Resuelve tú (pág ❷❶❺)

Un animal cuya respiración viene expresada por la fórmula :

$$V = 1'2 - 0'2\cos\frac{\pi t}{3}$$

con V en litros y t en segundos, ¿ cada cuánto tiempo inspira aire? ¿ Cuáles son el volumen máximo y mínimo de aire en sus pulmones? ¿ En qué fase de la respiración se encuentra cuando t = 12 seg?

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

❁ $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow T = 6$ segundos

❁ $V_{máx}$ si $\cos\frac{\pi t}{3} = 0$, luego $V_{Máx}$ = 1'2 litros, y el volumen ser mínimo cuando el $\cos\frac{\pi t}{3} = 1$ que es su valor máximo es decir V_{min} = 1'2 – 0'2 = 1 litro.

❁ $V(12) = 1'2 - 0'2\cos\frac{12\pi}{3} = 1'2 - 0'2\cos 4\pi = 1'2 - 0'2 = 1\text{litro} = V_{min}$, es decir está al final de la fase de espiración cuando el volumen es mínimo.

✧ ✧ ✧ ❁ ❁ ✪ ❁ ❁ ✧ ✧ ✧

PROBLEMAS PROPUESTOS

1 ¿Cuáles de estas funciones son periódicas? Halla el período de las que lo sean:

(a) $(\text{sen}x)^2$.

(b) x + senx.

(c) senx – cos x.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

(a) Como senx es una función periódica sen^2x también lo será. Como al elevar al cuadrado los valores negativos de la función se hacen positivos, la función se convierte en par, el período se reduce a la mitad es decir T = 180º= π rad.

(b) Como es la suma de una función periódica (x) y otra periódica el resultado es una función no periódica.

(c) Las dos funciones son periódicas de periodo T = 360º= 2π, luego ese será el período de la diferencia.

✧ ✧ ✧ ❁ ❁ ✪ ❁ ❁ ✧ ✧ ✧

2 Usando la periodicidad y valores de las razones trigonométricas de ángulos sencillos, halla sin calculadora:

(a) $\operatorname{sen}\frac{29\pi}{3}$

(b) $\cos\frac{-35\pi}{4}$

(c) $\operatorname{tg}\frac{215\pi}{3}$

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

(a) Como $\frac{29\pi}{3} : 2\pi = \frac{29}{6} = 4'8\widehat{3}$, hemos dado 4 vueltas completas, por tanto el ángulo es :

$$\frac{29\pi}{3} - 4(2\pi) = \frac{29\pi - 24\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

$$\operatorname{sen}\frac{29\pi}{3} = \operatorname{sen}\frac{5\pi}{3} = \operatorname{sen}300^o = \operatorname{sen}(360^o – 60) = \operatorname{sen}(2\pi - \frac{\pi}{3}) = –\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = –\operatorname{sen}60^o = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(b) Dividimos el ángulo en radianes entre una vuelta completa : $\frac{35\pi}{4} : 2\pi = \frac{35}{8} = 4'375$, luego también damos 4 vueltas completas y el ángulo es equivalente :

$\frac{35\pi}{4} - 4(2\pi) = \frac{35\pi - 32\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$, que al ser negativo equivale a un ángulo positivo $2\pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

$$\cos–\frac{35\pi}{4} = \cos–\frac{3\pi}{4} = \cos\frac{5\pi}{4} = \cos 225^o = \cos(\pi + \frac{\pi}{4}) = \cos(180^o + 45) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\cos 45^o = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

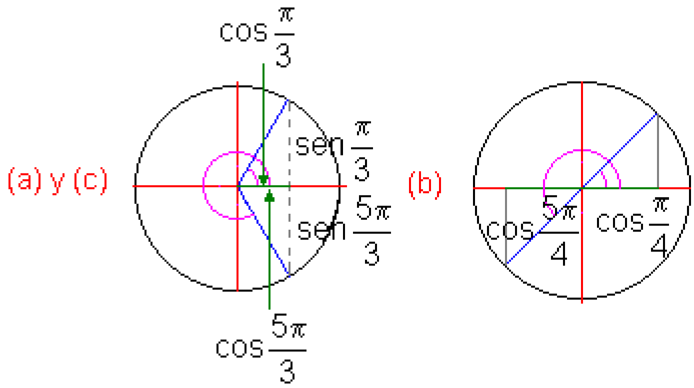
(c) Para ver las vueltas que hemos dado se divide la amplitud del ángulo por la amplitud de una vuelta completa ($360^o = 2\pi$) :

$\frac{215\pi/3}{2\pi} = \frac{215}{6} = 35'8\widehat{3}$, es decir damos 35 vueltas completas, quedando un ángulo de :

$\frac{215\pi}{3} - 35(2\pi) = \frac{215\pi - 210\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} = 300^o$, el mismo ángulo que en el caso **(a)**, por tanto :

$$\operatorname{tg}\frac{215\pi}{3}=\operatorname{tg}\frac{5\pi}{3}=\operatorname{tg}300^{o}=\operatorname{tg}\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\operatorname{tg}(360^{o}-60^{o})=-\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=-\operatorname{tg}60^{o}=-\sqrt{3}$$

En las figuras siguientes podemos apreciar la justificación de las últimas igualdades :



En donde puede apreciarse que sen300º = - sen60º, cos 300º = cos 60º y por tanto tg 300º = - tg 60º y en la segunda figura que cos 225º = - cos 45º.

