Resuelve tú (Pág ❶❽❾)

Halla el cociente del polinomio $5x^4 – 12x^3 – 6x^2 – 2x$ por $x + 3$. Verifica el resultado.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

Hacemos la división por Ruffini :

	5	-12	-6	-2	0
-3		-15	81	-225	681
	5	-27	75	-227	681

El cociente $C(x) = 5x^3 – 27x^2 + 75x – 227$ y el resto $r = 681$.

Comprobación : $D(x) = d(x) \cdot C(x) + r$:

$D(x) = (5x^3 – 27x^2 + 75x – 227) \cdot (x + 3) + 681 = 5x^4 – 27x^3 + 75x^2 – 227x + 15x^3 – 81x^2 + 225x – 681 + 681 = 5x^4 – 12x^3 – 6x^2 – 2x$. q.e.d.

◈◈◈▣▣⊙▣▣◈◈◈

Resuelve tú (Pág ❶❾⓿)

Calcula las raíces del polinomio $12x (x – 1)(x + 3) (x + 8)$.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

$$12x(x - 1)\ (x+3)(x+8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \\ x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \\ x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = -8 \end{cases}$$

◈◈◈▣▣⊙▣▣◈◈◈

Resuelve tú (Pág ❶❾❶)

Demuestra que las raíces del polinomio $P(x) = x^3 + 10x^2 + 16x$ son 0, - 2, - 8.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

$P(x) = x^3 + 10x^2 + 16x$

$P(0) = 0$

$P(-2) = (-2)^3 + 10(-2)^2 + 16(-2) = - 8 + 40 – 32 = 0.$

$P(-8) = (-8)^3 + 10(-8)^2 + 16(-8) = - 512 + 10 \cdot 64 – 128 = - 640 + 640 = 0.$

Resuelve tú (**Pág ❶❾❷**)

Comprueba que 2 es raíz de $P(x) = 4x^5 - 7x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 18$ y halla el polinomio Q(x) de grado 4 tal que $P(x) = (x - 2)\,Q(x)$.

$P(2) = 4 \cdot 2^5 - 7 \cdot 2^4 - 2^3 + 2 \cdot 2^2 + 2 - 18 = 4 \cdot 32 - 7 \cdot 16 - 8 + 8 + 2 - 18 = 128 - 112 + 2 - 18 = 130 - 130 = 0$, luego es una raíz.

Para hallar Q(x) realizamos la división por la regla de Ruffini :

	4	-7	-1	2	1	-18
2		8	2	2	8	18
	4	1	1	4	9	0

$Q(x) = 4x^4 + x^3 + x^2 + 4x + 9.$

Resuelve tú (**Pág ❶❾❹**)

Halla las raíces enteras de los polinomios $P(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 8x - 12$ y $Q(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - 8x^2 - 12x$.

$P(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 8x - 12$

Las raíces enteras se encontraran entre los divisores del término independiente :

$$Div(-12) = \{ \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12 \}$$

para hallarlos vamos probar por al regla de Ruffini, los que den de resto cero :

	1	-2	1	-8	-12
-1		-1	3	-4	+12
	1	-3	4	-12	0
3		3	0	12	
	1	0	4	0	

Luego $P(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 8x - 12 = (x + 1)(x - 3)(x^2 + 4)$.

$Q(x) = x^5 – 2x^4 + x^3 – 8x^2 –12x = x(x^4 – 2x^3 + x^2 – 8x –12) = x P(x) = x (x +1) (x –3) (x^2 + 4)$, ya que el polinomio entre paréntesis es el anterior P(x).

◈◈◈▣▣⊙▣▣◈◈◈

Resuelve tú (**Pág ❶❾❺**)

Calcula una raíz real aproximada de $P(x) = 3x^3 – 14x + 9$.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

$P(x) = 3x^3 – 14x + 9$

Como P(0) = 9 > 0 y P(1) = -2, hallamos un valor intermedio x = (1+0)/2 = 0’5 y ahora :

$P(3’5) = 3(0’5)^3 – 14 \cdot 0’5 + 9 = 0’375 – 7 + 9 = 2’375$, luego una raíz esta comprendida entre 0’5 y 1.

Tomamos el valor medio (0’5 +1)/2 = 0’75 y hallamos el valor del polinomio:

$P(075) = 3 (0’75)^3 – 14 \cdot 0’75 + 9 = 1’265625 – 10’5 + 9 = - 0’234375$, como ha cambiado de signo la raíz buscada se haya entre 0’5 y 0’75.

Tomamos el punto medio (0’5 + 0’75) /2 = 0’625 y vemos el valor del polinomio :

$P(0’625) 3\cdot (0’625)^3 – 14 \cdot 0’625 + 9 = 0’7324 – 8’75 + 9 = 0’98$, luego la raíz buscada está entre 0’625 y 0’75.

