Resuelve tú (Pág ❷❷❻)

Halla k sabiendo que $5^{3k-4}=125$

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

Como $125 = 5^3$, queda $5^{3k-4} = 5^3 \Rightarrow 3k - 4 = 3 \Leftrightarrow 3k = 7 \Leftrightarrow$ **k = 7/3**

◈◈◈▣▣⦿▣▣◈◈◈

Resuelve tú (Pág ❷❷❽)

Un país tiene una población de 110 millones de habitantes y se espera que se duplique en 25 años. Halla la población que predice ese modelo para dentro de 60 años.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

⦿ D = Tiempo que tarda en duplicarse = 25 años.

⦿ P_0 = Población inicial = 110 millones de habitantes.

⦿ t = 60 años.

Aplicando la fórmula : $P = P_0 \cdot 2^{t/D} = 110 \cdot 2^{60/25} = 110 \cdot 2^{2'4} =$ **580'58 millones**.

◈◈◈▣▣⦿▣▣◈◈◈

Un isótopo radiactivo del galio, utilizado en el diagnóstico de tumores malignos, tiene una semivida de 47 horas. ¿Cuántos miligramos quedarán, de una cantidad inicial de 250 miligramos, al cabo de 7 días?

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

⟐ M_0 = Masa inicial = 250 mg.

⟐ S = Semivida = 47 horas.

⟐ t = Tiempo = 7 días = 7 días · 24 horas = 168 horas.

Aplicamos la fórmula : $M = M_0 \cdot (0'5)^{t/S} = 250\ (0'5)^{168/47} =$ **20'99 mg**.

◈◈◈▣▣⦿▣▣◈◈◈

Resuelve tú (Pág ❷❷❾)

Estima la semivida de un material radiactivo que se desintegra siguiendo la ley $Q = Q_0e^{-0'015t}$, *con t medido en años*

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

La semivida es el tiempo que ha de transcurrir para que la masa del material se reduzca a la mitad, es decir Q = 0'5 Q_o, luego 0'5Q_0 = Q_0 ·$e^{-0'0015t}$, $e^{-0'0015t}$ = 0'5. Para resolver esta ecuación el libro dice por tanteos sucesivos, nosotros aplicaremos logaritmos neperianos a ambos miembros :

$$\ln e^{-0'0015t} = \ln 0'5 \Leftrightarrow -0'0015t = \ln 0'5 \Leftrightarrow t = \frac{\ln 0'5}{-0'0015} = \frac{-0'6931471}{-0'0015} = 462'098 \text{ años} =$$

= **462 años 1 mes 5 días 7 horas 45 min 36 seg**.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

Resuelve tú (Pág ❷❸❶)

Calcula qué población predice para México en el año 2080 el modelo que acabamos de obtener. Comprobarás que la predicción no es razonable.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

La función obtenida en el libro es P = 67'38 · $e^{0'02565t}$, en donde t = 100 años que hay desde el inicio (1980) hasta el 2080, luego eso daría una población:

P = 67'38 · $e^{0'02565 \cdot 100}$ = 67'38 · $e^{2'565}$ = **875'98 millones** de habitantes, que no cabrían físicamente en México.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

En un resto fósil vegetal se detectan 44,5 miligramos de carbono 14, mientras que por comparación con un análogo vivo se calcula que en vida contenía unos 500 miligramos de ese elemento radiactivo. ¿Qué podemos concluir acerca de la antigüedad de ese fósil?

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

⊙ **Q_0** = Masa del isótopo de C-14 en vida = 500 mg.

⊙ **Q** = Masa de C –14 detectada en el fósil = 44'5.

Para hallar el tiempo aplicamos la fórmula : Q = Q_0 · $e^{-0'000121t}$, 44'5 = 500 · $e^{-0'000121t}$ y despejamos el tiempo :

$$e^{-0'000121t} = \frac{44'5}{500} \Leftrightarrow \ln e^{-0'000121t} = \ln 0'089 \Leftrightarrow -0'000121t = -2'419119 \Leftrightarrow t = \frac{-2'4191189}{0'000121} = 19993 \text{ años}$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

Resuelve tú (Pág ❷❸❷)

