PROBLEMAS PROPUESTOS (❶❸❻)

❶ Completa estas operaciones entre números complejos:

(a) (5-2i)- z = -3+i
(b) (3 + i) · (- 4 + 20i) = z
(c) 4-7i-2i·(-1+5)=z

a) $(5 - 2i) - z = -3 + i \Rightarrow z = 5 - 2i + 3 - i = \mathbf{8 - 3i}$.
b) $(3 + i)\cdot(-4 + 20i) = z = -12 + 60i - 4i + 20i^2 = -12 + 56i + 20\cdot(-1) = \mathbf{-32 + 56i}$.
c) $z = 4 - 7i - 2i\cdot(-1 + 5) = 4 - 7i - 2i \cdot 4 = 4 - 7i - 8i = \mathbf{4 - 15i}$.

❷ Calcula las potencias:

(a) i^{18} (b) $i^{8.412}$ (c) $(-i)^{10}$ (d) $(-i)^{2.001}$

(a) $i^{18} = i^{4\cdot4+2} = (i^4)^4 \cdot i^2 = 1^4 \cdot i^2 = i^2 = \mathbf{-1}$
(b) $i^{8.412} = i^{4\cdot2103} = (i^4)^{2.103} = 1^{2.103} = \mathbf{1}$
(c) $(-i)^{10} = i^{10} = i^{4\cdot2+2} = (i^4)^2 \cdot i^2 = 1^2 \cdot i^2 = i^2 = \mathbf{-1}$.
(d) $(-i)^{2.001} = -i^{2.001} = -i^{4\cdot500+1} = -i^{4\cdot500} \cdot i = -(i^4)^{500} \cdot i = -1^{500} \cdot i = \mathbf{-i}$.

❸ Halla el valor del número complejo z en cada ecuación:

(a) (3 - 5i) · z = 2z

(b) $\dfrac{z}{2+i} = 9 + 2i$

(c) z - 2i · (4 - 5i) = i

(a) $(3-5i)\cdot z = 2z \Rightarrow (3-5i)z - 2z = 0 \Rightarrow z(3-5i-2) = 0 \Rightarrow z = \dfrac{0}{1-5i} = 0$

(b) $\dfrac{z}{2+i} = 9+2i \Rightarrow z = (2+i)\cdot(9+2i) = 2(9+2i) + i(9+2i) = 18 + 4i + 9i + 2i^2 = 18 + 13i - 2 = 16 + 13i$

(c) $z - 2i\cdot(4-5i) = i \Rightarrow z = i + 2i(4-5i) = i + 8i - 10i^2 = 9i + 10 = 10 + 9i$

❹ Describe dónde se localizan en el plano complejo todos los números complejos que tienen:

(a) Parte real igual a 1.

(b) Parte imaginaria igual a 1.

(c) Módulo igual a 3.

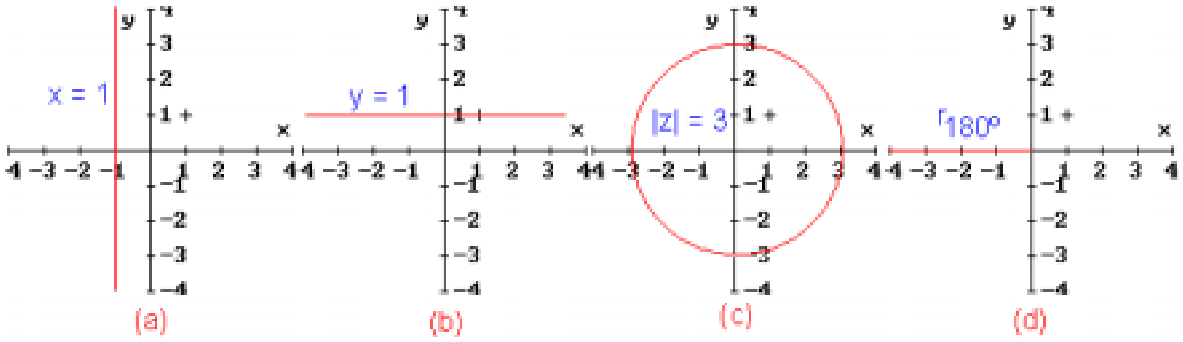
(d) Argumento igual a 180°.

