2$

❁ La pendiente $m = f'(a) = f'(0)$, para lo cual necesitamos conocer primero la derivada primera de la función $f'(x) = 8x^3 - 3$, luego $f'(0) = 8 \cdot 0^3 - 3 = - 3$.

Sustituyendo los valores anteriores en la ecuación :

$y - 2 = -3(x - 0)$; $y - 2 = - 3x$; **$y = - 3x + 2$** (forma explícita) o **$3x + y - 2 = 0$** (forma general)

✱✱✱❁❁✪❁❁✱✱✱

11 Calcula f '(0) para:

(a) $f(x) = (x + 2)^2$.

(b) $f(x) = 2e^x - x$

(c) $f(x) = (\text{sen } x)^2$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

Hallamos primero las derivadas primeras de las funciones en general y luego particularizamos para x = 0.

(a) f ‘(x) = 2(x+2) ⇨ f ‘(0) = 2(0+2) = 4.

(b) f ’(x) = 2 e^x – 1⇨ f ‘(0) = 2 e^0 – 1 = 2 – 1 = 1.

(c) f ‘(x) = 2 senx · cosx ⇨ f ‘(0) = 2 sen0 · cos0 = 2 · 0· 1 = 0.

✱✱✱❁❁✪❁❁✱✱✱

12 Halla una ecuación para la recta tangente a la gráfica de y = e^x en x = 1.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

La ecuación de la recta tangente a una función f(x) en un punto x = a, en forma punto pendiente es :

y – f(a) = f ‘(a) (x – a)

para hallarla necesitamos conocer :

❁ x = a = 1 (en nuestro caso).

❁ f(a) = f(1) = e^1 = e

❁ La pendiente m = f ‘(a) = f ‘(1), para lo cual necesitamos conocer primero la derivada primera de la función f ‘(x) = e^x, luego f ‘(1) = e^1 = e.

Sustituyendo los valores anteriores en la ecuación :

y – e = e(x –1) ; y – e = ex - e ; **y = ex** (forma explícita) o **ex - y = 0** (forma general)

✱✱✱❁❁✪❁❁✱✱✱

13 Si la función V = f(t), con V en litros y t en segundos, expresa el volumen de aire contenido en un globo, ¿qué significa f '(5)?

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

La tasa de variación del volumen de aire a los 5 segundos, es decir la velocidad con que entra/sale el aire en el globo en el segundo quinto

✱✱✱❁❁✪❁❁✱✱✱

14 Halla los puntos críticos de las funciones:

(a) f(x) = $5x^3$ - $30x^2$ - 4

(b) f(x) = $5x^3$ + 30x - 4

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

(a) $f(x) = 5x^3 - 30x^2 - 4$

❂ Hallamos la derivada primera : f '(x) = $15x^2 - 60x$.

❂ Calculamos los valores de x par los que se anula la derivada primera, puntos de tangencia horizontal) : f '(x) = 0, $15x^2 - 60x = 0$, $15x(x - 4) = 0$, x = 0 y x - 4 =0, x = 4.

❂ Los puntos críticos son A(0, f(0)), B(4, f(4)) , es decir como f(0) = - 4 y $f(4) = 5 \cdot 4^3 - 30 \cdot 4^2 - 4 = 320 - 480 - 4 = -164$, son

A (0, - 4) y B(4, - 164)

(b) $f(x) = 5x^3 + 30x - 4$

❂ Hallamos la derivada primera : f '(x) = $15x^2 + 30$.