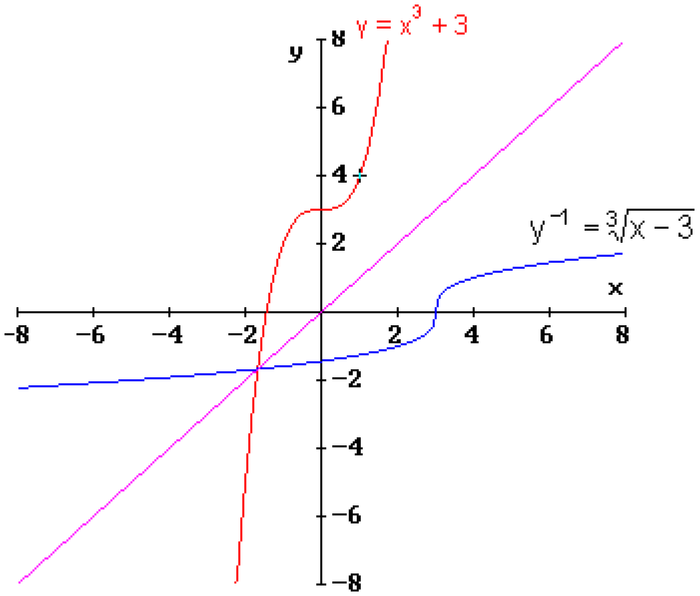
Halla la función inversa de $y = x^3 + 3$. Dibuja una gráfica aproximada de ambas con ayuda de la calculadora.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

$y = x^3 + 3$, despejamos x : $x^3 = y - 3 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y-3} \Rightarrow$ intercambiando variables :

$$y^{-1} = \sqrt[3]{x-3}$$

Las representaciones :



Resuelve tú (Pág ❷❸❻)

Halla el valor k que cumple la ecuación 67'38 e^{5k} = 76'60, *que aparecía en el Ejercicio de aplicación 5.*

$$67'38e^{5k} = 76'60 \Leftrightarrow e^{5k} = \frac{76'60}{67'38} \Leftrightarrow \ln e^{5k} = \ln 1'13684 \Leftrightarrow 5k = 0'128 \Leftrightarrow k = \frac{0'128}{5} = 0'0256497$$

Resuelve tú (Pág ❷❸❼)

Calcula el nivel en decibelios de una conversación normal cuya intensidad es de 3 x 10 $^{-6}$ vatios/m^2.

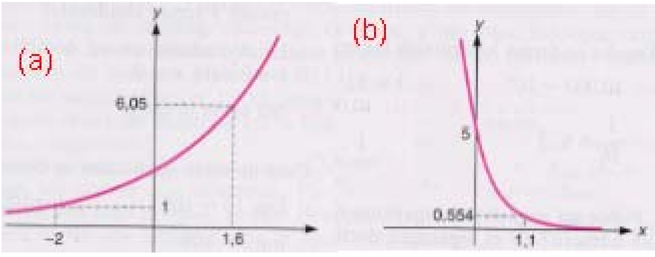
I = 3 x 10^{-6} vatios/m^2.

$I_0 = 10^{-12}$ vatios/m^2.

$$D = 10\log\frac{I}{I_0} = 10\log\frac{3x10^{-6}}{10^{-12}} = 10\log 3x10^{6} = 10(\log 3 + 6) = 10(0'48 + 6) =$$ **64'8 decibelios**.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1 *Para cada una de estas curvas escribe una función de la forma* Ab^X *y otra de la forma* Ce^{KX} *que la tengan por gráfica.*



(a)

☑ f(x) = A b^x

Como f(-2) = 1 y f(1'6) = 6'05, disponemos de dos ecuaciones para hallar las dos incógnitas A y b :

1 = A b^{-2} y 6'05 = A b $^{1'6}$, dividimos una por otra : $\frac{6'05}{1}=\frac{A\cdot b^{1'6}}{A\cdot b^{-2}}\Leftrightarrow 6'05=b^{1'6+2}=b^{3'6}$ y, para hallar b : $6'05=b^{\frac{18}{5}}\Leftrightarrow b=6'05^{\frac{5}{18}}=\sqrt[18]{6'05^5}=1'649$, o bien aplicando logaritmos :

$$\log 6'05=3'6\log b\Leftrightarrow \log b=\frac{\log 6'05}{3'6}=0'2171542\Leftrightarrow b=10^{0'2171542}\approx 1'649$$

Para calcular A, sustituimos b en cualesquiera de las dos originales :

$$1=A\cdot 1'649^{-2}\Leftrightarrow A=1'649^2=2'72$$

Luego **f(x) = 2'72 · 1'649 ^{x}**.

