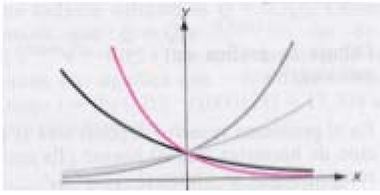
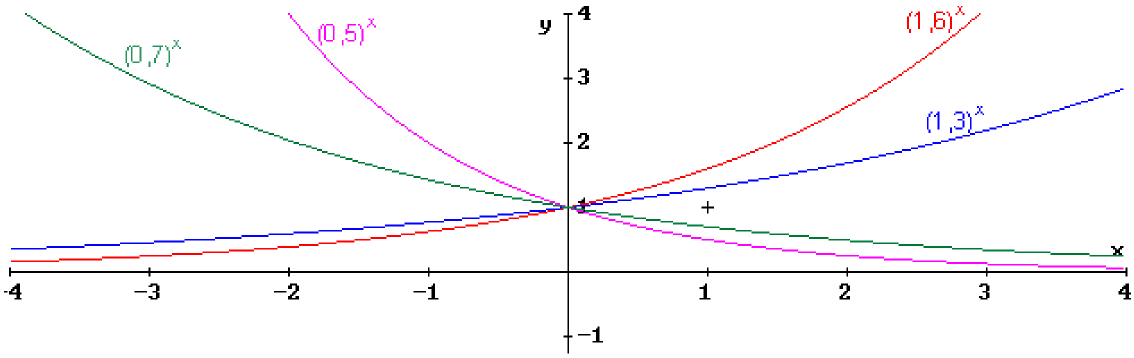
AUTOEVALUACIÓN

1 *En la Figura 12.21 se han representado las funciones exponenciales* $(0{,}5)^x$, $(0{,}7)^x$, $(1{,}3)^x$ *y* $(1{,}6)^x$. *Identifícalas.*

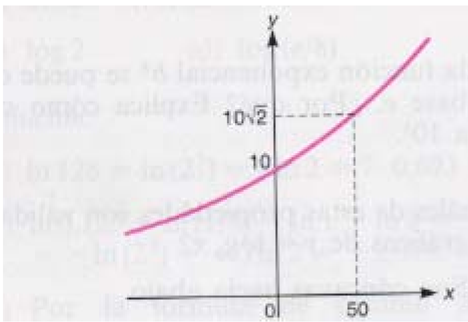


Las que tienen base mayor que uno, serán crecientes, pues al aumentar x aumenta el valor de la función, además de las dos que tienen la base mayor que uno, tendrá mayor pendiente (inclinación) la que tenga mayor base $(1'6)^x$, pues cuanto mayor sea la base más rápido aumentará.

Al contrario, las dos que son decrecientes tienen base menor que uno y la que decrece más rápido(pendiente más negativa) es la de base más pequeña $(0'5)^x$



2 *Halla aproximadamente el tiempo de duplicación de la población de la Figura 12.22. Escribe una fórmula que describa su crecimiento.*



Para t = 0, $P(0) = P_0 = 10$, que es el punto de corte con el eje vertical.

Como para t = 50, P(50) = $10\sqrt{2}$, sustituyendo en la fórmula del tiempo de duplicación :

$$P = P_0 2^{\frac{t}{D}} \Rightarrow 10\sqrt{2} = 10 \cdot 2^{\frac{50}{D}} \Leftrightarrow \frac{10\sqrt{2}}{10} = 2^{\frac{50}{D}} \Leftrightarrow \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{50}{D}} \xrightarrow{\text{Igualando exponentes}} \frac{1}{2} = \frac{50}{D} \Rightarrow D = 100$$

La ecuación que describe el crecimiento es, pues :

$$P = 10 \cdot 2^{\frac{t}{100}}$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

3 *Una población de insectos cuenta con 50.000 y se duplica cada 12 días. ¿Cuántos habrá al cabo de 30 días?*