El nuevo valor medio es (0’625 + 0’75)/2 = 0’6875 y el valor del polinomio :

$P(0’6875) = 3 \cdot (0’6875)^3 – 14 \cdot 0’6875 + 9 = 0’9749 – 9’625 + 9 = 0’35$, luego la raíz buscada se haya entre 0’6875 y 0’75.

Punto medio del intervalo (0’6875 + 0’75)/2 = 0’71875, y el valor del polinomio :

$P(0’71875) = 3 \cdot (0’71875)^3 – 14 \cdot 0’71875 + 9 = 1’114 – 10’0625 + 9 = 0’05$, luego la raíz buscada está comprendida en el intervalo (0’71875, 0’75).

valor medio del intervalo (0’71875 + 0’75)/2 = 0’734375, y el valor del polinomio :

$P(0’734375) = 3 \cdot 0’734375^3 – 14\cdot 0’734375 + 9 = 1’1816 – 10’28125 + 9 = - 0’093$, luego la raíz buscada está entre 0’71875 y 0’734375, continuando el proceso nos iríamos aproximando a la raíz que es 0’724270.

◈◈◈▣▣⊙▣▣◈◈◈

Resuelve tú (**Pág ❶❾❼**)

Una arquero lanza una flecha con trayectoria parabólica y = - 0’0003x² + 0’6x + 1, donde x e y se miden en metros. Calcula :

a **La altura inicial de la que parte la flecha.**

b **El alcance final.**

c **La altura máxima alcanza.**

$y = - 0'0003x^2 + 0'6x + 1$

(a) La altura inicial $y_0 = 1$ m.

(b) Cuando llega al suelo ha de cumplir se y = 0, es decir $- 0'0003x^2 + 0'6x + 1 = 0$, resolvemos la ecuación :

$$x = \frac{-0'6 \pm \sqrt{0'6^2 + 4\cdot 0'0003}}{-0'0006} = \frac{-0'6 \pm 0'601}{-0'0006} = \begin{cases} -1'66 \text{ m} \\ 2001'7 \text{ m} \end{cases}$$

El alcance del cañón es de unos 2 km.

(c) La altura máxima la hallamos por la fórmula del máximo de la parábola :

$$x_M = -\frac{b}{2a} = -\frac{0'6}{-0'0002} = 1000 \text{ m} \Rightarrow y_M = -0'0003(1000)^2 + 0'6\cdot 1000 + 1 = 301 \text{m}$$

Resuelve tú (Pág ❶❾❾)

Halla las asíntotas verticales de $f(x) = \frac{2x+3}{x^2-4}$

$$f(x) = \frac{2x+3}{x^2-4}$$

Como es una función de tipo racional, las posibles asíntotas verticales estarán en los valores que anulan el denominador: $x^2 - 4 = 0$, $x = \pm 2$, que como sus límite son infinito se trata de asíntotas verticales: x = - 2 y x = 2.

Resuelve tú (Pág ❷⓿❸)

Analiza la gráfica de la función del Ejemplo ¿18 ? y contrasta el resultado con la gráfica.

✧✧✧⌗⌗⌖⌗⌗✧✧✧

No hay ejemplo Nº 18, lo resuelvo con el Ejemplo Nº 17.

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 5}{x - 4}$$

① Dominio

Como es una función de tipo racional, no pertenecen al dominio los valores que anulan el denominador, $x - 4 = 0$, $x = 4$, dominio = $\{ x \in R \ / \ x \neq 4 \}$

② Asíntotas

Verticales

x = 4 (que anula el denominador) es una posible asíntota vertical, calculemos el límite :

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - x - 5}{x - 4} = \infty$$

luego sí es una asíntota vertical.

Horizontal

Como el grado del numerador es 2 y el del denominador es 1, no tiene asíntota horizontal pues el límite de la función cuando x tiende a infinito, no existe.

Oblicua

(a) El cociente en los coeficientes de mayor grado del numerador y denominador es 1, la asíntota será de la forma y = x + k. Para hallar k hallamos el límite de la diferencia f(x) – x :

$$k = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 - x - 5}{x - 4} - x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - x - 5 - x^2 + 4x}{x - 4} = \lim_{x \to \infty} \frac{3x - 5}{x - 4} = 3$$

La asíntota oblicua es la recta y = x + 3.

(b) Otra forma de hallar la asíntota oblicua (sin usar el procedimiento general) cuando la función es un cociente de polinomios es realizar la división y tomar el cociente :

$$\begin{array}{r|l} x^2 - x - 5 & x - 4 \\ \cline{2-2} -x^2 + 4x & \boxed{x + 3} \\ \cline{1-1} 3x - 5 & \\ -3x + 12 & \\ \cline{1-1} 7 & \end{array}$$

la asíntota es y = x + 3.

③ Puntos de corte con los ejes

(a) Con el eje de abcisas (f(x) = 0) $x^2 - x - 5 = 0$, ecuación de 2º grado que resolvemos :

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+20}}{2} = \frac{1 \pm 4'58}{2} = \begin{cases} 2'79 \\ -1'79 \end{cases}$$

los dos puntos de corte son (2’ 79, 0) y (- 1’79, 0).