☑ g(x) = C e ^{kx}

Como antes, sustituimos los dos puntos conocidos y resolvemos el sistema exponencial formado :

1 = C e $^{-2k}$ y 6'05 = C $e^{1'6k}$, dividimos una entre otra : $6'05=\frac{C\cdot e^{1'6k}}{C\cdot e^{-2k}}=e^{3'6k}$ y, para despejar k aplicamos logaritmos neperianos : $\ln 6'05=\ln e^{3'6k}=3'6k\Leftrightarrow k=\frac{\ln 6'05}{3'6}\approx\frac{1'8}{3'6}=\frac{1}{2}$

Conocido k = ½, hallamos C sustituyendo su valor en la primera :

$$1=C\cdot e^{-2\cdot\frac{1}{2}}=C\cdot e^{-1}\Rightarrow C=e \text{ y la función buscada es : } \mathbf{g(x) = e\cdot e^{x/2} = e^{1+x/2}}.$$

(b)

☑ $f(x) = A\,b^x$

Como $f(0) = 5$ y $f(1'1) = 0'554$, disponemos de dos ecuaciones para hallar las dos incógnitas A y b :

$5 = A\,b^0$ y $0'554 = A\,b^{1'1}$, dividimos una por otra : $\frac{0'554}{5} = \frac{A \cdot b^{1'1}}{A \cdot b^0} \Leftrightarrow 0'1108 = b^{1'1}$ y, para hallar b :

$0'1108 = b^{\frac{11}{10}} \Leftrightarrow b = 0'1108^{\frac{10}{11}} = \sqrt[11]{0'1108^{10}} = 0'135$, o bien aplicando logaritmos :

$$\log 0'1108 = 1'1 \log b \Leftrightarrow \log b = \frac{\log 0'1108}{1'1} = -0'8686 \Leftrightarrow b = 10^{-0'8686} \approx 0'135$$

Para calcular A, sustituimos b en cualesquiera de las dos originales :

$$5 = A \cdot 0'135^0 \Leftrightarrow A = 5$$

Luego **$f(x) = 5 \cdot 0'135^{x}$**.

☑ $g(x) = C\,e^{kx}$

Como antes, sustituimos los dos puntos conocidos y resolvemos el sistema exponencial formado :

$5 = C\,e^0$ y $0'554 = C\,e^{1'1k}$, dividimos una entre otra : $\frac{0'554}{5} = \frac{C \cdot e^{1'1k}}{C \cdot e^0} = e^{1'1k}$ y, para despejar k aplicamos logaritmos neperianos : $\ln 0'1108 = \ln e^{1'1k} = 1'1k \Leftrightarrow k = \frac{\ln 0'1108}{1'1} \approx \frac{-2'2}{1'1} = -2$

Conocido k = - 2, hallamos C sustituyendo su valor en la primera :

$$5 = C \cdot e^0 \Rightarrow C = 5 \text{ y la función buscada es : } \mathbf{g(x) = 5 \cdot e^{-2x}}.$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

2 *Halla x en cada una de estas ecuaciones:*

(a) $5^{x^2} = 5^{3x-2}$ **(b)** $9^x = 3^{x-3}$ **(c)** $1.000^{x-2} = 100^{3x}$

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

(a) $5^{x^2} = 5^{3x-2}$,como las bases son iguales, igualamos los exponentes y resolvemos la ecuación de 2º grado resultante :

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

(b) $9^x = 3^{x-3} \Leftrightarrow (3^2)^x = 3^{x-3} \Leftrightarrow 3^{2x} = 3^{x-3} \Rightarrow 2x = x - 3 \Leftrightarrow x = 3$

(c) $1000^{x-2} = 100^{3x} \Leftrightarrow (10^3)^{x-2} = (10^2)^{3x} \Leftrightarrow 10^{3x-6} = 10^{6x} \Rightarrow 3x - 6 = 6x \Leftrightarrow -6 = 3x \Leftrightarrow x = \frac{-6}{3} = -2$

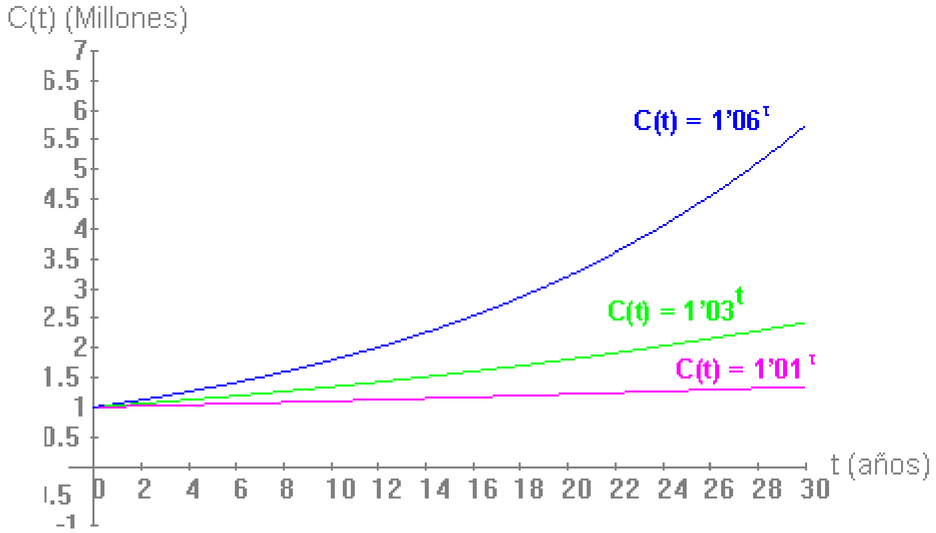
3 *Un capital de 1 millón, invertido al k % de interés simple, se convierte en t años en* $\left(1+\frac{k}{100}\right)^t$ *millones. Dibuja en una gráfica la evolución de ese millón según se invierta:*