(a) En la recta vertical x = 1.

(b) En la recta horizontal y = 1.

(c) En la circunferencia de centro el origen y radio 3.

(d) En la semirrecta que forma un ángulo de 180º, es decir el semieje horizontal negativo.



❺ Representa en el plano los puntos z que cumplen:

(a) $z - \bar{z} = 6i$ (b) $z \cdot \bar{z} = 4$ (c) $z + \bar{z} = 3$ (d) $\bar{z} = 5z$

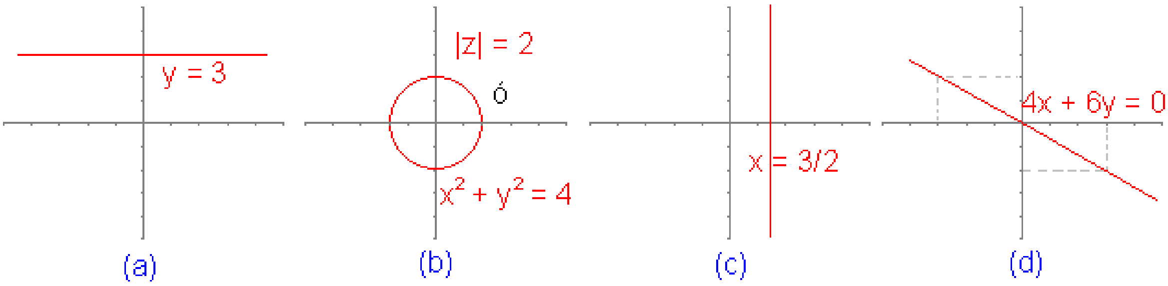
Sea z = x + yi $\Rightarrow \bar{z} = x - yi$

(a) $z - \bar{z} = x + yi - (x - yi) = x + yi - x + yi = 2yi = 6i \Rightarrow y = \frac{6i}{2i} = 3$, es decir una recta horizontal por las ordenadas y = 3.

(b) $z \cdot \bar{z} = (x + yi)\cdot(x - yi) = x^2 - y^2 i^2 = x^2 + y^2 = |z|^2 = 4 = 2^2$, es decir una circunferencia de centro el origen y radio 2.

(c) $z + \bar{z} = x + yi + x - yi = 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$, es decir una recta vertical por x = 3/2.

(d) $\bar{z} = 5z \Rightarrow x - yi = 5(x + yi) \Rightarrow x - yi = 5x + 5yi \Rightarrow 4x + 6y = 0$, es decir todos los puntos del plano complejo que pertenecen a la recta de ecuación 4x + 6y = 0, o en forma explícita y = -(2/3)x.



❻ Escribe cada número complejo en forma binómica, polar y trigonométrica:

(a) 7_{45^o}

(b) cos 30º - i sen 30º

(c) $\sqrt{5}\,(1 + i)$

(d) 3i

$$z = a + bi \text{ (binómica)} = r_\alpha \text{ (polar)} = r(\cos\alpha + i \operatorname{sen} \alpha) \text{ (trigonométrica)}$$

(a) $7_{45^o} = 7(\cos 45^o + i\operatorname{sen} 45^o) = 7\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i\right) = \frac{7\sqrt{2}}{2} + \frac{7\sqrt{2}}{2} i$

(b) $\cos 30^o - i\operatorname{sen} 30^o = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i = \left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1 \\ \alpha = \operatorname{arctg} \frac{-1/2}{\sqrt{3}/2} = 330^o, \text{ pues } 270^o < \alpha < 360^o \end{array} \right\} = 1_{330^o} = 1(\cos 330^o + i\operatorname{sen} 330^o)$

(c) $\sqrt{5}(1 + i) = \sqrt{5} + \sqrt{5}\, i = \left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2 + \left(\sqrt{5}\right)^2} = \sqrt{10} \\ \alpha = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \operatorname{arctg} 1 = 45^o \end{array} \right\} = \sqrt{10}_{45^o} = \sqrt{10}(\cos 45^o + i\operatorname{sen} 45^o)$

(d) $3i = 0 + 3i = 3_{90^o} = 3(\cos 90^o + i\operatorname{sen} 90^o)$

❼ Calcula:

(a) $10_{135^o} \cdot 7_{45^o}$ (b) $(1_{60^o})^6$ (c) $4_{180^o}/2_{180^o}$ (d) $\left(\sqrt{2}\right)_{45^o} + \left(\sqrt{2}\right)_{135^o}$

(a) $10_{135^o} \cdot 7_{45^o} = (10\cdot 7)_{135^o+45^o} = 70_{180^o} = 70(\cos 180^o + i\,\text{sen}180^o) = \mathbf{-\,70}$.