✧ ✧ ✧ ❁ ❁ ❂ ❁ ❁ ✧ ✧ ✧

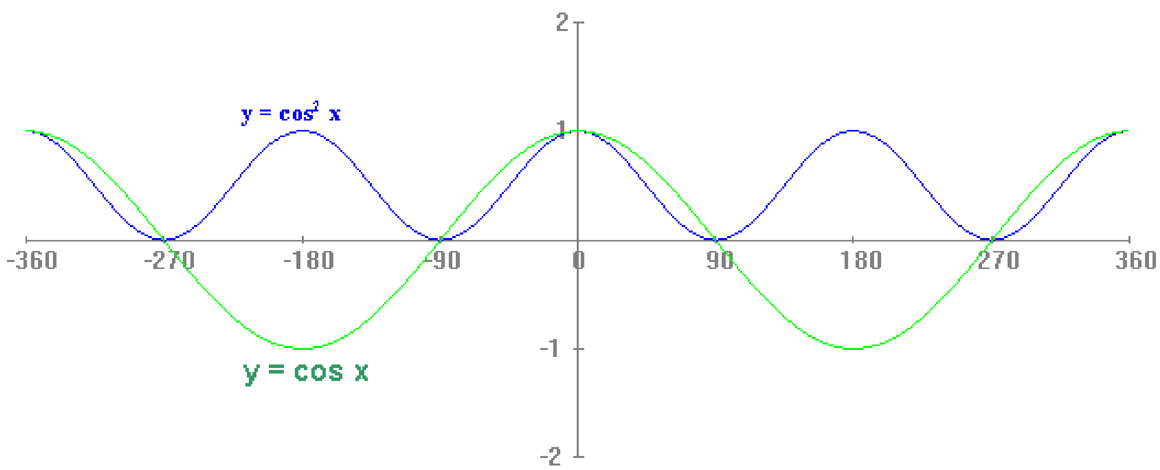
3

(a) A la vista de la gráfica de cos x (Figura 11.9.b), dibuja la gráfica de y = cos² x.

(b) ¿Cuántos máximos tiene?

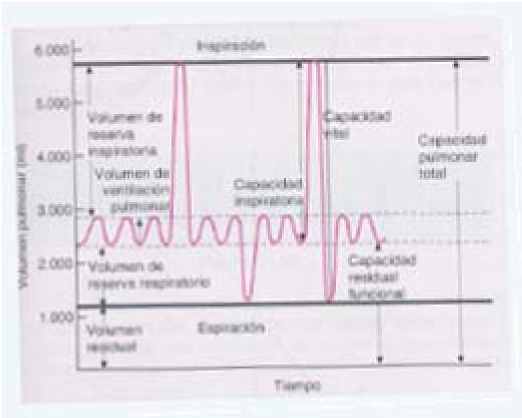
✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

(a) Al elevar el coseno al cuadrado, los valores negativos se hacen positivos y por tanto todas las “ ondas “ están en el / o por encima del eje horizontal :



(b) Infinitos máximos, cada 180º a partir de 0º a derecha e izquierda.

4 Interpreta la gráfica de la Figura 11.25, donde las zonas de ondas periódicas de amplitud 500 ml (0,5 litros) corresponden a la descripción del Ejercicio de aplicación 1.



Es una completa representación del volumen pulmonar(en ml) con respecto al tiempo, en donde puede observarse :

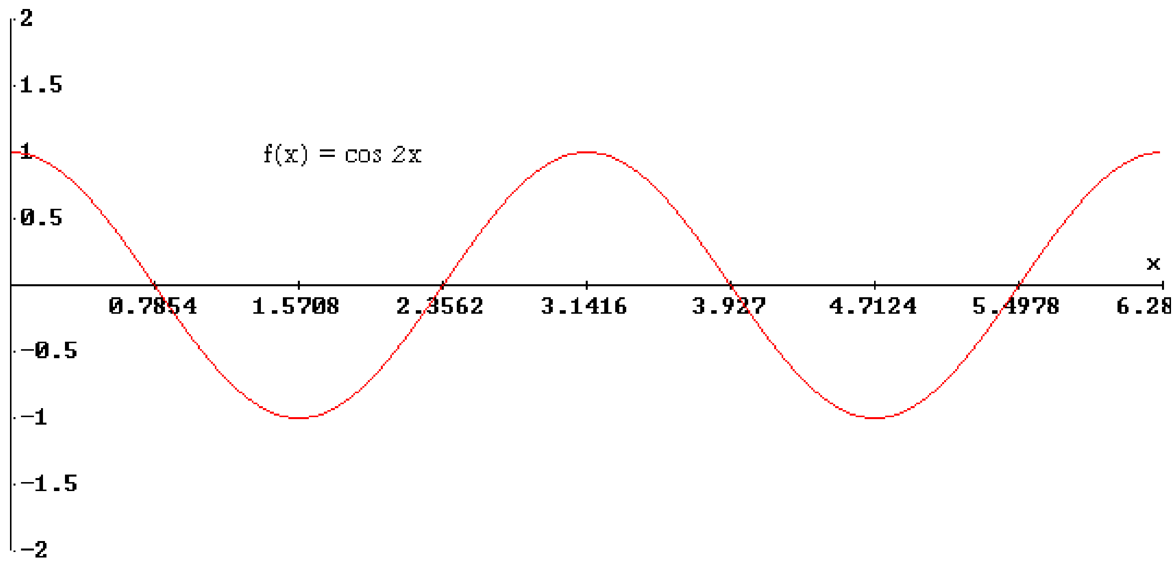
- *La capacidad pulmonar total* : alrededor de 5’75 l
- *La capacidad vital* = 4 500 ml = 4’5 l.
- *La capacidad pulmonar residual o volumen residual* = Capacidad total – Capacidad vital = 5 750 ml – 4 500 ml = 1 250 ml = 1’25 l.
- *La capacidad residual pulmonar* : semejante a 2 250 ml = 2’ 25 l
- *Volumen de reserva respiratorio* = Capacidad residual funcional – Volumen residual = 2’ 25l - 1’25 l = 1 l.
- *Capacidad inspiratoria* = Capacidad pulmonar total – Capacidad residual funcional = 5’75 l – 2’25 l = 3’5 l.
- *Volumen de ventilación pulmonar* = 0’5 l.
- *Volumen de reserva respiratoria* = Capacidad inspiratoria – Volumen de ventilación pulmonar = 3’5 l – 0’5 l = 3l

5

(a) Dibuja la gráfica de $f(x) = \cos 2x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.