(a) al 6 % *(b) al 3 %* *(c) al 1%*

(a) C(t) = (1+0’06)^t ; **C(t) = 1’06^t**

(b) C(t) = (1+0’03)^t ; **C(t) = 1’03^t**

(c) C(t) = (1+0’01)^t ; **C(t) = 1’01^t**



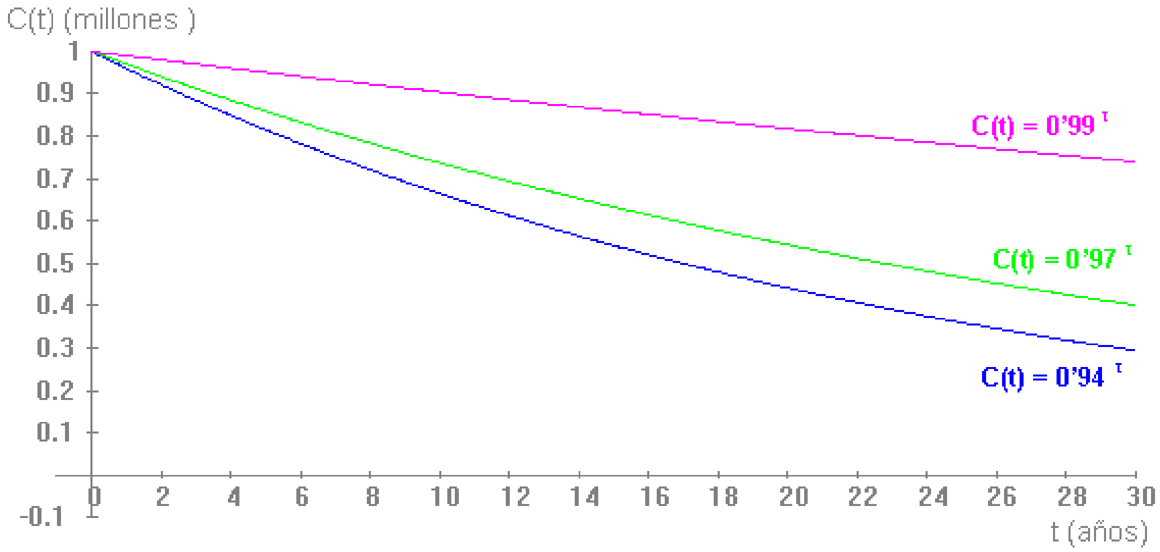
4 *Si un capital inicial de 1 millón de pesetas se ve sometido a una inflación del k % anual, el poder adquisitivo de ese millón desciende. A los t años viene dado por* $\left(1-\frac{k}{100}\right)^t$ *. Dibuja en una gráfica ese poder adquisitivo según que la inflación sea:*

(a) 6 % *(b) 3 %* *(c) 1%*

(a) C(t) = (1- 0’06)^t ; **C(t) = 0’94 ^{t}**

(b) C(t) = (1- 0’03)^t ; **C(t) = 0’97 ^{t}**

(c) C(t) = (1- 0’01)^t ; **C(t) = 0’99 ^{t}**



5 *Ensayando con paciencia en la calculadora, encuentra con dos cifras decimales un valor aproximado del punto x en el que $2^x = x^3$ (Fig. 12.4.a).*

Para acotar soluciones ponemos la ecuación $2^x – x^3 = 0$, para x = 1 , 2 – 1 = 1 > 0, para x = 2 , 4 – 8 = - 4 < 0, luego una solución está entre 1 y 2, procedemos por aproximaciones sucesivas en una hoja de cálculo que es más rápido, hallando los valores medios de los intervalos en que cambia de signo :