(b) Con el eje vertical o de ordenadas (x = 0)

f(0) = 5/4, el punto de corte es pues : (0, 5/4)

④ Signo

Intervalos	(- ∞ , - 1’79)	(- 1’79, 2’79)	(2’79, 4)	(4,∞)
Función	f (- 2) = -1/6 < 0	f(0) = 5/4 > 0	f(3) = -1 < 0	f(5) =15 >0

PROBLEMAS PROPUESTOS

1 ¿Cuáles de estas funciones son polinómicas?

(a) y = 2’5 . Polinómica de grado cero.

(b) y = 2/5 + x^4/5. Polinómica de grado 4.

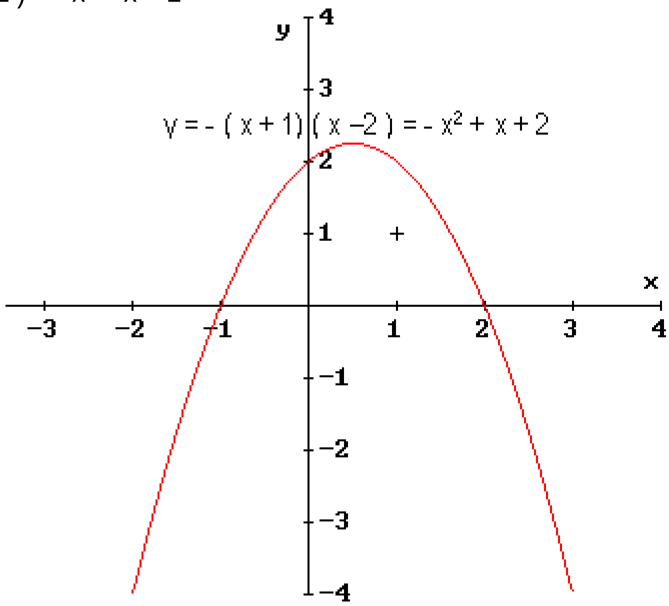
(c) $y = x^5 - 2x^{1/3} + 5 = x^5 - 2\sqrt[3]{x} + 5$. No polinómica.

(d) $y = 3\sqrt{x^4 + x - 2}$. No polinómica.

(e) y = ln(x^3 – 5x + 2). No polinómica.

2 Escribe polinomios que correspondan a las gráficas de las figuras :

(a) y = - (x + 1) (x –2) = - x^2 + x + 2

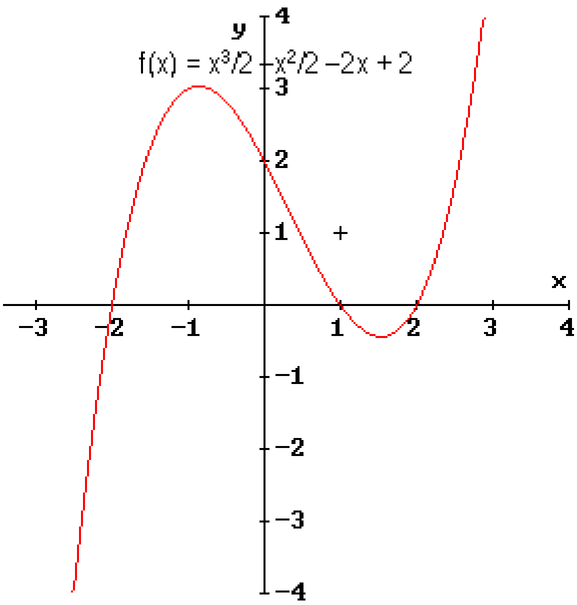


(b) Es un polinomio de tercer grado de la forma f(x) = $ax^3 + bx^2 + cx + d$. Para calcular los coeficientes sabemos los puntos de corte con los ejes : f(-2) = 0, f(1) = 0, f(2) = 0 y f(0) = 2, es decir –8a + 4b –2c + d = 0, a + b

+ c + d = 0, 8a + 4b + 2c + d = 0, d = 2. Un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas que resuelto nos proporcionará los coeficientes buscados :

Sustituimos el valor de d en la otras tres ecuaciones : - 8a + 4b – 2c = - 2, a + b + c = - 2, 8a + 4b + 2c = - 2.
Sumamos la 1ª y 3ª : 8b = - 4 , b = -1/2
Sustituimos en 1ª y 2ª : -8a –2 –2c = - 2, a – ½ +c = -2 y nos queda un sistema que resolvemos :

$$\left.\begin{array}{r} 4a+c=0 \\ 2a+2c=-3 \end{array}\right\} \Rightarrow c=-4a \Rightarrow 2a-8a=-3 \Leftrightarrow -6a=-3 \Leftrightarrow a=\frac{1}{2} \Rightarrow c=-2$$