(b) Con su ayuda, ¿puedes dibujar la de $g(x) = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$ en ese mismo intervalo?

(a)



(b) Es la misma ya que $\text{sen}2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$.

6 La Figura 11.26 representa la variación que va sufriendo el voltaje en un circuito de corriente alterna. Escribe una función cuya gráfica sea análoga a la de esa oscilación « amortiguada».

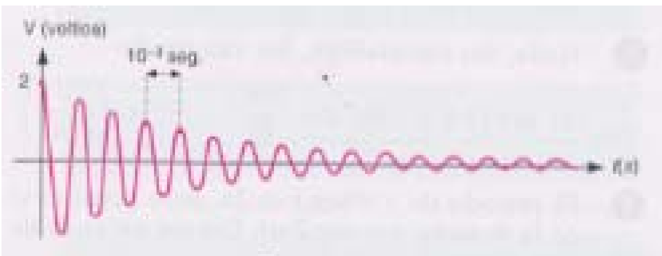


Figura 11.26.

Sabemos :

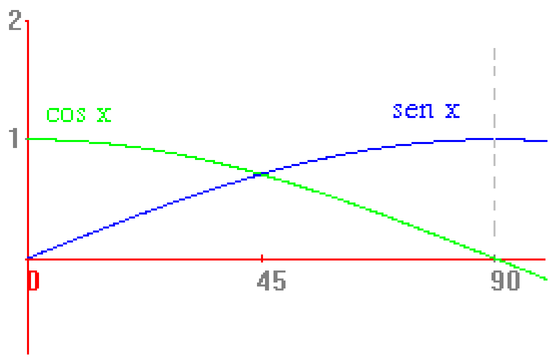
Que el período es $T = 10^{-3}$ seg. Y la amplitud máxima es de 2 Voltios, luego será de la forma :

$$V(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} \cos\frac{2\pi}{T}t = 2e^{-\frac{t}{2'5\cdot 10^{-3}}} \cos\frac{2\pi}{10^{-3}}t = 2e^{-400t}\cos 2000\pi t$$

✧ ✧ ✧ ❁ ❁ ❂ ❁ ❁ ✧ ✧ ✧

7 Copia en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ y en una sola figura, las gráficas de sen x y cos x. Observarás una simetría izquierda-derecha evidente. ¿A qué propiedad trigonométrica corresponde?

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧



A que una (cosx) está desplazado respecto de la otra (senx) 90º grados

✧ ✧ ✧ ❁ ❁ ❂ ❁ ❁ ✧ ✧ ✧

8 Halla las intersecciones con el eje x de la función y = cos x - sen x.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

Los puntos en los que corta una función al eje horizontal cumplen y = 0, luego :

$$\cos x - \text{sen} x = 0 \Leftrightarrow \text{sen} x = \cos x \Leftrightarrow \frac{\text{sen} x}{\cos x} = \text{tg} x = 1 \Rightarrow x = \text{arctg} 1 = 45º + 180kº = \frac{\pi}{4} + \pi k$$