❂ Calculamos los valores de x par los que se anula la derivada primera, puntos de tangencia horizontal) : f '(x) = 0, $15x^2 + 30 = 0$, $x = \pm\sqrt{\frac{-30}{15}} = \pm\sqrt{-2} \notin \Re$

❂ No tiene puntos críticos pues no se anula la derivada primera, es siempre creciente ya que f '(a) > 0 para todo $a \in \Re$

✱✱✱❆❆✪❆❆✱✱✱

15 Determina dónde son crecientes o decrecientes las funciones del problema anterior.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

(a) Los dos puntos críticos x = 0 y x = 4, dividen la recta real en tres intervalos, en esos intervalos estudiamos el signo de la derivada primera lo que nos dará el crecimiento o decrecimiento de la función :

Intervalos	(- ∞ , 0)	(0, 4)	(4 ,+∞)
$f'(x) = 15x^2 - 60x$	f '(-1) = 15 + 60 = 75 > 0	f '(2) = 60 - 120 = -120 < 0	f '(5) = 375 - 300 = 75 > 0
f (x)	⬀	⬂	⬀

(b) Como no tiene puntos críticos y la primera derivada es siempre es positiva, la función es creciente en su dominio.

✱✱✱❆❆✪❆❆✱✱✱

16 ¿Cuáles de estas funciones tienen un punto crítico en x = 0?

(a) $3x - 3$

(b) sen x

(c) $x^3 + \text{sen } x + \pi$

(d) $2x - \text{sen } x - e^x$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

Para saber si tiene o no un punto crítico hemos de saber si se anula la primera derivada en ese punto ¿ f '(0) = 0 ? :

(a) f(x) = 3x – 3, f '(x) = 3, f '(0) = 3, luego **no es punto crítico**.

(b) f(x) = sen x, f '(x) = cos x, f '(0) = cos 0 = 1, **no es punto crítico**.

(c) f(x) = x^3 + senx + , f '(x) = $3x^2$ + cos x, f '(0) = 0 + cos 0 = 1, **no es punto crítico**.

(d) f(x) = 2x – sen x – e^x, f '(x) = 2 – cos x – e^x , f '(0) = 2 – cos 0 – e^0 = 2 – 1 – 1 = 0, **sí es punto crítico**.

✱✱✱❁❁✪❁❁✱✱✱

17 Halla un polinomio de segundo grado que tenga un mínimo local en x = 3 y que pase por el punto (0, 5) con pendiente - 6.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

El trinomio de segundo grado es f(x) = **a**x^2 + **b**x + **c**, tenemos tres incógnitas **a**, **b** y **c**, luego necesitamos tres ecuaciones, que sacamos de las tres condiciones que cumple el polinomio :

(1) Si tiene un mínimo local en x = 3, ha de cumplirse f '(3) = 0.

(2) Al pasar por (0, 5) se cumple f(0) = 5.

(3) En el punto anterior, x = 0, tiene pendiente – 6, luego la derivada primera en ese punto (que es la pendiente) ha de valer .6, f '(0) = - 6.

Hallemos la derivada primera que vamos a necesitar en los apartados (1) y (3) :

f '(x) = 2**a**x + **b**

Luego :

(1) f'(3) = 0, $2a\cdot 3 + b = 0$, $6a + b = 0$.

(2) f (0) = 5, **c = 5**.

(3) f '(0) = **b = - 6**.

Como de la (3) sabemos que b = - 6, sustituyendo en (1) tenemos a : 6a – 6 = 0, **a = 1**.

El polinomio es **$x^2 - 6x + 5$**.

✱✱✱❁❁✪❁❁✱✱✱

18 Determina un polinomio f(x) de tercer grado que cumpla estos requisitos:

(a) Tiene un máximo local en x = 0.

(b) Tiene un mínimo local en x = 2.

(c) Pasa por los puntos (0, 4) y (1, 0).

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

Semejante al ejercicio anterior, pero, ahora necesitamos cuatro ecuaciones, ya que tenemos cuatro incógnitas :

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Condiciones :

(1) Máximo local en x = 0, P '(0) = 0.

(2) Mínimo local en x = 2, P '(2) = 0.

(3) Pasa por (0, 4), P(0) = 4.

(4) Pasa por (1, 0), P(1) = 0.

Hallamos la primera derivada : P '(x) = $3ax^2 + 2bx + c$, y sustituimos :

(1) P '(0) = 0, c = 0.

(2) P '(2) = 0, $3a\cdot 2^2 + 2b\cdot 2 + c = 0$, $12a + 4b = 0$.

(3) P(0) = 4, d = 4.