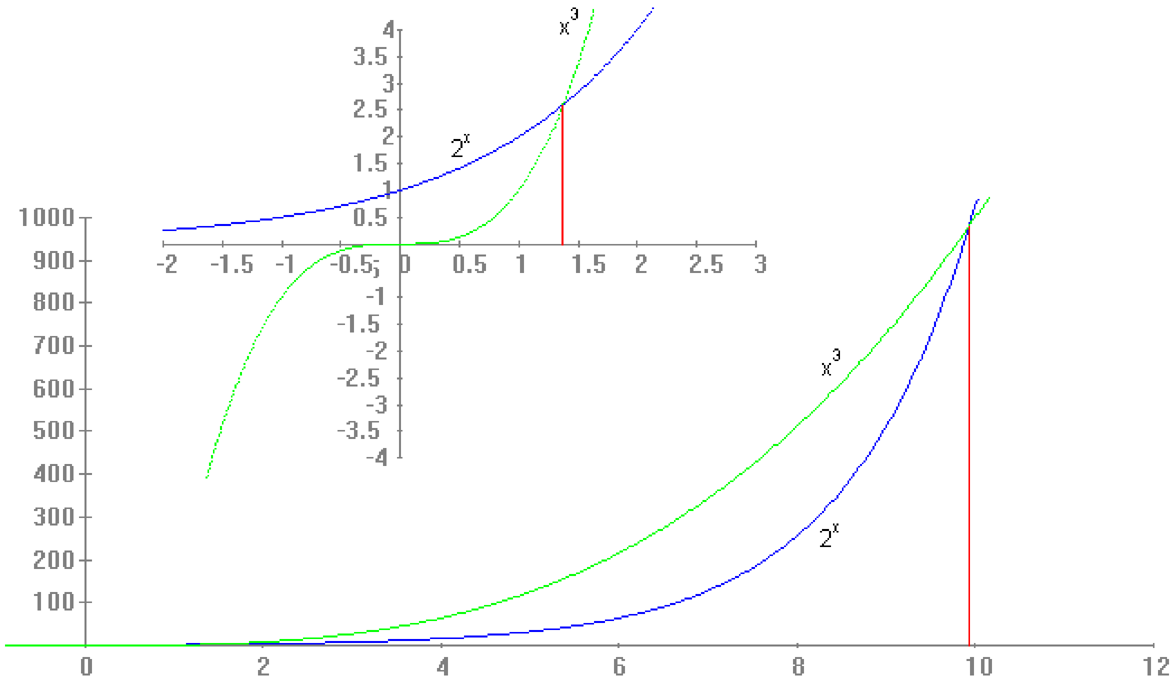
x	2^x	x^3	Diferencia
1	2	1	1,0000
1,5	2,8284271	3,375	-0,5466
1,25	2,3784142	1,953125	0,4253
1,375	2,5936791	2,5996094	-0,0059
1,3125	2,4837156	2,2609863	0,2227
1,34375	2,5381019	2,4263611	0,1117
1,359375	2,56574	2,5119896	0,0538
1,3671875	2,5796717	2,5555491	0,0241
1,373	2,590086	2,5882821	0,0018
1,374	2,5918819	2,5939416	-0,0021

El valor buscado se halla entre 1’373 y 1’374, como se nos pide con dos cifras decimales **x = 1’37**.

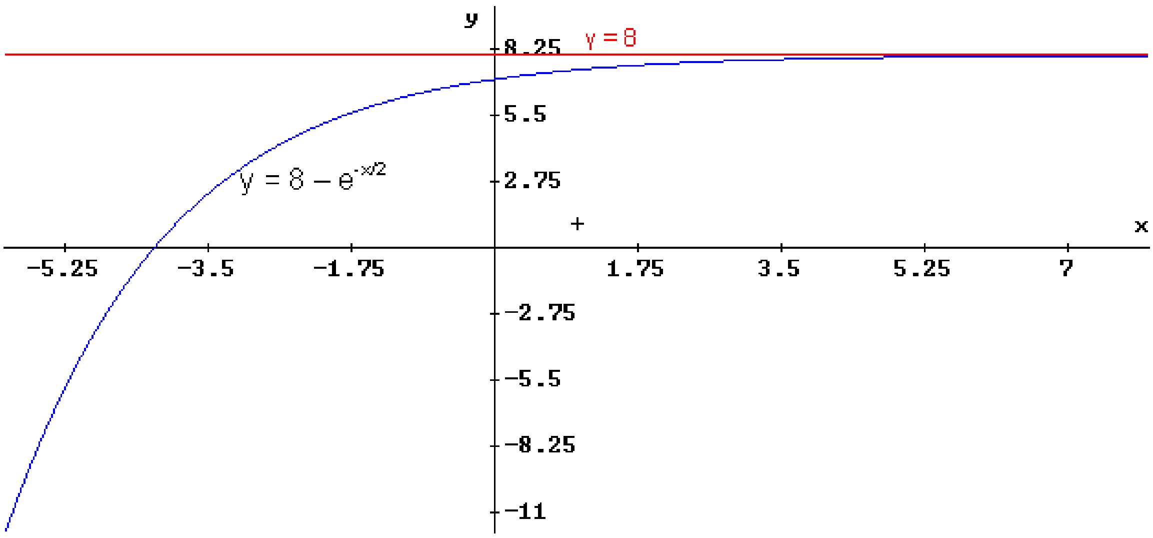
Como para x = 9, $2^9 - 9^3 = -217$, y para x = 10, $2^{10} – 10^3 = 24$, otro de los valores estará comprendido entre 9 y 10, con la hoja de cálculo, procedemos por aproximaciones sucesivas :