✧ ✧ ✧ ❁ ❁ ❂ ❁ ❁ ✧ ✧ ✧

9 Halla los períodos de las siguientes funciones:

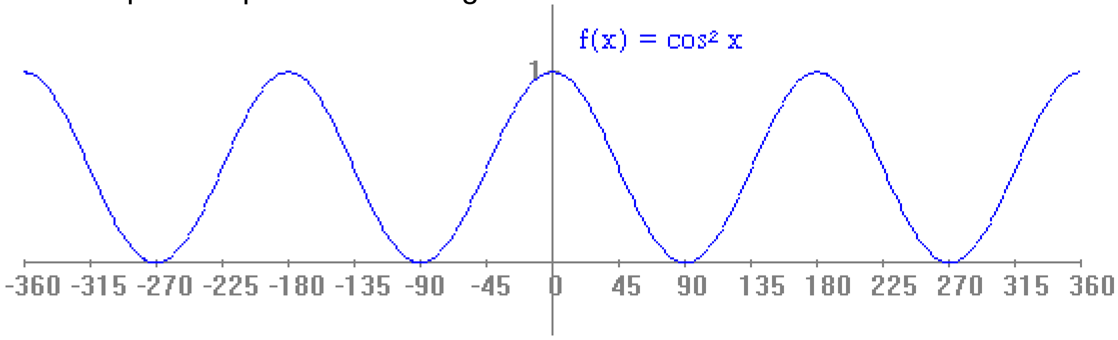
(a) $\cos^2 x$

(b) sen x + tg x

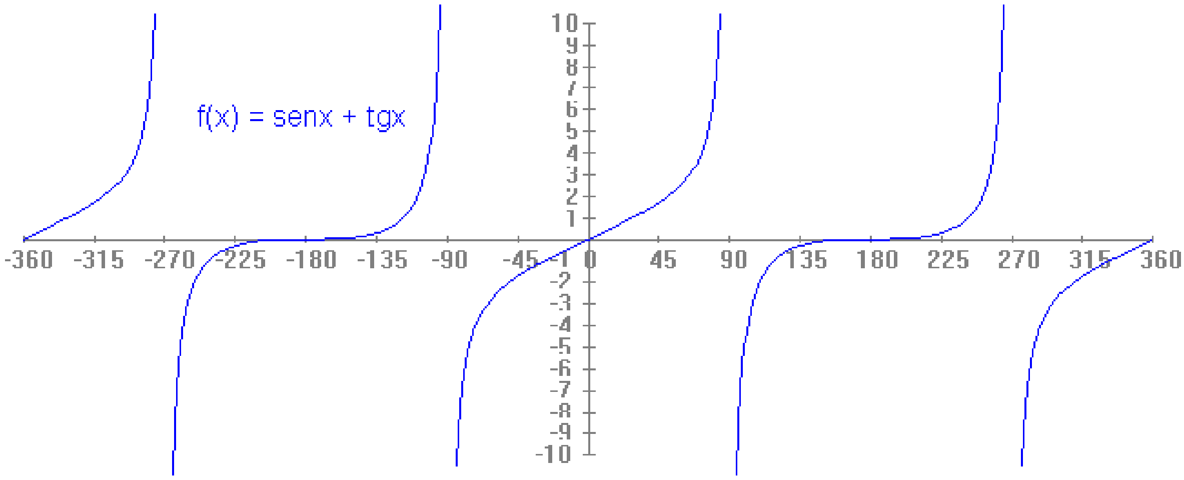
(c) $\cos^4 x - \text{sen}^4 x$

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

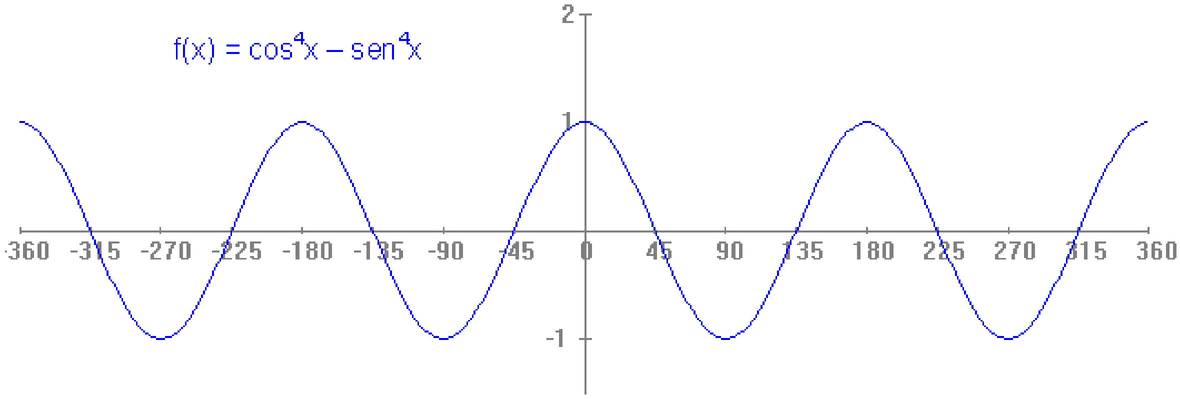
(a) $f(x) = \cos^2 x$. La función cosx, tiene por período 2π radianes, al elevarlo al cuadrado, los valores positivos de la imagen se hacen positivos con lo que el período se reduce a la mitad π radianes como puede apreciarse en la gráfica :



(b) $f(x) = \operatorname{sen}x + \operatorname{tg}x$. El seno tiene por período 2π radianes y la tangente π radianes, la suma tiene por período el de la mayor es decir 2π radianes como puede apreciarse en la gráfica :



(c) $f(x) = \cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x = (\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x)(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$. Como tanto el senx como cosx tiene de periodo T = 360º, al elevarles al cuadrado (o a al cuarta potencia) el período individual se reduce a la mitad 180º, y su suma tendrá ese mismo período T = 180º = 2π rad., como se aprecia en la figura :



✧ ✧ ✧ ❁ ❁ ❂ ❁ ❁ ✧ ✧ ✧

10 ¿Cuáles de estas funciones coinciden entre sí?

(a) $y = -3\ \text{sen}\ (2t - \pi)$

(b) $y = 3\text{sen}(-2t)$

(c) $y = -3\cos(2t + \pi)$

(d) $y = 3\cos(-2t)$

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

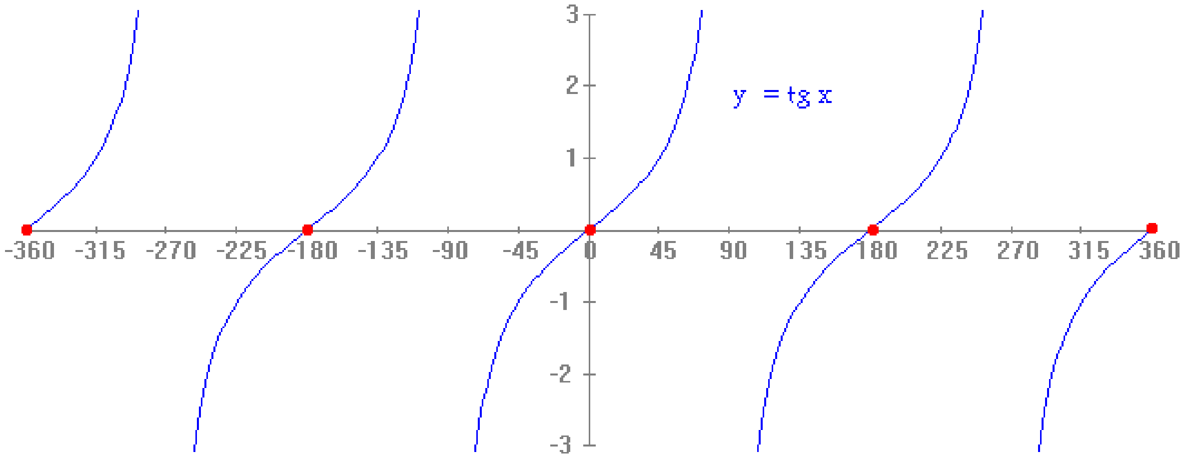
La **(c)** y la **(d).**

✧ ✧ ✧ ❁ ❁ ❂ ❁ ❁ ✧ ✧ ✧

11 ¿Tiene algún punto de inflexión la función $y = \text{tg}\ x$?

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

Como puede apreciarse en la figura, cambia de curvatura en x = 0º, como su período es 180º, los puntos de inflexión estarán en x = 0º + 180kº, es decir infinitos puntos de inflexión.