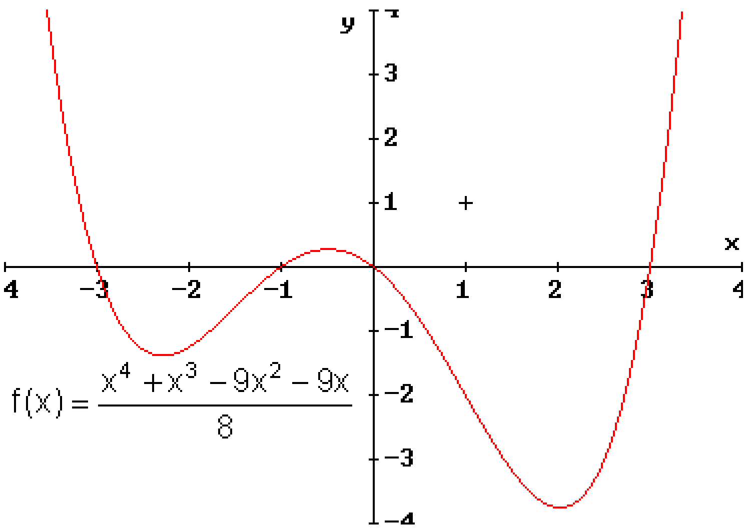
Y la función buscada es $f(x) = x^3/2 - x^2/2 - 2x + 2$

Otra forma :

El polinomio que pasa por los puntos (-2,0), (1,0) y (2,0) es $P(x) = (x+2)(x-1)(x-2) = x^3 - x^2 - 4x + 4$, pero este polinomio pasa por el (0,4) y no por el (0,2), para hacer que pase hemos de contraer verticalmente la función a la mitad, es decir lo dividimos por 2 :

$f(x) = P(x)/2 = x^3/2 - x^2/2 - 2x + 2$.

(c) Como conocemos los 4 puntos de corte con el eje horizontal construimos el polinomio que pase por ellos : $P(x) = (x(x+3)(x+1)(x-3) = x^4 + x^3 - 9x^2 - 9x$, pero P(1) = 1 + 1 – 9 – 9 = -16 y debe ser – 2, luego hay que dividirlo por 8 : $f(x) = \dfrac{x^4 + x^3 - 9x^2 - 9x}{8}$



3 **Halla un polinomio P(x) de grado 3 con raíces - 2, 3 y 5, sabiendo que P(0) = 10.**

$P(x) = (x – (-2))\ (x –3)(x – 5) = (x +2)(x – 3)(x – 5) = x^3 – 6x^2 – x + 30$, pero este polinomio $P(0) = 30 \neq 10$, hay que dividir por 3 : $Q(x) = (x^3 – 6x^2 – x + 30)/3$.

4 **Calcula las raíces enteras de $P(x)=x^4 – 7 x^3+11x^2 – 7 x +10$**

Div(10) = { ± 1, ± 2, ± 5, ± 10 }, las raíces enteras estarán entre estos valores :

	1	-7	11	-7	10
2		2	-10	2	-10
	1	-5	1	-5	0
5		5	0	5	
	1	0	1	0	

Luego $P(x) = x^4 – 7 x^3 + 11x^2 – 7 x +10 = (x –2)\ (x – 5)\ (x^2 +1)$

5 **Halla un polinomio Q(x) y un número real r tales que $3x^5 - x^2 + 6x – 12 = (x+l)Q(x)+r$**

Q(x) es el polinomio cociente obtenido al realizar la división por (x + 1) y r el resto:

	3	0	0	-1	6	-12
-1		-3	3	-3	4	-10
	3	**-3**	**3**	**-4**	**10**	**-22**

$Q(x) = 3x^4 – 3x^3 + 3x^2 – 4x + 10$ y r = resto = - 22.

6 **Halla un polinomio de grado 4 sabiendo que al dividirlo por x, (x - 1), (x - 2) y (x - 3), da siempre resto 1, y que P(4) = 49.**

$q(x) = x(x – 1)\ (x – 2)\ (x – 3) = x^4 – 6x^3 + 11x^2 – 6x$, $q(4) = 4\ (4- 1)\ (4 – 2)\ (4 –3) = 24$, luego hay que multiplicarlo por 2 , $Q(x) = 2\ (x^4 – 6x^3 + 11x^2 – 6x) = 2x^4 – 12x^3 + 22x^2 – 12x$, pero al dividirlo por esos factores daría de resto 0, para que de resto 1 hay que sumarle uno :

$$P(x) = 2x^4 – 12x^3 + 22x^2 – 12x + 1$$

7 **Comprueba con calculadora que aunque los demás términos del polinomio $x^3 + 50x^2 + 7x$ son grandes para $x = 10^6$, comparados con el dominante x^3 son muy pequeños.**

Término dominante : $(10^6)^3 = 10^{18}$

Resto de términos = $50 \cdot (10^6)^2 + 7 \cdot 10^6 = 50 \ 10^{12} + 7 \cdot 10^6 \approx 5 \cdot 10^{13}$

