AUTOEVALUACIÓN

1 **Halla la suma y el producto de los polinomios $P(x) = 3x^2 – 4x$ y $Q(x) = - 2x^3 - 5x - 1$.**

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

$P(x) + Q(x) = 3x^2 – 4x – 2x^3 – 5x – 1 = - 2x^3 + 3x^2 – 9x –1$.

$P(x) \cdot Q(x) = (3x^2 – 4x) \cdot (– 2x^3 – 5x – 1) = - 6x^5 – 15x^3 – 3x^2 + 8x^4 + 20 x^2 + 4x = - 6x^5 + 8x^4 – 15x^3 + 17x^2 + 4x$.

◈◈◈▣▣⊙▣▣◈◈◈

2 **Sean P(x) y Q(x) polinomios de grados respectivos p y q. ¿ Cuáles de estas afirmaciones son ciertas ?**

(a) P(x) + Q(x) es de grado p + q.

(b) Si p > q, P(x) + Q(x) es de grado p.

(c) Si p = q, P(x) + Q(x) puede tener grado más pequeño que p.

(d) P(x)Q(x) es de grado p + q.

(c) Si p > q, P(x)Q(x) es de grado p.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

(a) Falsa, la suma será del mayor de los dos grados p o q.

(b) Verdadera, como hemos dicho en el apartado anterior.

(c) Verdadero siempre que los términos en grado p = q se anulen.

(d) Verdadera siempre, el producto es de grado suma del de los factores.

(c) Falsa, sea cual sea la relación entre los grados de los factores, el grado del producto es la suma p + q.

◈◈◈▣▣⊙▣▣◈◈◈

3 **Escribe para cada curva de las figuras un polinomio que la tenga por gráfica.**

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

(a) Los puntos de corte con el eje horizontal son raíces del polinomio, luego como corta en x = - 2 y en x = 4, el polinomio será, aplicando el teorema del factor $p(x) = (x –(-2)) (x –4) = (x +2) (x – 4) = x^2 – 2x - 8$, pero este polinomio corta al eje vertical en y = - 8 y según el dibujo ha de cortar en y = - 1'5 = - 8 / (16/3) luego hay que dividirlo por 16/3 :

$$P(x) = (3/16)p(x) = \frac{3}{16}x^2 - \frac{3}{8}x - \frac{3}{2}$$

(b) Los puntos de corte con el eje horizontal son (según la gráfica) x = -1/2 , x = 1 y x = 3/2, luego p(x) = (x –(-1/2))(x –1)(x - (3/2)) = (x + ½) (x –1)(x – 3/2) = $x^3 - 2x^2$ +x/4 + ¾ , que corta al eje vertical en p(0) = ¾ , pero según la gráfica ha de cortar en – 2'25, luego hay que multiplicar a p(x) por - 2'25/(3/4) = - 3, es decir :

$$P(x) = -3p(x) = -3x^3 + 6x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{9}{4}$$

(c) los cuatro puntos de corte con el eje horizontal son x = - 3, x = 0, x = 3/3 y x = 3, luego P(x) = k[x (x+3)(x-3/2)(x –3)] = k[$x^4 - 3x^3/2 - 9x^2 + 27x/2$] como P(- 2) = - 35/ 9 resolviendo la ecuación hallamos k :

$$k(-2)(-2+3)(-2-\frac{3}{2})(-2-3) = -\frac{35}{9} \Leftrightarrow k(-2)(1)(-\frac{7}{2})(-5) = -\frac{35}{9} \Leftrightarrow k = \frac{35(2)}{9(2)(7)(5)} = \frac{1}{9}$$

$$P(x) = \frac{1}{9}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - x^2 + \frac{3}{2}x$$

◇◇◇□□⊙□□◇◇◇

4

(a) Escribe todos los polinomios P(x) de grado 4 cuyas raíces sean -1, 0, 2 y 8.

(b) ¿ Hay alguno de ellos que cumpla P(1) = 10?

✧✧✧⊕⊕⊕⊕⊕✧✧✧

(a) Según el teorema del factor P(x) = k x (x + 1) (x –2) (x –8) = k ($x^4 - 9x^3 + 6x^2 + 16x$).

(b) Si P(1) = 10 : $k[1 \cdot 2 \cdot (-1)(-7)\ ] = 10 \Leftrightarrow k = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$

◇◇◇□□⊙□□◇◇◇

5 **Calcula las raíces de P(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 6x + 5) y halla su factorización completa.**

✧✧✧⊕⊕⊕⊕⊕✧✧✧

$$(x^2-1)(x^2+6x+5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1} = \pm 1 \\ x^2 + 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36-20}}{2} = \dfrac{-6 \pm 4}{2} = \begin{cases} -1 \\ -5 \end{cases} \end{cases}$$

las raíces son x = - 5, x = - 1 (doble) y x = 1 .