✧ ✧ ✧ ❁ ❁ ❂ ❁ ❁ ✧ ✧ ✧

AUTOEVALUACIÓN

1 Cita tres fenómenos periódicos que no hayan sido citados en el Ejemplo 3.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

❂ El sonido y la luz de una sirena de ambulancia o coche de bomberos.

❂ El movimiento de la Luna alrededor de la Tierra.

✪ El nivel de las mareas en el mar.

✧ ✧ ✧ ❁ ❁ ✪ ❁ ❁ ✧ ✧ ✧

2 ¿Cuáles de estas funciones son periódicas? Halla el período de las que lo sean.

(a) 0,4 - sen 4x

(b) 5 cos 2x + $3x^3$ - 1

(c) cos 3x + 5 sen 6x

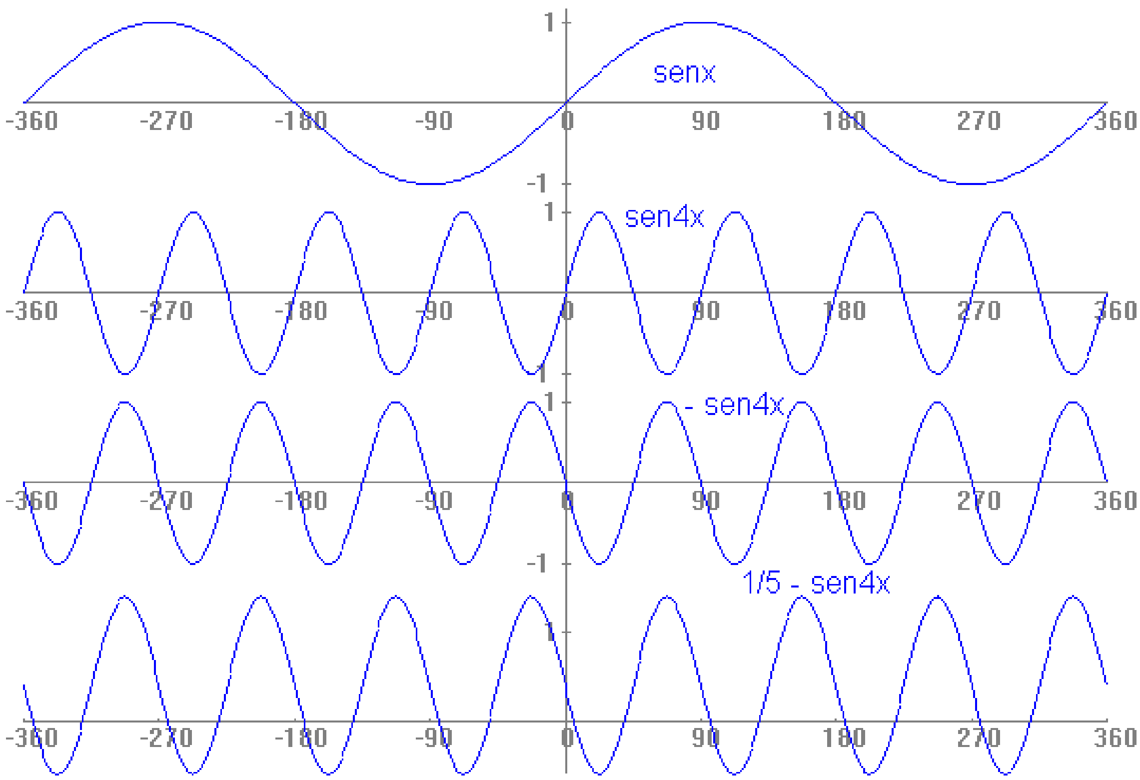
✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

(a) Si partimos de la función f(x) = senx, de período 360º, y estudiamos las transformaciones, tenemos :

❊ sen4x, al multiplicar el ángulo por 4 estamos realizando una contracción horizontal a la cuarta parte y el período pasa a ser T = 2π/4 = π/2 = 90º.

❊ Al multiplicarla por –1, la hacemos girar 180º respecto del eje horizontal, pero no afecta al período: - sen4x

❊ Al sumarla 0'4 = 1/5, la estamos desplazando verticalmente hacia arriba 1/5, y esta transformación tampoco afecta al período, f(x) = 0'4 – sen4x :



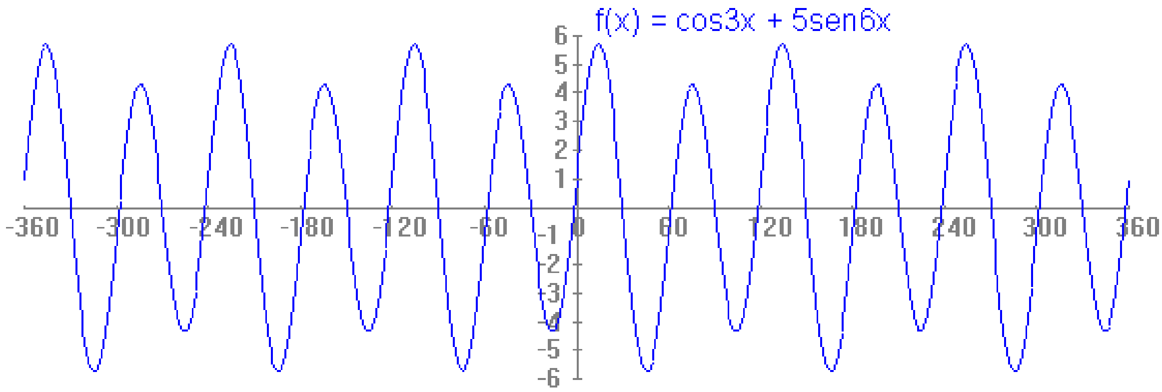
f(x) = 0'4 –sen4x sí es periódica y su período es T = π/2 rad = 90º

(b) $f(x) = 5\cos 2x + 3x^3 - 1$, no es periódica pues suma de una que sí lo es(el coseno) con otra que no es periódica (la parte polinómica).