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

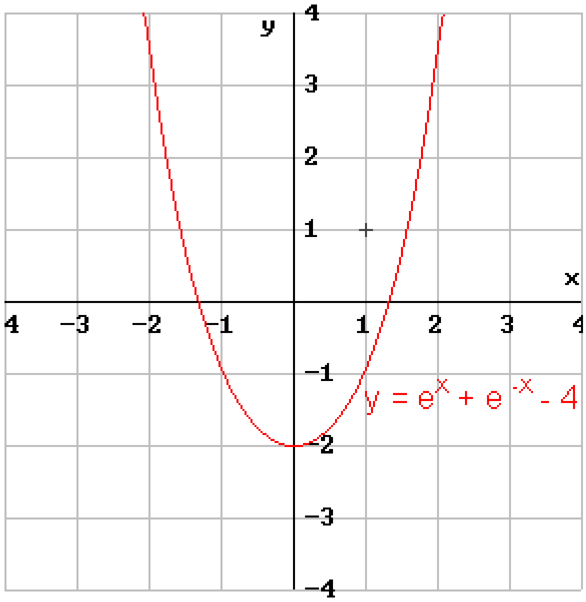
La ecuación que describe el crecimiento de la población es : $P = 50.000 \cdot 2^{\frac{t}{12}}$, sustituyendo en ella el tiempo por 12 días tendremos la población buscada :

$$P(12) = 50.00 \cdot 2^{\frac{30}{12}} = 50.000 \cdot 2^{2'5} = 50.000 \cdot 5'656854 = 282.843 \text{ Individuos}$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

4 *Representa la función* y = $e^{x} + e^{-x} - 4$. *Halla con ayuda de la calculadora los valores aproximados en que corta al eje x.*

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧



Vemos que los dos puntos de corte están en los intervalos (-1’5, -1) y (1, 1’5), para hallarlos utilizamos el método de aproximaciones sucesivas con la calculadora (o con la hoja de cálculo que es más rápido) :

x	f(x)
-1,5	0,7048192
-1	-0,9138387
-1,25	-0,2231522
-1,375	0,2079163
-1,3125	-0,0154029
-1,34375	0,0942574
-1,328125	0,0389342
-1,3203125	0,0116432
-1,3164063	-0,0019102
-1,3183594	0,0048589
-1,3173829	0,0014726
-1,3168946	-0,0002193
-1,3171387	0,0006264
-1,3170167	0,0002037
-1,3169556	-0,0000080

Podemos tomar como punto el punto de corte menor x = -1’31696 y, como la función es simétrica x = 1’31696 para el mayor..

5 *¿Cuáles de estas ecuaciones admiten solución?*

(a) $10^x = e^x$ **(b)** $10^x = e^x$ **(c)** $e^x = e^{-x}$ **(d)** $e^x = 0$.

(a) $10^x = e^x$, tomando logaritmos : x log 10 = x log e, x(1- loge) = 0, x = 0.

(b) $10^x = e^{2x}$, tomando logaritmos : x log 10 = 2x log e, x(1- 2loge) = 0, x = 0.

(c) $e^x = e^{-x}$, x = 0 que no es válida pues el segundo miembro no está definido.

(d) x = -∞, ya que $a^{-\infty} = 0$. No tiene.

6 *Mediante la función $Q = Qob^t$ es posible reproducir el modelo del Ejercicio de aplicación 4 si se escoge una base b adecuada. ¿Cuál? Explica tu respuesta.*

Como $Q = Q_0 \cdot e^{-0'000121t} = Q_0 \cdot b^t \Rightarrow b = e^{-0'000121} \approx 0'999879$, es decir :

$$Q = Q_0 \cdot 0'99879^{\,t}.$$

7 *Interpreta las gráficas de la Figura 12.21 en términos de intereses o de devaluación, según el caso, de un capital inicial.*

⦿Los que son de base mayor que uno representan intereses:

$$(1'3)^x = (1+0'3)^x = \left(1+\frac{30}{100}\right)^x \Rightarrow r = \text{Interés} = 30\%$$

Análogamente $(1'6)^x$, representaría el capital aculado a un interés del 60 %.

⦿ Sin embargo los dos que tiene base negativa representarían devaluaciones:

$$0'5^x = (1-0'5)^x = \left(1-\frac{50}{100}\right)^x \Rightarrow r = \text{Inflacción} = 50\%$$