(b) $(1_{60^o})^6 = (1^6)_{60^o\cdot 6} = 1_{360^o} = \cos 360^o + i\,\text{sen}360^o = \mathbf{1}$.

(c) $\dfrac{4_{180^o}}{2_{180^o}} = \left(\dfrac{4}{2}\right)_{180^o-180^o} = 2_{0^o} = 2(\cos 0^o + i\,\text{sen}0^o) = \mathbf{2}$ **.**

(d) $\left(\left(\sqrt{2}\right)_{45^o} + \left(\sqrt{2}\right)_{45^o}\right) = 2\sqrt{2}_{\,45^o} = 2\sqrt{2}(\cos 45^o + i\,\text{sen}45^o) = 2\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \mathbf{2+2i}$

❽ Calcula las raíces cúbicas de : (a) 27 (b) -1.000 (c) - i

(a)

$$\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{27_{0^o}} = \left(\sqrt[3]{27}\right)_{\frac{0^o+360k^o}{3}} = 3_{120k^o} = \begin{cases} k=0 \Rightarrow z_1 = 3_{0^o} = 3(\cos 0^o + i\,\text{sen}0^o) = 3 \\ k=1 \Rightarrow z_2 = 3_{120^o} = 3(\cos 120^o + i\,\text{sen}120^o) = 3\left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}i \\ k=2 \Rightarrow z_3 = 3_{240^o} = 3(\cos 240^o + i\,\text{sen}240^o) = 3\left(-\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\dfrac{3}{2} - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$$

(b)

$$\sqrt[3]{-1000} = \sqrt[3]{10^3_{180^o}} = \left(\sqrt[3]{10^3}\right)_{\frac{180+360k}{3}} = 10_{60^o+120k^o} = \begin{cases} k=0 \Rightarrow z_1 = 10_{60^o} = 10(\cos 60^o + i\,\text{sen}60^o) = 10\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 5 + 5\sqrt{3}i \\ k=1 \Rightarrow z_2 = 10_{180^o} = 10(\cos 180^o + i\,\text{sen}180^o) = 10(-1+0i) = -10 \\ k=2 \Rightarrow z_3 = 10_{300^o} = 10(\cos 300^o + i\,\text{sen}300^o) = 10\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 5 - 5\sqrt{3} \end{cases}$$

(c) $$\sqrt[3]{-i} = \sqrt[3]{1_{270^o}} = \left(\sqrt[3]{1}\right)_{\frac{270+360k}{3}} = 1_{90^o+120k^o} = \begin{cases} k=0 \Rightarrow z_1 = 1_{90^o} = \cos 90^o + i\,\text{sen}90^o = i \\ k=1 \Rightarrow z_2 = 1_{210^o} = \cos 210^o + i\,\text{sen}210^o = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i \\ k=2 \Rightarrow z_3 = 1_{330^o} = \cos 330^o + i\,\text{sen}330^o = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i \end{cases}$$

❾ Interpreta como giros, dilataciones o traslaciones las siguientes operaciones:

(a) $z + 3i$ (b) $z - 4$ (c) $2z$ (d) $-3z$ (e) iz (f) $-iz$ (g) $\left(\sqrt{2} + \sqrt{2}i\right)z$

(a) z + 3i, es una suma, desde el punto de vista geométrico una traslación y dilatación vertical.

(b) z – 4 , es una suma, desde el punto de vista geométrico una traslación y contracción vertical.