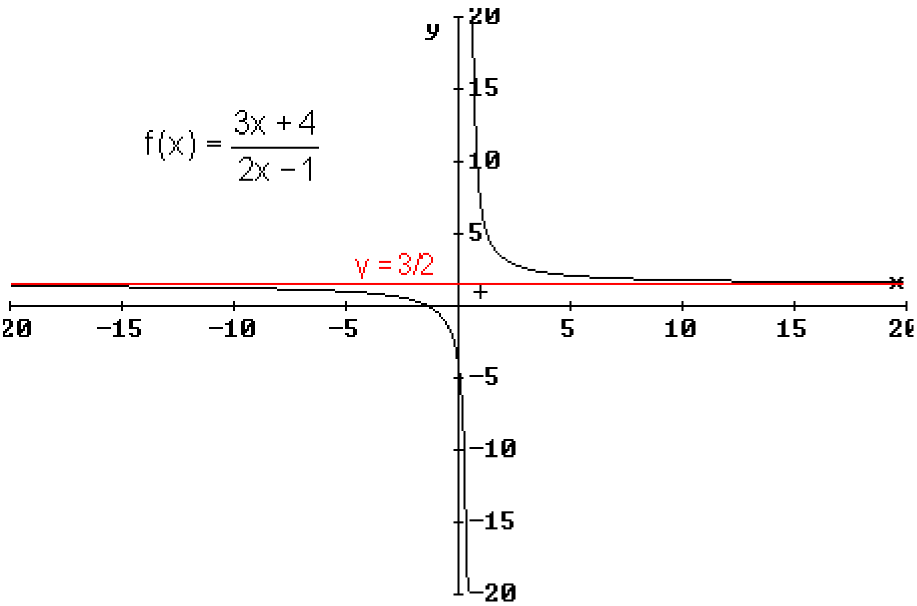
Relación : $\dfrac{\text{Término dominante}}{\text{Resto de términos}} = \dfrac{10^{18}}{5 \cdot 10^{13}} = 20000$, es 20 000 veces mayor.

8 **¿ Es racional la función** $3x - 1 + \dfrac{x}{2x^2 - 5}$ **?**

Operemos : $3x - 1 + \dfrac{x}{2x^2 - 5} = \dfrac{(3x-1)(2x^2-5)+x}{2x^2-5} = \dfrac{6x^3 - x^2 - 15x + 5}{2x^2 - 5}$, sí es racional

9 **¿ Cuáles de estas funciones racionales tienen asíntotas horizontales u oblicuas?**

(a) $f(x) = \dfrac{3x+4}{2x-1} \Rightarrow \lim\limits_{x \to \infty}\left(\dfrac{3x+4}{2x-1}\right) = \dfrac{3}{2}$, tiene una asíntota horizontal en y = 3/2 y, al tener horizontal, no tiene asíntota oblicua.



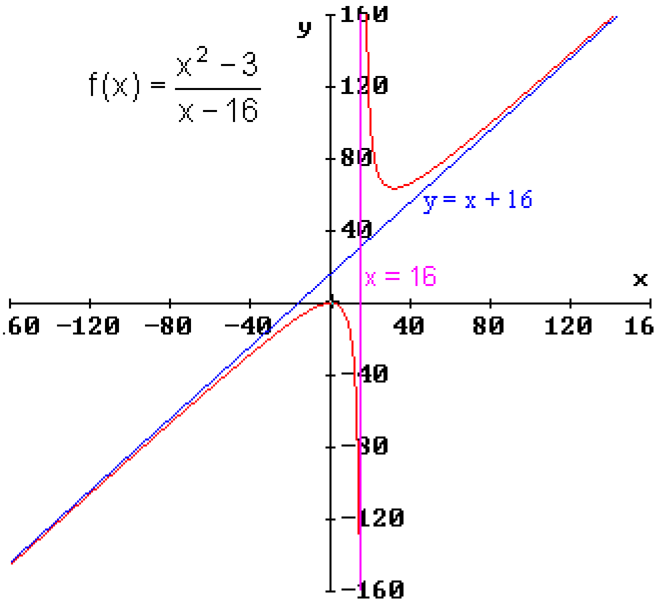
(b) $f(x)=\dfrac{x^2-3}{x-16} \rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-3}{x-16}\right)=\infty$, no tiene una asíntota horizontal, pero puede tener oblicua.