(c) $f(x) = \cos 3x + 5\text{sen}6x$. Al multiplicar el ángulo por 3 y 6 estamos realizando contracciones horizontales de valores 3 y 6 respectivamente con lo que los períodos pasan a ser : para el coseno $2\pi/3 = 120º$ y para el seno $2\pi/6 = \pi/3 = 60º$.

Al multiplicar el seno por 6 estamos realizando una dilatación vertical de valor 6, pero no afecta el período.

Al sumar las dos funciones es período es el de la mayor es decir $2\pi/3 = 120º$, como se puede apreciar en la gráfica siguiente :



✧ ✧ ✧ ❁ ❁ ❂ ❁ ❁ ✧ ✧ ✧

3 Si una función cumple f (x) = f (x + 1) para todo x, ¿es cierto también que f(x) = f(x + 2), y que f (x) = f (x + 3), y así sucesivamente?

✧✧✧ ❁❁❂❁❁ ✧✧✧

Si, pues si en la igualdad f(x) = f(x +1), sustituimos x por x + 1, tenemos f(x +1) = f((x+1)+1) = f(x + 2) = f(x) por la condición inicial . Así se puede demostrar la recurrencia sin más sustituir en la nueva igualdad x por x +1 (o en al inicial x por x + 2).

✧ ✧ ✧ ❁ ❁ ❂ ❁ ❁ ✧ ✧ ✧

4 Halla, sin calculadora, los valores de:

(a) sen 13π

(b) cos $\dfrac{31\pi}{2}$

(c) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{57\pi}{4}\right)$

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

(a) sen 13π = sen (6 · 2π + π) = senπ = 0

(b) $\cos\dfrac{31\pi}{2} = \cos\left(7 \cdot 2\pi + \dfrac{3\pi}{2}\right) = \cos\dfrac{3\pi}{2} = \cos 270^{o} = 0$

(c) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{57\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(7 \cdot 2\pi + \dfrac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4} = 1$

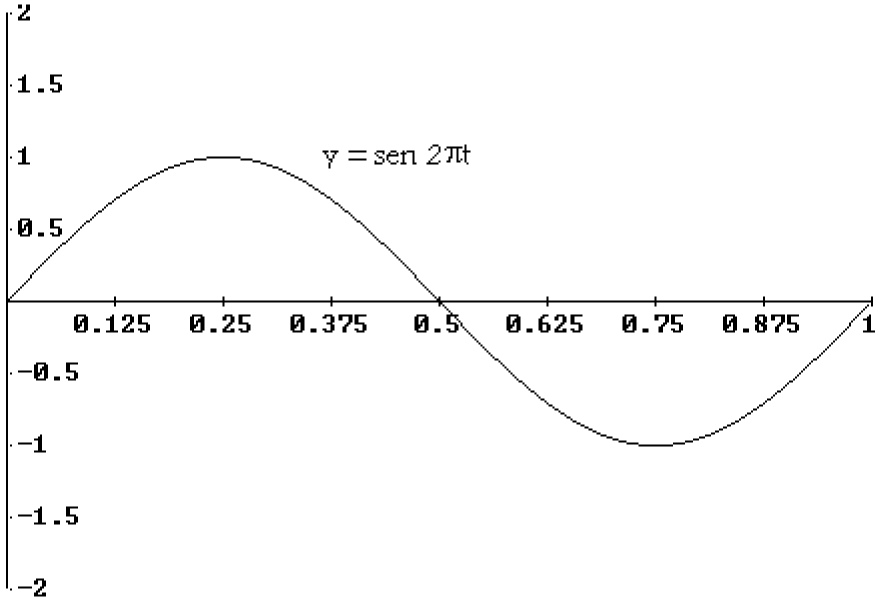
✧✧✧❁❁✪❁❁✧✧✧

5 El período de y = sen t es 2π, pero ¿cuál es el de la función y = sen 2πt? Dibuja un ciclo de esta última.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

Como multiplicamos el ángulo por 2π, el período queda dividido por ese valor:

$$T = \frac{2\pi}{2\pi} = 1\,\text{rad}$$

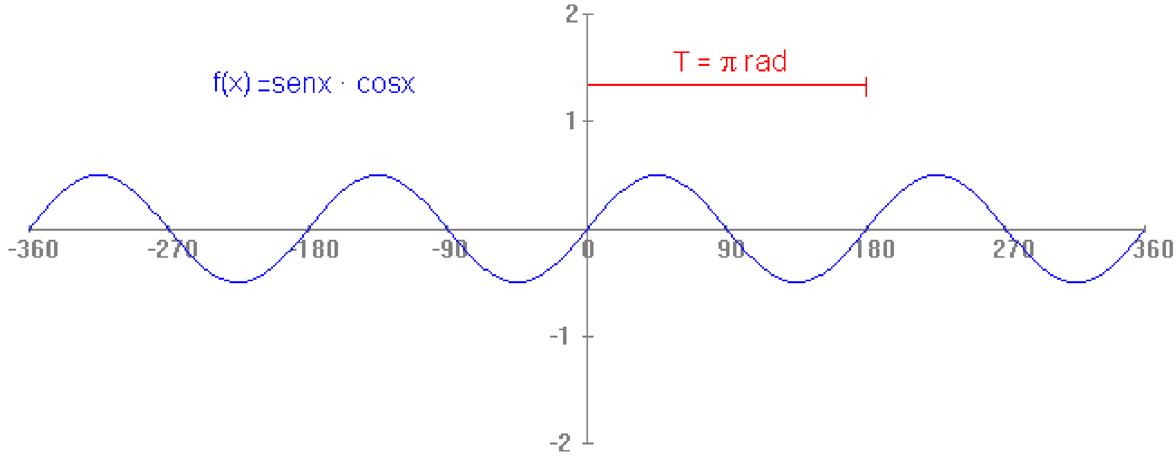


✧✧✧❁❁✪❁❁✧✧✧

6 Aunque sen x y cos x tienen ambas período 2π, su cociente (la función tg x) tiene período π. ¿Qué período tiene el producto sen x cos x?