x	2^x	x^3	Diferencia
9,5	724,07734	857,375	-133,2977
9,75	861,07793	926,85938	-65,7814
9,875	939,01214	962,9668	-23,9547
9,9375	980,58576	981,36694	-0,7812
9,96875	1002,0578	990,65427	11,4035
9,953125	991,26364	986,00331	5,2603
9,9453125	985,91024	983,68331	2,2269
9,9394531	981,91416	981,94569	-0,0315
9,94	982,28646	982,10778	0,1787
9,9395	981,94608	981,95959	-0,0135

Otro de los valores, con dos cifras decimales que cumple la ecuación es **x = 9'93**
Lo podemos ver representando ambas funciones y observando los puntos de corte :



6 *Dibuja la gráfica de* y = 8 – $e^{-x/2}$. *¿Tiene asíntotas?*



Sí, una asíntota horizontal y = 8

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

7 *En el problema resuelto 4, ¿cuál será la población de bacterias tras 20 horas? ¿Es realista el resultado que se obtiene?*

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

P_0 = población inicial = 500 bacterias.

D = tiempo de duplicación = 30 minutos.

t = 20 horas = 20 · 60 = 1 200 min.

Aplicamos la fórmula de crecimiento exponencial :

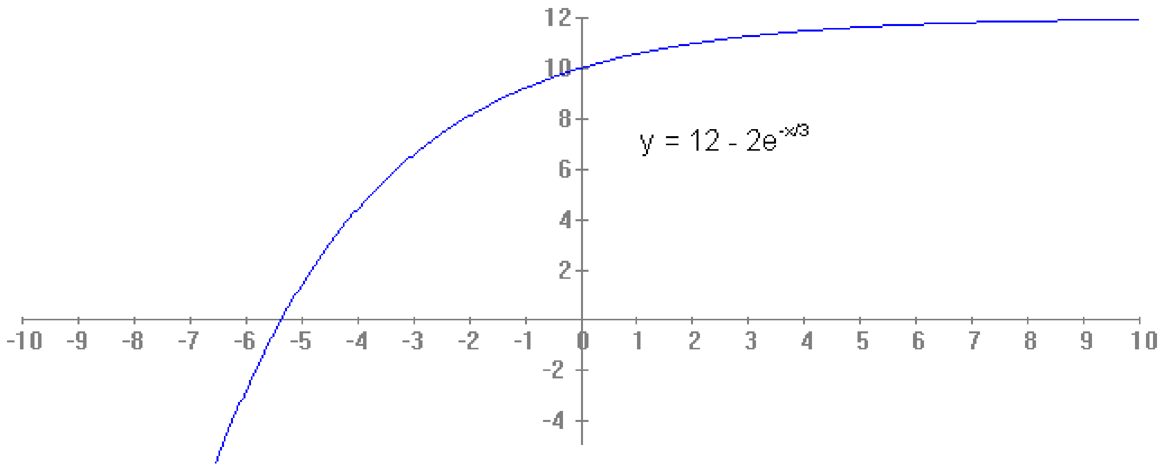
$P = P_0 \cdot 2^{t/D} = 500 \cdot 2^{1200/30} = 500 \cdot 2^{40} = 5'49 \times 10^{14}$ bacterias.