Como el grado del numerador es 2 y del denominador es 1, sí tiene asíntota oblicua que hallamos haciendo la división :

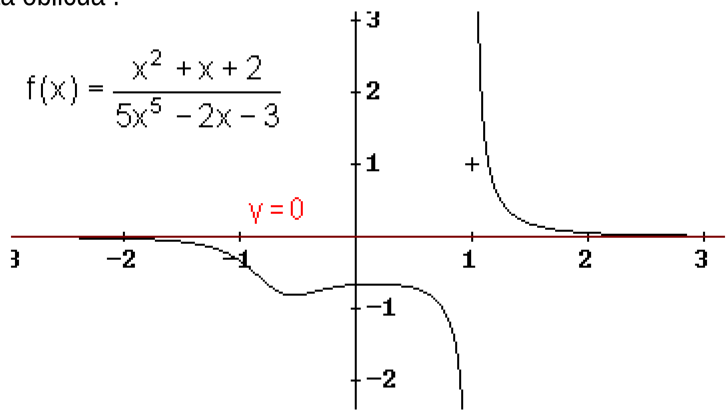
$$\begin{array}{rr|l} x^2 & -3 & x-16 \\ \cline{3-3} -x^2+16x & & \boxed{x+16} \\ \hline 16x & -3 & \\ -16x+256 & & \\ \hline & 253 & \end{array}$$

La asíntota oblicua es y = x + 16

La representación gráfica es :



(c) $y=f(x)=\dfrac{x^2+x+2}{5x^5-2x-3} \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+x+2}{5x^5-2x-3}\right)=0$, la asíntota horizontal es y = 0 (el eje de abcisas) y no tiene asíntota oblicua :



◇◇◇▣▣⊙▣▣◇◇◇

1 0 Halla los intervalos donde son positivas.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

(a) $f(x) = x^4 - 4x^2 + 4$.

❍ Primero hallamos los valores que la anulan resolviendo la ecuación bicuadrada :

$$x^4 - 4x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

❍ Tenemos tres intervalos en los que estudiar el signo :

Intervalos	$(-\infty, -\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$	$(\sqrt{2}, +\infty)$
Signo ($f(x)= x^4 - 4x^2 + 4$)	$f(-2) = 4$, > 0	$f(0) = 4$, > 0	$f(2) = 4$, > 0

Es siempre positiva.

(b) $f(x) = (x^2 - 5x + 6)/(3x+12)$

◎ Los valores que anulan el numerador $x = 2$ y $x = 3$, y el denominador $x = -4$ forman 4 intervalos.

◎ Hay que estudiar el signo en los 4 intervalos :

Intervalos	$(-\infty, -4)$	$(-4, 2)$	$(2, 3)$	$(3, \infty)$
Signo f(x)	< 0	> 0	> 0	> 0

◇◇◇▣▣⊙▣▣◇◇◇

1 1 Halla las asíntotas y los intervalos donde es positiva o negativa cada función:

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

(a) $f(x) = \dfrac{3x}{x+2}$

① Asíntotas.

◈ Verticales :

Al ser una función racional las posibles asíntotas son los valores que anulan el denominador, $x = -2$ en este caso. Para comprobarlo hallemos el límite :

$\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{3x}{x+2} = -\infty$, luego sí tiene una asíntota en $x = -2$.

◈ Horizontal:

Hallamos el límite de la función cuando $x \to \infty$:

$$y = \lim_{x\to\infty} \frac{3x}{x+2} = 3$$, luego tiene una asíntota horizontal en $y = 3$.

◈ Oblicua:

No tiene ya que tiene asíntota horizontal.

② Intervalos

Valores que anulan la función $3x = 0$, $x = 0$ y como hay una asíntota vertical en $x = -2$, tenemos 3 intervalos :

Intervalos	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, \infty)$
Signo f(x)	$f(-3) = 9$, > 0	$f(-1) = -3$, < 0	$f(1) = 1$, > 0

(b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 7x + 10}$

① Asíntotas.

◈ Verticales :

Al ser una función racional las posibles asíntotas son los valores que anulan el denominador, $x^2 - 7x + 10 = 0$, $x = 2$ y $x = 5$ en este caso. Para comprobarlo hallemos los límite :

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2}{x^2 - 7x + 10} = \infty, \quad \lim_{x\to 5} \frac{x^2}{x^2 - 7x + 10} = \infty$$, luego sí tiene asíntotas en $x = 2$ y $x = 5$.

◈ Horizontal:

Hallamos el límite de la función cuando $x \to \infty$:

$$y = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2 - 7x + 10} = 1$$, luego tiene una asíntota horizontal en $y = 1$.

◈ Oblicua:

No tiene ya que tiene asíntota horizontal.