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

Como senx · cosx = ½ sen2x, esta función tiene de período la mitad del de senx es decir : T= 2π/2 = π rad = 180º. Como puede apreciarse en la representación :



✧✧✧❁❁❂❁❁✧✧✧

7 ¿Qué gráfica se obtiene al desplazar la del coseno π/2 unidades?

(a) A la derecha.

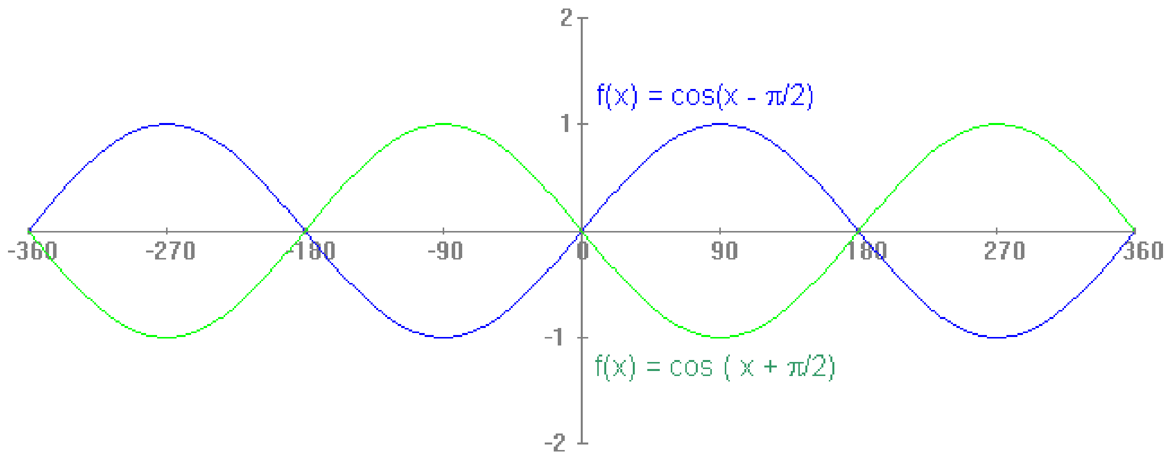
(b) A la izquierda.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

(a) f(x) = cos(x - π/2) = cos - (π/2 – x) = cos (π/2 – x) = sen x, teniendo en cuenta que cos(-α= = cosα y además que cos(90º - α) = senα.

(b) Si lo trasladamos hacia la izquierda le sumamos π/2 al ángulo :

f(x) = cos (x + π/2) = cos(π/2 + x) = - senx



✧ ✧ ✧ ❁ ❁ ❂ ❁ ❁ ✧ ✧ ✧

8 Si una función cumple que f (x + 5) = f (x), para todo x:

(a) ¿Puede tener período T = 1?

(b) ¿Y período T = 10?

(c) ¿Y T = 2?

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

(a) Si el período es T =1 se cumple f(x) = f(x+1) = f(x + 2) = f(x +2) = f(x + n) , luego sí puede tener período T = 1.

(b) Si T =10 , f(x) = f(x + 10) ≠ f(x +5), luego no puede ser.

(c) Si T = 2, f(x) = f(x + 2) = f(x + 4) = f(x +6) = f(x + 2n),. Tampoco puede ser T = 2.

✧ ✧ ✧ ❁ ❁ ❂ ❁ ❁ ✧ ✧ ✧

9 Las dos gráficas de la Figura 11.27 corresponden a dos anomalías en el funcionamiento del corazón, que se conocen en cardiología como «latido fallido» y «latido prematuro». ¿Puedes adivinar cuál corresponde a cada una de ellas? ¿Son periódicas?

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

La (a) tiene el tercer latido desplazado hacia la izquierda luego corresponde a un latido "antes de tiempo" o "prematuro". En la (b) falta el 5º latido, es la dl "latido fallido".

✧ ✧ ✧ ❁ ❁ ❂ ❁ ❁ ✧ ✧ ✧

10 Las funciones y = tg 2x, y = tg 4x son periódicas. ¿Cuáles son sus períodos?

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

La función y = tgx tiene de período T = π rad, si y = tg2x, que corresponde a una contracción horizontal a la mitad su período se reduce a la mitad T = π/2 y por análoga razón y = tg4x, al contraerse horizontalmente a la cuarta parte su período se reduce a la cuarta parte T = π/4.

✧ ✧ ✧ ❁ ❁ ❂ ❁ ❁ ✧ ✧ ✧

11 Dibuja la gráfica de las funciones que se indican, utilizando cada una de ellas para representar la siguiente:

(a) cos 2x

(b) $\cos^2 x - \text{sen}^2 x$

(c) $1 - 2\,\text{sen}^2 x$

(d) $\text{sen}^2 x$

✧✧✧❉❉❂❉❉✧✧✧

(a) = (b) = (c) Ya que $f(x) = \cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x = (1 - \text{sen}^2 x) - \text{sen}^2 x = 1 - 2\text{sen}^2 x$