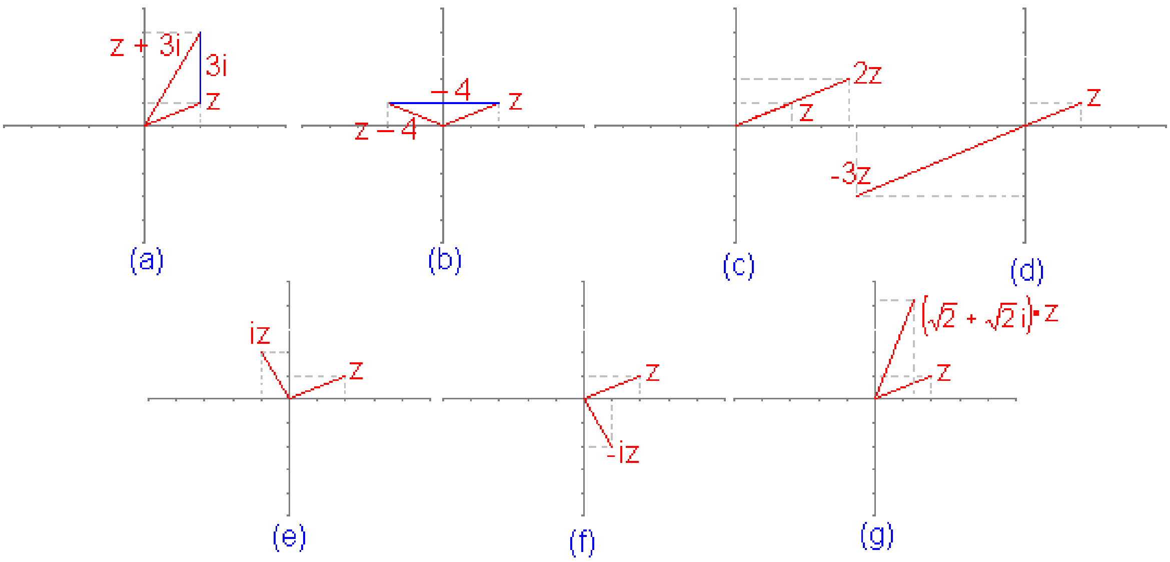
(c) 2z es un producto por un número real, luego es una dilatación de su módulo al doble conservando el argumento (dirección y sentido).

(d) –3z, es un producto por un número real negativo luego es una composición de una dilatación al triple (módulo triple) y un cambio de sentido (argumento +180º).

(e) iz, producto por i, equivale a un giro de 90º.

(f) –iz, un giro de 270º.

(g) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i\right)z = \left\{\begin{array}{l} r=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{4}=2 \\ \alpha=\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\operatorname{arctg}1=45^{o} \end{array}\right\} = 2_{45^{o}}\cdot z$, luego equivale a una dilatación al doble(el |z| multiplicado por 2) y un giro de 45º



❿ Hallar los z tales que :

(a) $\dfrac{\overline{z}}{z}=i$ (b) $z\cdot\overline{z}=1$ (c) $z^2=\overline{z}$ (d) $z\cdot\overline{z}=\overline{z}\cdot z$

Sea $z = x + yi = r_{\alpha} \Rightarrow \overline{z} = x - yi = r_{360^{o}-\alpha}$

(a) $\dfrac{\overline{z}}{z}=i \Rightarrow \dfrac{r_{360^{o}-\alpha}}{r_{\alpha}}=1_{90^{o}} \Rightarrow \left(\dfrac{r}{r}\right)_{360^{o}-2\alpha}=1_{90^{o}} \Rightarrow 1_{360-2\alpha}=1_{90^{o}} \Rightarrow 360-2\alpha=90 \Rightarrow \alpha=\dfrac{270^{o}}{2}=135^{o}$

es decir el módulo cualquiera y el ángulo de 135º o sea de la forma z = –x+xi, la bisectriz del 2º cuadrante.