Factorización : P(x) = (x – 1) · (x + 1) ^{2} (x + 5)

◇◇◇□□⊙□□◇◇◇

6 **Calcula las tres raíces enteras del polinomio P(x) = $x^5 - 3x^3 - 4x$.**

✧✧✧⊕⊕⊕⊕⊕✧✧✧

$$x^5-3x^3-4x=x(x^4-3x^2-4)=0\Rightarrow\left\{\begin{matrix}x=0\\ x^4-3x^2-4=0\Leftrightarrow x^2=\dfrac{3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\dfrac{3\pm5}{2}=\left\{\begin{matrix}4\\ -1\to\text{No real}\end{matrix}\right\}\Rightarrow x=\pm\sqrt{4}=\pm2\end{matrix}\right\}$$

Las raíces reales son pues : x = - 2, x = 0, x = 2 y las dos imaginarias x = ± i

◇◇◇▣▣⊙▣▣◇◇◇

7 **Comprueba que en el polinomio x^4 + $24x^2$ + + 3x + 120, aunque el término $24x^2$ es muy grande para x = 10^6, comparado con el dominante x^4, es muy pequeño. Estima el porcentaje de perturbación que supone para x^4 sumarle en ese punto $24x^2$.**

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

$$\text{Relación}=\frac{x^4}{24x^2}=\frac{x^2}{24}=\frac{(10^6)^2}{24}=4'1\widehat{6}\cdot10^{10}$$

$$\%=\frac{\left(x^4+24x^2\right)-x^4}{x^4}\cdot100=\frac{24x^2}{x^4}\cdot100=\frac{24}{x^2}\cdot100=\frac{24\cdot10^2}{10^{12}}=24\cdot10^{-10}\%=0'0000000024\ \%$$

◇◇◇▣▣⊙▣▣◇◇◇

8

(a) **¿ Dónde es positiva la función f(x) = x^4 - $6x^2$ + 9 ?**

(b) **¿ Y f (x) = $x^3 - x^2$ - 2x ?**

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

(a) f(x) = $x^4 - 6x^2 + 9 = (x^2 - 3)^2$, es positiva siempre (al estar elevada al cuadrado) excepto los valores que la anulan que son $x^2-3=0\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}$

(b) Los valores que la anulan son :

$$x^3-x^2-2x=x(x^2-x-2)=0\Rightarrow\left\{\begin{matrix}x=0\\ x^2-x-2=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\dfrac{1\pm3}{2}=\left\{\begin{matrix}2\\ -1\end{matrix}\right\}\end{matrix}\right\}$$

Intervalos y signo :

Intervalos	(- ∞, -1)	(- 1, 0)	(0, 2)	(2, ∞)
Signo de f(x)	f(-2) = -8, < 0	f(-1/2) = 5/8, > 0	f(1) = - 2, < 0	f (3) = 12, > 0

Es positiva en los intervalos : (-1, 0) ∪ (2, ∞).

◇◇◇▣▣⊙▣▣◇◇◇

9 **¿ Cuáles de estas funciones son racionales ?**

(a) $\dfrac{3}{x}$

(b) $\dfrac{3x^2-2x+5}{x+2\sqrt{x}}$

(c) $5x-2$.

(d) $\dfrac{2x^4-\pi}{x+\sqrt{3}}-2x^3+\sqrt{3}$

Si consideramos racionales las funciones del tipo $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, en donde P(x) y Q(x) son polinomios de x, serán racionales (a) y (d). (b) al tener la x en una raíz sería irracional y (c) no tiene polinomio denominador.

10 **¿ Puede una función racional tener asíntotas horizontales diferentes por la izquierda y por la derecha ? ¿ Y oblicuas ?**

No pues en caso de tener límite cuando x tiende a infinito, este será único (la función podrá tender por encima o por debajo de la asíntota a infinito)

No, también el límite es único (en caso de haberlo).

11 **Halla las asíntotas y los intervalos donde es positiva la función** $f(x)=\dfrac{5x^2-10}{x+1}$

① Asíntotas

(a) Verticales

Al ser racional, los valores que anulen el denominador son las posibles asíntotas x + 1 = 0, x = - 1, simples que su límite sea $\pm\infty$, comprobémoslo :

$$\lim_{x\to -1}\frac{5(x^2-2)}{x+1}=\frac{5(1-2)}{-1+1}=\frac{-5}{0}=-\infty$$, sí tiene en x = -1.

(b) Horizontal

Como el numerador es de 2º grado y el denominador de grado 1, no tiene horizontal (límite infinito).