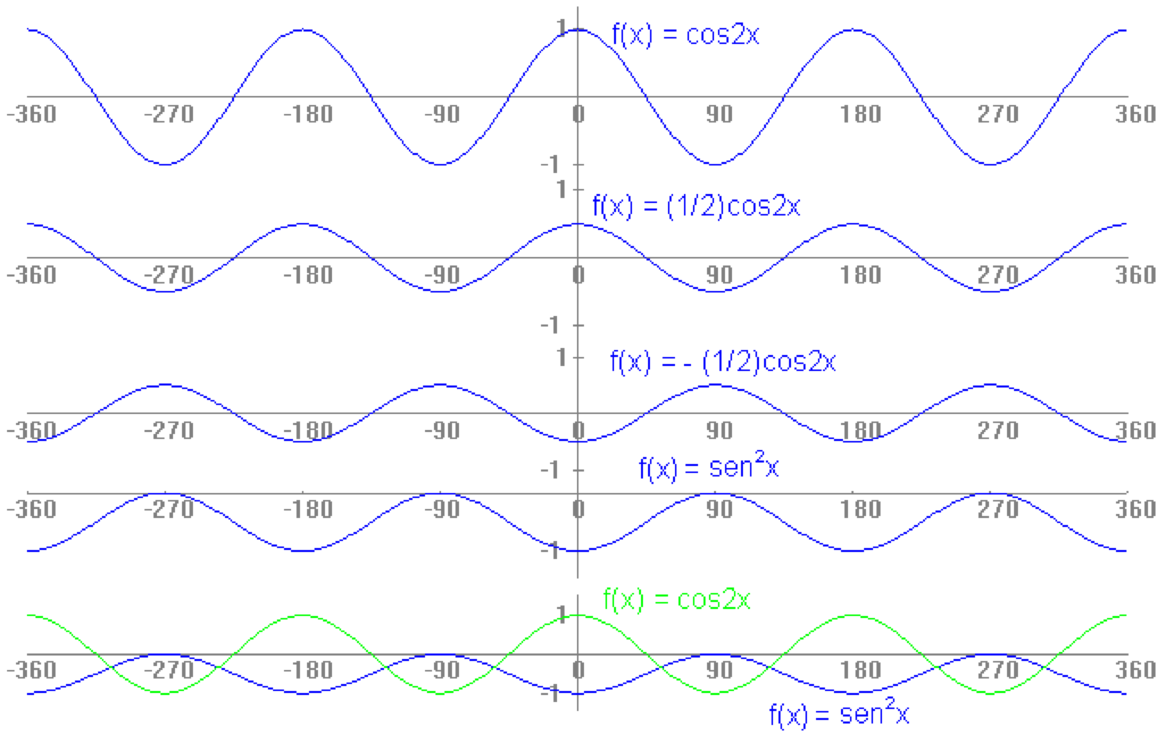
(d)) Despejando de la identidad anterior $-2\text{sen}^2 x = f(x) + 1$, $\text{sen}^2 x = -f(x)/2 - ½$, que sufre las transformaciones :

Al estar divida la función por ½ sufre una contracción vertical a la mitad.

Al tener signo negativo se produce un giro de 180º alrededor del eje horizontal.

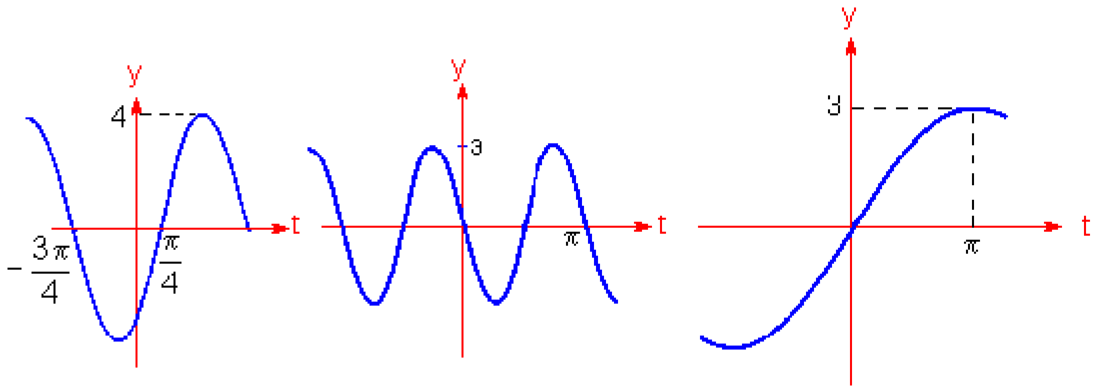
Al tener el sumando –1/2 sufre un desplazamiento vertical hacia debajo de ese valor .

A continuación se representan las funciones (a)=(b)=(c), f(x) = cos2x y después las trasformaciones para llegar hasta $f(x) = \text{sen}^2 x$ y por último las dos juntas:



✧✧✧❉❉❂❉❉✧✧✧

12 Con los datos que aparecen en la figura inferior, escribe la función de tipo y = Asen ($\omega t + \phi$) que corresponde a cada gráfica.



Para entender como construimos las funciones, definamos los parámetros que intervienen :

❑ A = Elongación máxima o amplitud de la onda. Si sabe calculando la mitad de la imagen o recorrido de la función.

❑ $\omega = 2\pi/T$, en donde T es el período o tiempo que tarda en repetirse la función.

❑ ϕ = desfase o desplazamiento horizontal.

(a) Vemos que :

◈A = amplitud = 4

◈Como el semiperíodo es $\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}=\frac{4\pi}{4}=\pi \Rightarrow T=2\pi \Rightarrow \omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{2\pi}=1$

◈ Desfase hacia la izquierda $\phi=\frac{\pi}{4}$

Sustituyendo, obtenemos la función $y=4\operatorname{sen}\left(t-\frac{\pi}{4}\right)$

(b) Vemos que :

◈A = amplitud = 3, pero como la función está girada horizontalmente 180º A = -3.

◈Como el período es $T=\pi \Rightarrow \omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{\pi}=2$

◈Desfase no tiene, $\phi = 0$

Sustituyendo, obtenemos la función y = -3sen2t

(c) Vemos que :

- A = amplitud = 3
- Como la cuarta parte del período es $\pi \Rightarrow T = 4\pi \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$
- Desfase no tiene, $\phi = 0$.

Sustituyendo, obtenemos la función $y = 3\text{sen}\frac{t}{2}$

✧ ✧ ✧ ❁ ❁ ✪ ❁ ❁ ✧ ✧ ✧