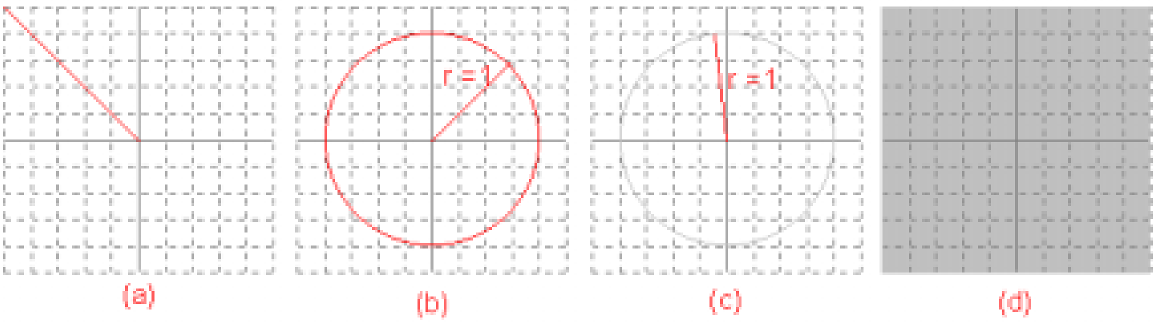
(b) $z\cdot\bar{z} = 1 \Rightarrow (r_\alpha)\cdot(r_{360-\alpha}) = 1_{0^o} \Rightarrow (r^2)_{360^o} = 1_{0^o} = 1_{360^o} \Rightarrow r^2 = 1 \Rightarrow r = \sqrt{1} = 1$, es decir los números cuyo módulo es la unidad, los que forman una circunferencia de radio 1 centrada en origen ($x^2 + y^2 = 1$)

(c) $z^2 = \bar{z} \Rightarrow (r_\alpha)^2 = (r^2)_{2\alpha} = r_{360-\alpha} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} r^2 = r \\ 2\alpha = 360-\alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} r^2 - r = 0 \Rightarrow r(r-1) = 0 \Rightarrow \left\{\begin{matrix} r=0 \\ r=1 \end{matrix}\right\} \\ 3\alpha = 360^o \Rightarrow \alpha = 360^o/3 = 120^o \end{matrix}\right\}$

Como r = 0 no es posible (no habría números) entonces la solución es :

$$z = r_\alpha = 1_{120^o} = \cos 120^o + i\,\text{sen}120^o = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

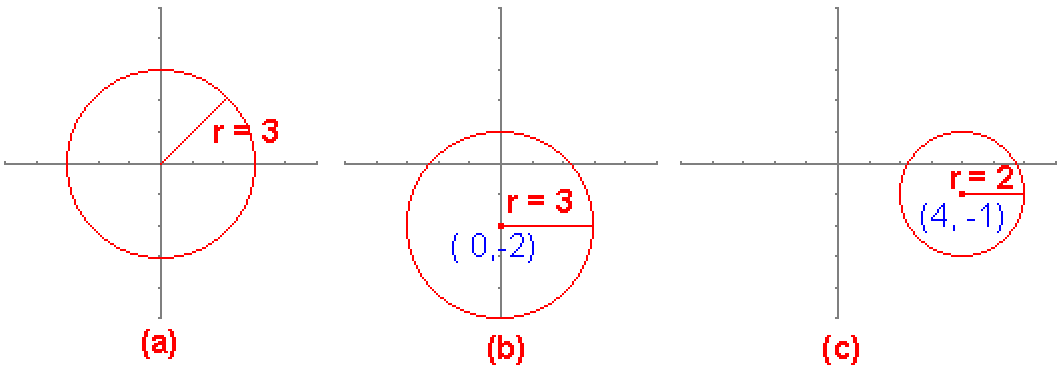
(d) $z\cdot\bar{z} = \bar{z}\cdot z$, todos los números del plano complejo pues el producto de números complejos es conmutativo.



❶❶ Representa en el plano las igualdades:
(a) |z| = 3 (b) | z + 2i | = 3 (c) | z – 4 + i |= 2

(a) |z| = 3, representa una circunferencia centrada en el origen de radio r = 3

(b) | z + 2i | = 3 ; | z – (0 –2i) | = 3, una circunferencia de centro en el punto (0, -2) y radio r = 3.
(c) | z - (4 - i) | = 2, centro (4, -1) y radio r = 2.