No puedo imaginarme ese número y no sé si tendrían forma de sobrevivir tal cantidad de bacterias.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

8 *Representa la función* $y = 12 - 2e^{-x/3}$.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧



◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

9 *Con los mismos datos del Ejercicio de aplicación 5, ¿es correcto el modelo* $P = 67{,}38(1{,}01)^t$ *? ¿Y el modelo* $P = 67{,}38(1{,}04)^t$ *?*

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

Consideramos un modelo correcto si se ajusta a los datos experimentales, es decir si al aplicarlo obtenemos los datos obtenidos por la experiencia. Vamos a comprobarlo disponiendo los datos en forma de tabla :

Año	1980	1981	1982	1983	1984	1985
Población	67’38	69’13	70’93	72’77	74’66	76’60
t	0	1	2	3	4	5
$67'38(1'01)^t$	67’38	68’05	68’73	69’42	70’12	70’82
$67'38(1'04)^t$	67’38	70’08	72’89	75’79	78’83	81’99
$(E_a)_1 = P - P_1$	0	1’08	2’2	3’35	4’54	5’78
$(E_a)_2 = P - P_2$	0	- 0’95	- 1’96	- 3’02	- 4’17	- 5’39
$(E_r)_1 = 100 \cdot (E_a)_1/P$	0 %	+ 1’56 %	+ 3’1 %	+ 4’6 %	+ 6’08 %	+ 7’55 %
$(E_r)_1 = 100 \cdot (E_a)_1/P$	0 %	- 1’37 %	- 2’76 %	- 4’15	- 5’59 %	- 7’04 %

$P_1(0) = 67'38 \cdot (1'01)^0 = 67'38.$
$P_1(1) = 67'38 \cdot (1'01)^1 = 68'05.$
$P_1(2) = 67'38 \cdot (1'01)^2 = 68'73.$
$P_1(3) = 67'38 \cdot (1'01)^3 = 69'42.$
$P_1(4) = 67'38 \cdot (1'01)^4 = 70'12.$
$P_1(5) = 67'38 \cdot (1'01)^5 = 70'82.$

$P_2(0) = 67'38 \cdot (1'04)^0 = 67'38.$
$P_2(1) = 67'38 \cdot (1'04)^1 = 70'08.$
$P_2(2) = 67'38 \cdot (1'04)^2 = 72'89.$
$P_2(3) = 67'38 \cdot (1'04)^3 = 75'79.$
$P_2(4) = 67'38 \cdot (1'04)^4 = 78'83.$
$P_2(5) = 67'38 \cdot (1'04)^5 = 81'99.$

El aceptarlo o no depende del “*error que estemos dispuestos a soportar* ”, en las cuatro últimas filas se han tabulado los errores absolutos y relativos (los signos significan por exceso(-) y por defecto (+)); vemos que a medida que transcurren los años los modelos teóricos se diferencian más de los datos reales (debido a su carácter exponencial) luego, yo rechazaría ambos modelos, el primero por defecto y el segundo por exceso.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

10 *Toda función exponencial b^x se puede escribir en base e. ¿Por qué? Explica cómo se hace para 10^x .*

✧✧✧⌗⌗⌖⌗⌗✧✧✧

Sea b^x = M, aplicando la definición de logaritmo $\log_b M = x$, si ahora realizamos un cambio de base a base e :

$$\mathrm{Log}_b M = \log_b e \cdot \ln M = x, \text{ y tomando los dos últimos miembros :}$$

$$\log_b e \cdot \ln M = x \Leftrightarrow \ln M = \frac{x}{\log_b e} \xrightarrow{\text{Definición de logaritmo}} M = e^{\frac{x}{\log_b e}} = b^x \text{(ya que } b^x = M)$$

Si hacemos b = 10, queda : $10^x = e^{\frac{x}{\log e}} \approx e^{\frac{x}{0'434294...}}$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

11 *¿Cuáles de estas propiedades son válidas para las gráficas de $y = \log_b x$?*

(a) Son cóncavas hacia abajo

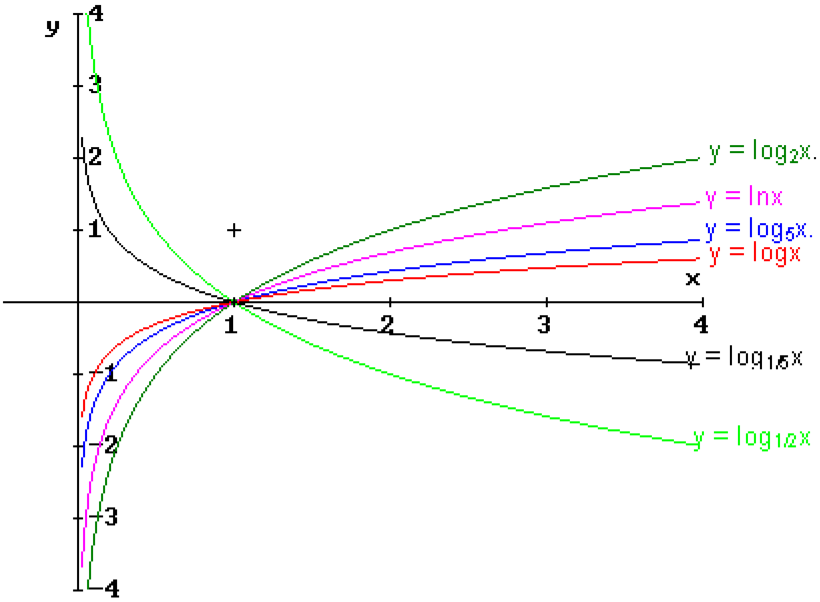
(b) Pasan todas por el punto (1, 0)

(c) No tienen máximos ni mínimos relativos.