② Intervalos

Valores que anulan la función $x^2 = 0$, $x = 0$ y como hay asíntotas verticales en $x = 2$ y $x = 5$, tenemos 4 intervalos :

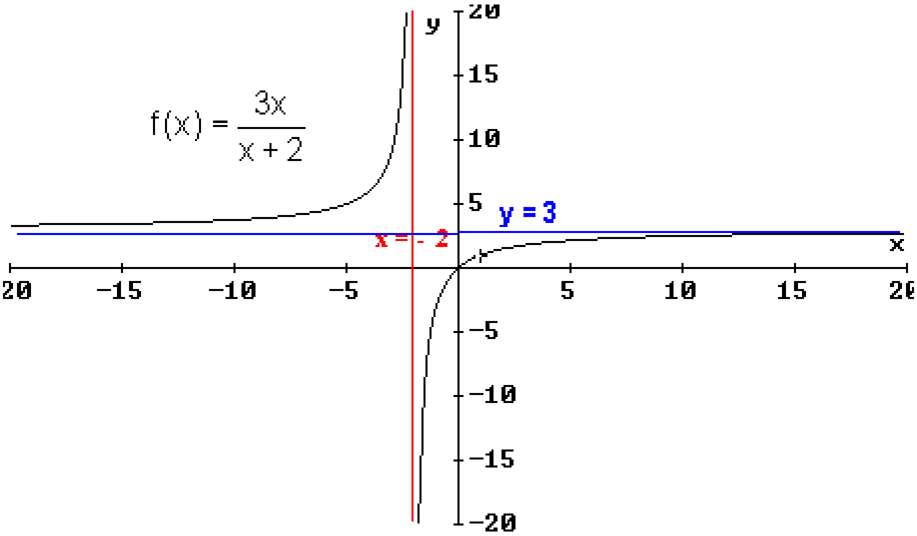
Intervalos	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, 5)$	$(5, \infty)$
Signo f(x)	$f(-1) = 1/18$, > 0	$f(1) = 1/4$, > 0	$f(3) = -3$, < 0	$f(6) = 9$, > 0

◇◇◇▣▣⊙▣▣◇◇◇

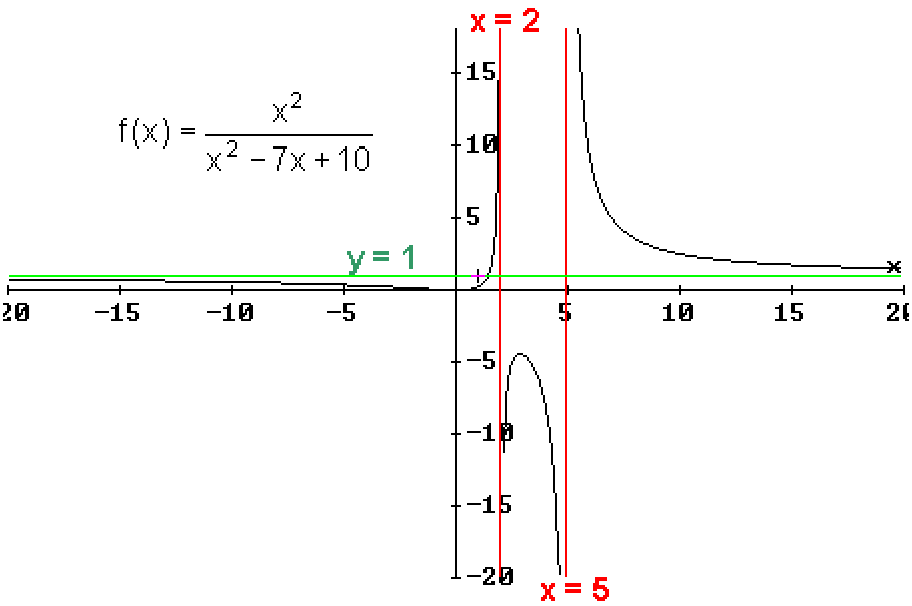
1 2 **Representa las gráficas de las dos funciones del problema anterior.**

✧✧✧ ✧✧✧

(a)



(b)



◇◇◇ ◇◇◇

1 3 **Analiza la gráfica de la función** $f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x^2}$

✧✧✧ ✧✧✧

① Dominio

Como es una función de tipo racional, no pertenecen al dominio los valores que anulan el denominador, $x^2 = 0$, $x = 0$, dominio = $\{ x \in R \ / \ x \neq 0 \}$

② Asíntotas

Verticales

x = 0 (que anula el denominador) es una posible asíntota vertical, calculemos el límite :

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^2-1}{x^2}=\frac{-1}{0}=-\infty$$

luego sí es una asíntota vertical.

Horizontal

Como el grado del numerador es 2 y el del denominador es 2, tiene asíntota horizontal en:

$$y=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-1}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x^2}}{1}=\frac{2-\frac{1}{\infty}}{1}=2$$

Oblicua

No tiene pues tiene una asíntota horizontal de ecuación y = 2.