(4) P(1) = 0, a + b + c + d = 0.

Y ahora resolvemos el sistema :

Como c = 0 y d = 4, la (4) queda a + b = -4, que con la (2), forma un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas :

$$\left.\begin{array}{r} 12a+4b=0 \\ a+b=-4 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} 12a+4b=0 \\ -4a-4b=16 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Sumando}} 8a=16 \Leftrightarrow a=\frac{16}{8}=2 \Rightarrow b=-4-2=-6$$

Tenemos, pues a = 2, b = - 6, c = 0 y d = 4, con lo que el polinomio buscado es :

$$\mathbf{P(x) = 2x^3 - 6x^2 + 4}$$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

19 Halla los máximos y mínimos locales de la función

$$f(x) = 2x^3 - 24x + 3$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

(1) Hallar la derivada primera : f '(x) = $6x^2 - 24$.

(2) Condición necesaria, hallar los valores que anulan la primera derivada :

$$6x^2 - 24 = 0 \Leftrightarrow 6x^2 = 24 \Leftrightarrow x^2 = \frac{24}{6} = 4 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

(3) Derivada segunda : f "(x) = 12x.

(4) Signo de la derivada segunda en los valores que anulan la primera :

f "(2) = 12 · 2 = 24 > 0 ⇨ **Mínimo en x = 2**, y como f(2) = $2 \cdot 2^3$ –24·2 + 3 = 16- 48 + 3 = 30, el mínimo tiene por coordenadas **(2, 30).**

f "(-2) = 12 · (-2) = - 24 < 0 ⇨ **Máximo en x = -2**, y como f(-2) = $2 \cdot (-2)^3$ –24·(-2) + 3 = -16+ 48 + 3 = 35, el máximo tiene por coordenadas **(-2, 35).**

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

20 Demuestra que la función $f(x) = 3x + e^x - 5$ no tiene máximos ni mínimos locales.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

Si no tiene puntos singulares es por que no cumple la condición necesaria es decir no se anula la derivada primara para ningún valor de x.

Hallamos la primera derivada : f ' (x) = 3 + e^x , si igualamos a cero y resolvemos :

$3 + e^x = 0$, $e^x = -3$, $x = \ln -3$, que no tiene solución, luego la función no tiene máximos ni mínimos locales.

✽✽✪✽✽

21 Para dos números positivos cuyo producto sea 100, ¿cuál es el mínimo valor posible de su suma?

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

Sean : x = primer número, entonces el segundo número es 100/x ya que su producto es 100.

(1) Suma = s(x) = x + 100/x

(2) Derivada primera s ‘(x) = $1 - 100/x^2$.

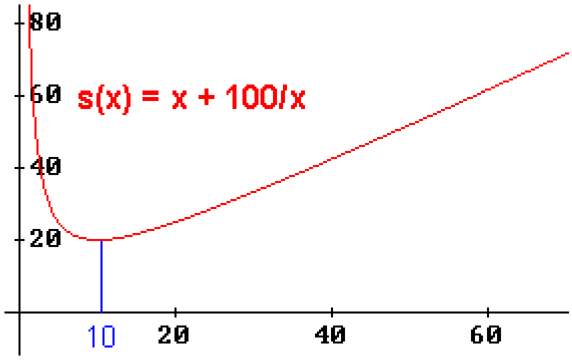
(3) Condición necesaria : s’ (x) = 0 : $1-\frac{100}{x^2}=0 \Leftrightarrow 1=\frac{100}{x^2} \Leftrightarrow x^2=100 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{100}=\pm 10$

(4) Derivada segunda : s “(x) = $200/x^3$.

(5) Como nos pide valores positivos, ha de ser x = 10, pero comprobamos que es mínimo s “(10) = 200/1000 = 0’2 > 0.

Los números buscados son pues iguales: 10 y 10.

Cualesquiera otros números cuyo producto es 100 su suma es mayor de 20 (que suman los dos hallados) como podemos comprobar simplemente representando la función suma y viendo su mínimo :



✽✽✪✽✽