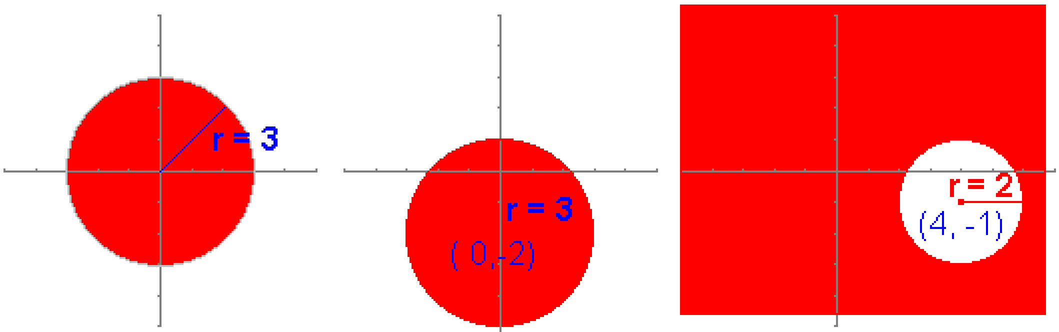
❶❷ Representa en el plano las desigualdades:

(a) $|z| < 3$ (b) $|z + 2i| \leq 3$ (c) $|z - 4 + i| > 2$

(a) $|z| < 3$, representa todos los puntos del interior de una circunferencia centrada en el origen de radio r = 3

(b) $|z + 2i| \leq 3$; $|z - (0 - 2i)| \leq 3$, el círculo de centro en el punto (0, -2) y radio r = 3.

(c) $|z - (4 - i)| > 2$, la circunferencia centro (4, -1) y radio r = 2 y el exterior a ella.



(a) (b) (c)

❶❸ Resuelve las ecuaciones :

(a) $3x^2-3x+2=0$

(b) $-4x^2 + 1 = 0$

(c) $x^4+81=0$

(d) $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$

(a) $3x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 3 \cdot 2}}{6} = \dfrac{3 \pm \sqrt{-15}}{6} = \dfrac{3 \pm \sqrt{15}\sqrt{-1}}{2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{15}\,i}{6} = \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{15}}{6} i$

(b) $-4x^2 + 1 = 0 \Rightarrow 4x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \dfrac{1}{4} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{4}} = \pm\dfrac{1}{2}$

(c)

$$x^4 + 81 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[4]{-81} = \sqrt[4]{81_{180^o}} = \left(\sqrt[4]{3^4}\right)_{\frac{180+360k}{4}} = 3_{45^o+90k^o} = \begin{cases} k = 0 \Rightarrow x_1 = 3_{45^o} = 3(\cos 45^o + i\,\text{sen}\,45^o) = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} + \dfrac{3\sqrt{2}}{2} i \\ k = 1 \Rightarrow x_2 = 3_{135^o} = 3(\cos 135^o + i\,\text{sen}\,135^o) = \dfrac{-3\sqrt{2}}{2} + \dfrac{3\sqrt{2}}{2} i \\ k = 2 \Rightarrow x_3 = 3_{225^o} = 3(\cos 225^o + i\,\text{sen}\,225^o) = \dfrac{-3\sqrt{2}}{2} - \dfrac{3\sqrt{2}}{2} i \\ k = 3 \Rightarrow x_4 = 3_{315^o} = 3(\cos 315^o + i\,\text{sen}\,315^o) = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} - \dfrac{3\sqrt{2}}{2} i \end{cases}$$

(d) $x^4 - 26x^2 + 25 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{26 \pm \sqrt{26^2 - 4 \cdot 25}}{2} = \frac{26 \pm \sqrt{576}}{2} = \frac{26 \pm 24}{2} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{26+24}{2} = 25 \Rightarrow x = \pm\sqrt{25} = \pm 5 \\ x^2 = \frac{26-24}{2} = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1} = \pm 1 \end{cases}$

❶❹ Resuelve $z^6 + 64 = 0$.

$$z^6 + 64 = 0 \Rightarrow z = \sqrt[6]{-64} = \sqrt[6]{64_{180^o}} = \left(\sqrt[6]{2^6}\right)_{\frac{180+360k}{6}} = 2_{30^o+60k^o} = \begin{cases} k=0 \Rightarrow z_1 = 2_{30^o} = 2(\cos 30^o + i\,\text{sen}\,30^o) = \sqrt{3} + i \\ k=1 \Rightarrow z_2 = 2_{90^o} = 2(\cos 90^o + i\,\text{sen}\,90^o) = 2i \\ k=2 \Rightarrow z_3 = 2_{150^o} = 2(\cos 150^o + i\,\text{sen}\,150^o) = -\sqrt{3} + i \\ k=3 \Rightarrow z_4 = 2_{210^o} = 2(\cos 210^o + i\,\text{sen}\,210^o) = -\sqrt{3} - i \\ k=4 \Rightarrow z_5 = 2_{270^o} = 2(\cos 270^o + i\,\text{sen}\,270^o) = -2i \\ k=5 \Rightarrow z_6 = 2_{330^o} = 2(\cos 330^o + i\,\text{sen}\,330^o) = \sqrt{3} - i \end{cases}$$