De forma análoga $0'7^x$ sería una inflación del 30 %

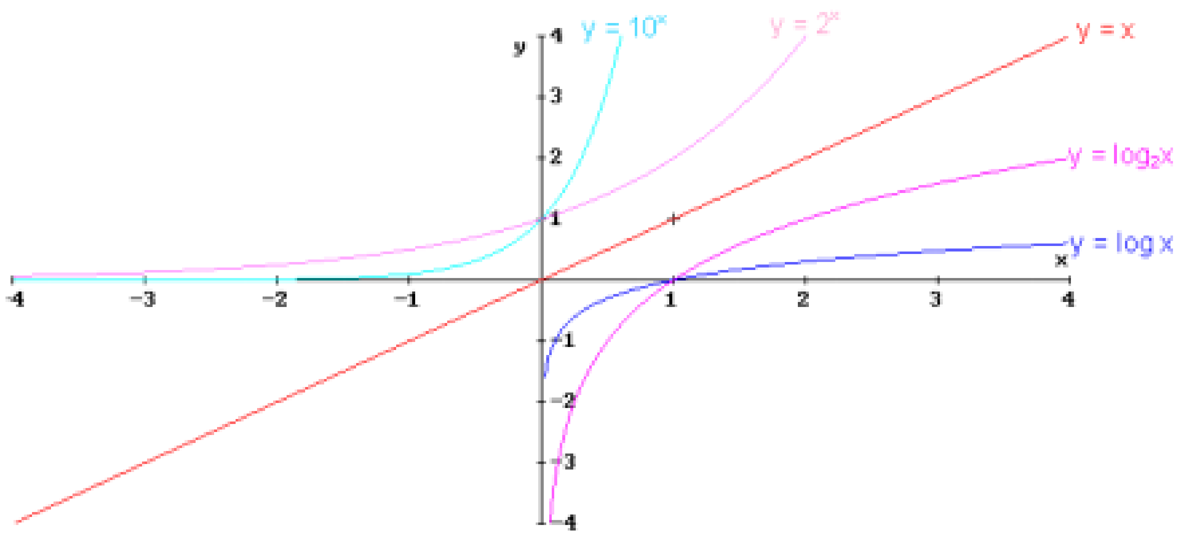
8 *La gráfica de $y = \log_b x$ satisface dos de estas propiedades. ¿Cuáles?*

(a) Es la reflejada de $y = b^x$ en la diagonal del primer y tercer cuadrantes.

(b) Es decreciente en su dominio, que es la semirrecta $x > 0$.

(c) No corta al eje y.

Representemos la función para b = 2 y b = 10 :



(a) Es verdadero, puede apreciarse con las dos azules y las dos de color rosa, ya que la logarítmica y la exponencial son funciones inversas.

(b) No es decreciente sino creciente.

(c) Efectivamente no puede cortar al eje vertical pues para ello x = 0 y $\log_b 0 = -\infty$, no existe.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

9 *¿Cuál de estas igualdades es correcta?*

(a) $\log_2 10 = 100$ **(b)** log 100 = 2 **(c)** log 2 = 100

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

(a) $\log_2 10 = 100$, **falsa** pues, según la definición de logaritmo $2^{100} \neq 10$

(b) log 100 = 2, **verdadera**, pues $10^2 = 100$.

(c) log 2 = 100, **falsa** pues, según la definición de logaritmo $10^{100} \neq 2$.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

10 *Escribe en forma logarítmica las exponenciales:*

(a) $10.000 = 10^4$ **(b)** $3 = 81^{1/4}$ **(c)** $1/36 = 6^{-2}$

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

(a) $10.000 = 10^4 \Leftrightarrow \log 10.000 = 4$.

(b) $3 = 81^{1/4} \Leftrightarrow \log_{81} 3 = ¼$.

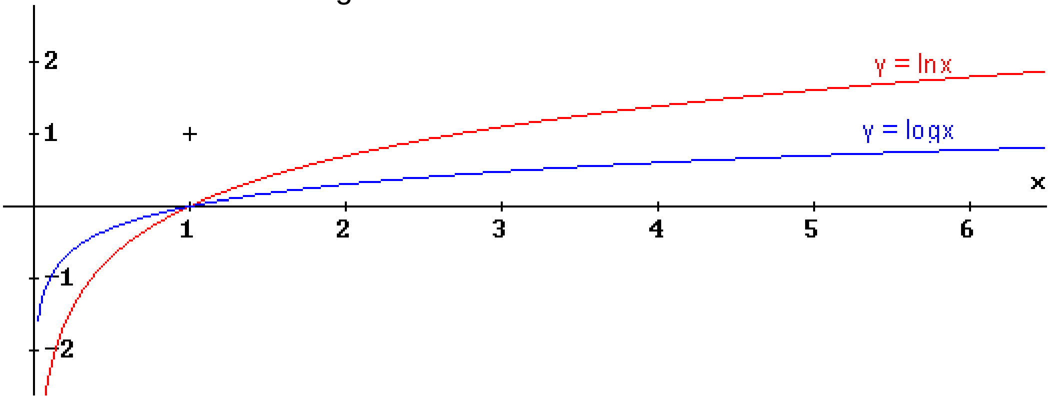
(c) $1/36 = 6^{-2} \Leftrightarrow \log_6(1/36) = -2$.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