✧✧✧⌗⌗⌖⌗⌗✧✧✧

En la gráfica siguiente se ha representado la función logarítmica en seis bases diferentes :

$y = \log x$
$y = \log_5 x$.
$y = \log_2 x$.
$y = \ln x$
$y = \log_{1/2} x$
$y = \log_{1/5} x$



(a) No, son cóncavas hacia abajo las de base mayor que uno y cóncavas hacia arriba las de base comprendida entre cero y uno.

(b) Todas pasan por el punto (1,0) ya que $\log_b 1 = 0$ para cualquier b .

(c) No tienen máximos ni mínimos relativos pues son o bien siempre crecientes (b >1) o decrecientes (b <1).

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

1 2 *Escribe en forma de logaritmos las exponenciales:*

(a) $81 = 3^4$ *(b)* $2 = 8^{1/3}$

✧✧✧⌗⌗⌖⌗⌗✧✧✧

(a) $81 = 3^4 \Leftrightarrow \log_3 81 = 4$

(b) $2 = 8^{1/3} \Leftrightarrow \log_8 2 = 1/3$

13 *¿Cuál de estas igualdades es correcta?*

(a) $\log 5 = 1/2$ **(b)** $10^{\log\pi} = e^{\ln\pi}$

(a) log5 = 0’69897 ≠ ½ . Es falsa.

(b) $10^{\log\pi} = \pi = e^{\ln\pi}$. Es correcta .

14 *Resuelve las ecuaciones:*

(a) $5^x = 314{,}25$ *(b)* $e^{2x} = 10^{x-2}$ *(c)* $100^x = 10^{3x+2}$

(a) $5^x = 314'25$, aplicando logaritmos a ambos miembros : $\log 5^x = \log 314'25$, $x \log 5 = \log 314'25$, y despejando x :

$$x = \frac{\log 314'25}{\log 5} = \frac{2'4972753}{0'69897} = 3'5727932$$

(b) $e^{2x} = 10^{x-2}$, aplicando logaritmos neperianos $\ln(e^{2x}) = \ln(10^{x-2})$, $2x = (x-2)\ln 10$, ecuación de primer grado en donde despejamos x :

$$2x - x\ln 10 = -2\ln 10 \Leftrightarrow x(2 - \ln 10) = -2\ln 10 \Leftrightarrow x = \frac{-2\ln 10}{2 - \ln 10} = \frac{-4'6051702}{-0'302585} = 15'219422$$

(c) $100^x = 10^{3x+2} \Leftrightarrow (10^2)^x = 10^{3x+2} \Leftrightarrow 10^{2x} = 10^{3x+2} \Leftrightarrow 2x = 3x + 2 \Leftrightarrow 3x - 2x = -2 \Leftrightarrow x = -2$.

15 *Resuelve las ecuaciones:*

(a) $3^x + 3^{-x} = 2$ *(b)* $\log(x+8) - \log(x-1) = 1$ *(c)* $\ln(x^3) = 7{,}5$.

(a) $3^x + 3^{-x} = 2$, hacemos el cambio de variable $3^x = y$:

$$3^x + \frac{1}{3^x} = 2 \Leftrightarrow y + \frac{1}{y} = 2 \Leftrightarrow y^2 + 1 = 2y \Leftrightarrow y^2 - 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow (y-1)^2 = 0 \Leftrightarrow y = 1 = 3^x = 3^0 \Leftrightarrow x = 0$$

(b) log(x+8) – log(x – 1) = 1 $\log\frac{x+8}{x-1} = 1 \Leftrightarrow 10 = \frac{x+8}{x-1} \Leftrightarrow 10x - 10 = x + 8 \Leftrightarrow 9x = 18 \Leftrightarrow x = \frac{18}{9} = 2$

(c) $\ln(x^3)$ = 7'5 ⇔, 3lnx = 7'5 ⇔ lnx = 2'5⇔ x = $e^{2'5}$ = $e^{5/2}$ = $\sqrt{e^5}$ = 12'182494.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