(c) Oblicua

❖ Es de la forma y = 5x + k, ya que el cociente entre los coeficientes de los términos de mayor grado es 5. Para hallar k hacemos :

$$k = \lim_{x\to\infty} f(x) - 5x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x^2-10}{x+1} - 5x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-10-5x^2-5x}{x+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{-5x-10}{x+1} = -5$$

La asíntota oblicua tiene por ecuación y = 5x – 5.

❖ También podemos realizar la división y tomar el polinomio cociente :

$$\begin{array}{rrr|l} \cancel{5x^2} & & -10 & x+1 \\ \cline{4-4} -\cancel{5x^2} & -5x & & \boxed{5x-5} \\ \hline & -\cancel{5x} & -10 & \\ & \cancel{5x} & +5 & \\ \cline{2-3} & & -5 & \end{array}$$

② Signo

Los valores que anulan el numerador son $x = \pm\sqrt{2}$, que, junto con la asíntota vertical x = - 1, forman 4 intervalos de signo constante :

Intervalos	(- ∞, -1’41)	(- 1’41 , -1)	(-1, 1’41)	(1’41, ∞)
Signo de f(x)	f(- 2) = - 10, < 0	f(- 1’1) = 39’5, > 0	f(0) = - 10, < 0	f (2) = 10/3, > 0

Luego es positiva en : $\left(-\sqrt{2},-1\right)\cup\left(\sqrt{2},\infty\right)$

◇◇◇▣▣⊙▣▣◇◇◇

1 2 **Analiza las gráficas de las funciones:**

✧✧✧⌗⌗⌖⌗⌗✧✧✧

(a) $f(x) = \dfrac{8}{x^2-9}$

① Dominio

Como es una función de tipo racional, no pertenecen al dominio los valores que anulan el denominador, $x^2 - 9 = 0$, x = ± 3, dominio = { $x \in R$ / $x \neq \pm 3$ }

② Asíntotas

Verticales

$x = \pm 3$ (que anula el denominador) son posibles asíntotas verticales, calculemos el límite :

$$\lim_{x \to \pm 3} \frac{8}{x^2 - 9} = \frac{8}{(\pm 3)^2 - 9} = \frac{8}{9 - 9} = \infty$$

luego sí es son asíntotas verticales $x = -3$ y $x = 3$.

Horizontal

Hallamos el límite :

$$y = \lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{8}{x^2 - 9} = \frac{8}{\infty - 9} = \frac{8}{\infty} = 0$$

La asíntota horizontal es la recta **y = 0** (el eje horizontal)

Oblicua

No tiene, ya que tiene asíntota horizontal.

③ Puntos de corte con los ejes

(a) Con el eje de abcisas (f(x) = 0,. No tiene pues la función no se anula en R.

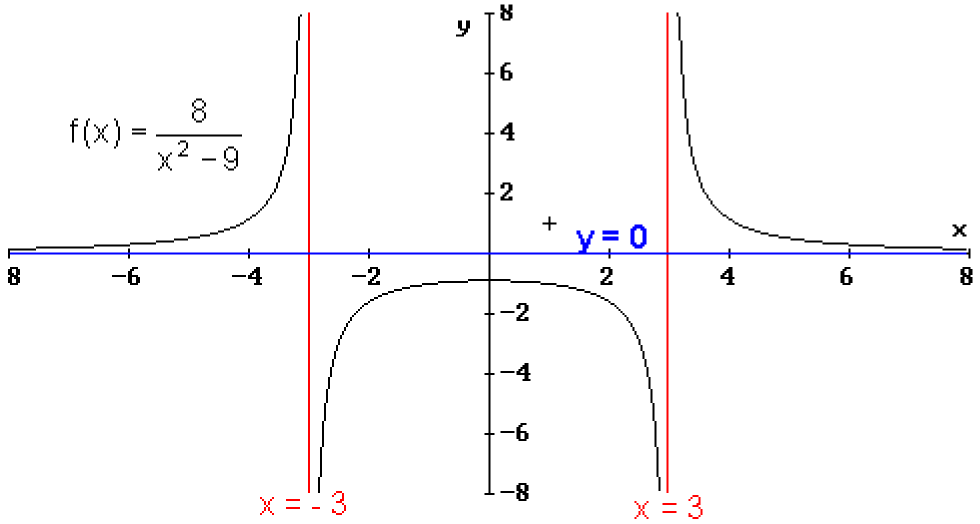
(b) Con el eje vertical o de ordenadas (x = 0)f(0) = - 8/9, el punto de corte es pues : (0, - 8/9)

④ Signo

Como no hay puntos de corte con el eje horizontal sólo cuentas las dos asíntotas verticales x = -3 y x = 3 , que conforman 3 intervalos de signo constante:

Intervalos	(- ∞ , - 3)	(- 3, 3)	(3, ∞)
Función	f (- 4) = 8/7, > 0	f(0) = -8/9, < 0	f(4) = 8/7, > 0

⑤ Representación



(b) $f(x)=\dfrac{x^2-x+6}{2x-2}$

① Dominio

Como es una función de tipo racional, no pertenecen al dominio los valores que anulan el denominador, $2x-2=0$, $x=1$, dominio = $\{\, x \in R \ / \ x \neq 1 \,\}$

② Asíntotas

Verticales

x = 1 (que anula el denominador) es una posible asíntota vertical, calculemos el límite :

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x+6}{2x-2}=\frac{1-1+6}{2-2}=\frac{6}{0}=\infty$$

luego sí es una asíntota vertical.

Horizontal

Como el grado del numerador es 2 y el del denominador es 1, no tiene asíntota horizontal pues el límite de la función cuando x tiende a infinito, no existe.

Oblicua

(a) El cociente en los coeficientes de mayor grado del numerador y denominador es 1/2, la asíntota será de la forma $y = x/2 + k$. Para hallar k hallamos el límite de la diferencia $f(x) - x/2$:

$$k=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-x+6}{2x-2}-\frac{x}{2}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x+6-x^2+x}{2x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{6}{2x-2}=0$$

La asíntota oblicua es la recta $y = x/2$.

(b) Otra forma de hallar la asíntota oblicua (sin usar el procedimiento general) cuando la función es un cociente de polinomios es realizar la división y tomar el cociente :

$$\begin{array}{r|l} \cancel{x^2}-\cancel{x}+6 & 2x-2 \\ \cline{2-2} -\cancel{x^2}+\cancel{x} & \boxed{\dfrac{x}{2}} \\ \hline +6 & \end{array}$$

la asíntota es $y = x/2$.

③ Puntos de corte con los ejes

(a) Con el eje de abcisas ($f(x) = 0$) $x^2 - x + 6 = 0$, ecuación de 2º grado que resolvemos :

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$$

los dos puntos de corte son (- 2, 0) y (3, 0).

(b) Con el eje vertical o de ordenadas (x = 0)

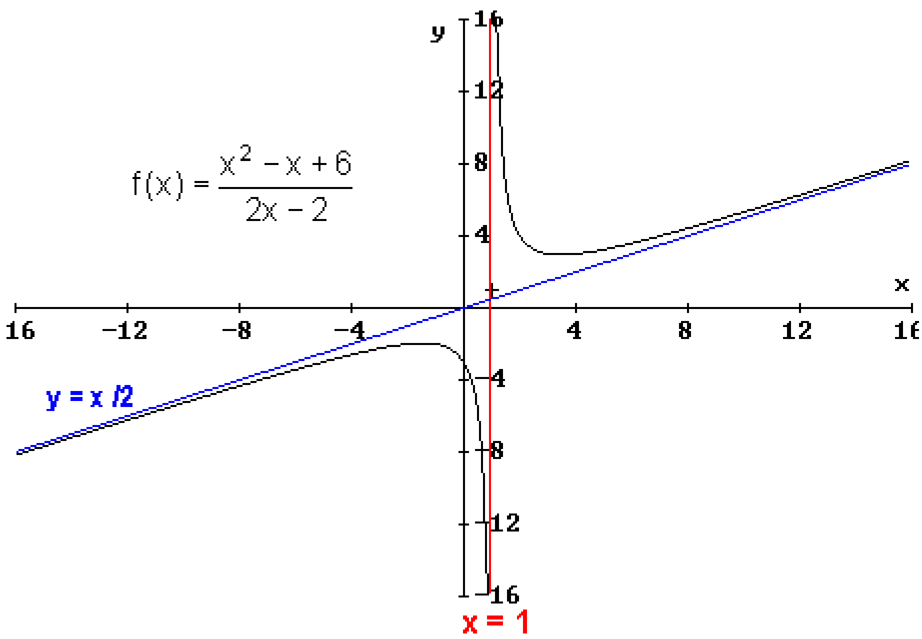
f(0) = - 3, el punto de corte es pues : (0, - 3)

④ Signo

Los dos puntos de corte con el eje horizontal y la asíntota vertical forman 4 (3 + 1) intervalos de signo constante :

Intervalos	(- ∞ , - 2)	(- 2, 1)	(1, 3)	(3, ∞)
Función	f (- 3) = 9/2, > 0	f(0) = - 3, < 0	f(2) = 4, > 0	f(4) = 3, > 0

⑤ **Representación**



◈◈◈▣▣⊙▣▣◈◈◈