11 *¿Puede ser negativo el logaritmo neperiano de un número? ¿Y el logaritmo decimal?*

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

Sí, puede ser negativo el logaritmo neperiano (y = lnx), y el decimal (y = logx) de un número si son menores que la unidad. Como puede apreciarse en la gráfica siguiente, los valores de x < 1 tienen valores negativos de la función :



◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

12 *Decide, sin calculadora, cuál de estos números es mayor:*

(a) log 15 *(b) ln15* *(c) loge* *(d) ln10*

Transformamos los logaritmos decimales en neperianos para poder comparar :

$$\log 15=\frac{\ln 15}{\ln 10} \text{ y } \log e=\frac{\ln e}{\ln 10}=\frac{1}{\ln 10}$$

Como ln10 > 1 (según se deduce del ejercicio anterior), se cumple :

$\ln 15>\ln 10>\frac{\ln 15}{\ln 10}>\frac{1}{\ln 10}$, es decir el orden es **ln 15 > ln 10 > log 15 > log e**

13 *Resuelve las ecuaciones:*

(a) $2^x = 13{,}75$ *(b)* $4^{2x} = 32^{x-2}$ *(c)* $\log x + \log(x - 2) = 1$

(a) $2^x = 13'75 \Leftrightarrow \log 2^x = \log 13'75 \Leftrightarrow x \log 2 = \log 13'75 \Leftrightarrow x = \log 13'75/\log 2 \approx 3'7814$

(b) $4^{2x}=32^{x-2} \Leftrightarrow (2^2)^{2x}=(2^5)^{x-2} \Leftrightarrow 2^{4x}=2^{5x-10} \Rightarrow 4x=5x-10 \Leftrightarrow x=10$

(c) $\log x+\log(x-2)=1 \Leftrightarrow \log x(x-2)=1 \Leftrightarrow x(x-2)=10 \Leftrightarrow x^2-2x-10=0$, ecuación de segundo grado, que resuelta :

$$x=\frac{2\pm\sqrt{4+40}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{44}}{2}=\frac{2\pm 2\sqrt{11}}{2}=\begin{cases}\frac{2+2\sqrt{11}}{2}=1+\sqrt{11}\\ \frac{2-2\sqrt{11}}{2}=1-\sqrt{11}\end{cases}$$

14 *¿Cuáles de estas igualdades son válidas?*

(a) log 35 = (log 7) (log 5) *(b) log49 = 21og 7* *(c) ln 75 = ln 70 + ln 5* *(d)* $\log_2 10 = \log 2$

(a) log35 = log (7 · 5) = log 7 + log 5≠ (log7) ·(log 5) ⇨ **Falsa**.

(b) log 49 = log 7^2 = 2 log 7 ⇨ **Verdadera**.

(c) ln 75 = ln (70 + 5) ≠ ln70 + ln 5 ⇨ **Falsa**.

(d) $\log_2 10$ = (log 10)/ (log 2) = 1/ log2 ≠ log 2 ⇨ **Falsa**.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

15 *¿Cuál es el nivel en decibelios de un avión a reacción que produce una intensidad de 750 watios/m²?*

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

I = 750 watios/m^2

$$D = 10\log\frac{I}{I_0} = 10\log\frac{750}{10^{-12}} = 10\log 7'5\cdot 10^{14} = 148'75 \text{ decibelios}$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

16 *Razona por qué podemos estar seguros de que son falsas las igualdades*

(a) log 25 = 0,18 *(b) ln 1,7 = - 0,88*

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

(a) Como log 10 = 1 y log 100 = log 10^2 = 2, cualquier número N 10< N < 100 ha de tener un logaritmos comprendido entre 1 y 2, es decir 1 < log N < log 2, luego no puede ser 0’18, que es menor que 1.

(b) Como $e^{\ln 1'7}$ = 1’7 > 1 = e^0, ln1’7 > 0, es decir ha de ser positivo, nunca negativo.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