③ Puntos de corte con los ejes

(a) Con el eje de abcisas (f(x) = 0) $2x^2 - 1 = 0$, ecuación de 2º grado que resolvemos :

$$x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}=\begin{cases}0'71\\-0'71\end{cases}$$

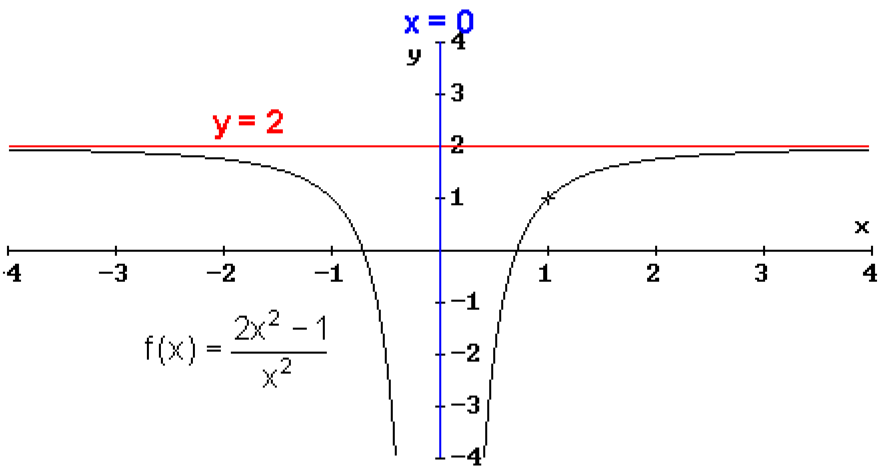
los dos puntos de corte son (0' 71, 0) y (- 0'71, 0).

(b) Con el eje vertical o de ordenadas (x = 0)

No tiene pues x= 0 no pertenece al dominio.

④ Signo

Intervalos	(- ∞ , - 0'71)	(- 0'71, 0)	(0, 0'71)	(0'71, ∞)
Función	f (- 1) = 1, > 0	f(- 0'5) = - 3, < 0	f(0'5) = - 3, < 0	f(1) =1, >0



14 **Analiza la gráfica de la función** $f(x)=\frac{(x-1)^2}{x-2}$

① Dominio

Como es una función de tipo racional, no pertenecen al dominio los valores que anulan el denominador, x – 2 = 0, x = 2, dominio = { $x \in R$ / $x \neq 2$ }

② Asíntotas

Verticales

x = 2 (que anula el denominador) es una posible asíntota vertical, calculemos el límite :

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x-1)^2}{x-2} = \frac{1}{0} = \infty$$

luego sí es una asíntota vertical.

Horizontal

Como el grado del numerador es 2 y el del denominador es 1, no tiene asíntota horizontal pues el límite de la función cuando x tiende a infinito, no existe.

Oblicua

(a) El cociente en los coeficientes de mayor grado del numerador y denominador es 1, la asíntota será de la forma y = x + k. Para hallar k hallamos el límite de la diferencia f(x) – x :

$$k = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{x-2} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+1-x^2+2x}{x-2} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x-2} = 0$$

La asíntota oblicua es la recta y = x.

(b) Otra forma de hallar la asíntota oblicua (sin usar el procedimiento general) cuando la función es un cociente de polinomios es realizar la división y tomar el cociente :

$$\begin{array}{r|l} x^2 - 2x + 1 & x-2 \\ \cline{2-2} -x^2 + 2x \quad & x \\ \hline 0 + 1 & \end{array}$$

la asíntota es y = x + 3.

③ Puntos de corte con los ejes

(a) Con el eje de abcisas (f(x) = 0) $(x-1)^2 = 0$, x = 1 el doble punto de corte es (1, 0).

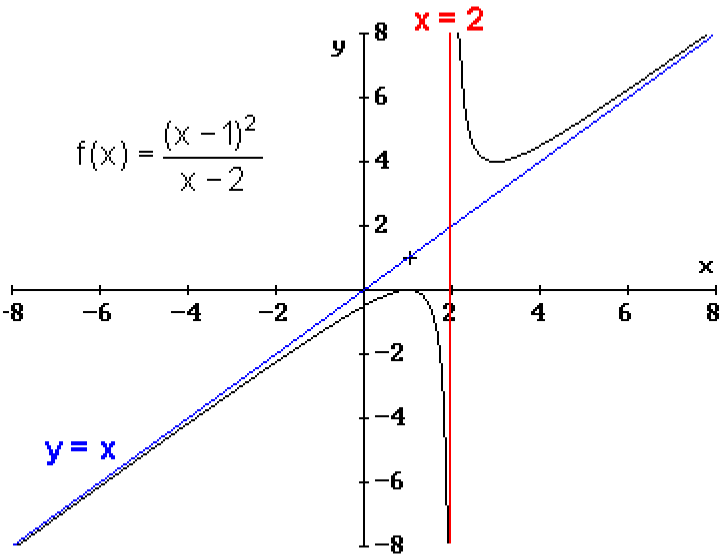
(b) Con el eje vertical o de ordenadas (x = 0)

f(0) = - 1/2, el punto de corte es pues : (0, -1/2)

④ Signo

Intervalos	(- ∞ , 1)	(1, 2)	(2, ∞)
Función	f (0) = -1/2, < 0	f(1'5) = - 0'5, < 0	f(3) = 4, > 0

⑤ **Representación** :



◈ ◈ ◈ ▣ ▣ ⊙ ▣ ▣ ◈ ◈ ◈