AUTOEVALUACIÓN (❶❸❼)

❶ Indica si estos números son reales, imaginarios puros o complejos en general:

(a) $145 - \pi$ (b) $82i$ (c) $1.500 - 0{,}7i$ (d) 0 (e) $-\pi$

(a) Real, no tiene parte imaginaria **(b)** Imaginario puro, no tiene parte real **(c)** Complejo, tiene ambas partes **(d)** Real, no tiene parte imaginaria **(e)** Real, no tiene parte imaginaria

❷ Completa las operaciones:

(a) $(3 - 8i) - (z) = 6 + i$ (b) $(5 + i)(4 - 2i) = z$ (c) $5 - 7i - (3 - i)(-2i + 4) = z$

(a) $(3 - 8i) - z = 6 + i$; $z = 3 - 8i - (6 + i) = 3 - 8i - 6 - i = -3 - 9i$.

(b) $z = (5 + i) \cdot (4 - 2i) = 5(4 - 2i) + i(4 - 2i) = 20 - 10i + 4i - 2i^2 = 20 - 6i + 2 = 22 - 6i$.

(c) $z = 5 - 7i - (3-i)\cdot(-2i+4) = 5 - 7i - (-6i + 12 + 2i^2 - 4i) = 5 - 7i + 6i - 12 + 2 + 4i = -5 + 3i$.

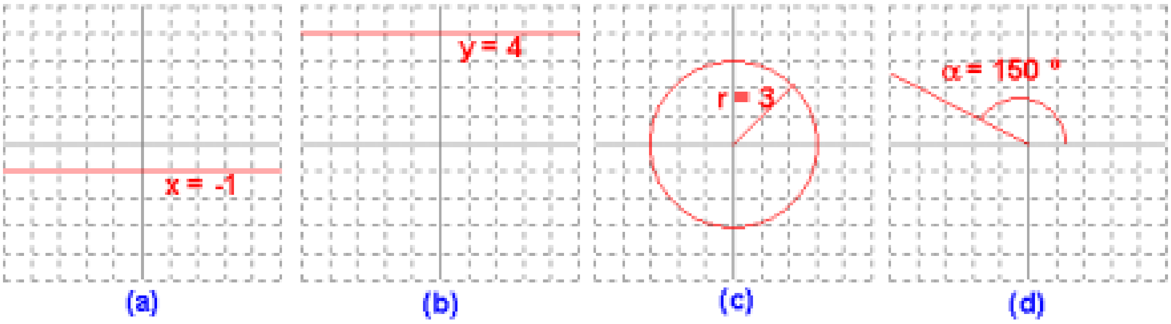
❸ Describe dónde se localizan en el plano complejo todos los números complejos que tienen:
(a) Parte real igual a -1. (b) Parte imaginaria igual a 4. (c) Módulo igual a 3. (d) Argumento igual a 150°.

(a) En la recta vertical x = -1.

(b) En la recta horizontal y = 4.

(c) En la circunferencia, centrada en el origen, de radio 3.

(d) Semirecta que forma un ángulo de 150º.



❹ Dado el número complejo z = 3 - 4i, calcula:

(a) Su conjugado $\bar{z}$. (b) Su inverso 1/z

(a) $\bar{z} = 3 + 4i$; **(b)** $\frac{1}{z} = \frac{1}{3-4i} = \frac{3+4i}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{3+4i}{3^2-(4i)^2} = \frac{3+4i}{9-16i^2} = \frac{3+4i}{9-16(-1)} = \frac{3+4i}{9+16} = \frac{3}{25} + \frac{4}{25}i$

❺ Halla b de manera que $\frac{3+bi}{2-i}$ sea imaginario puro.

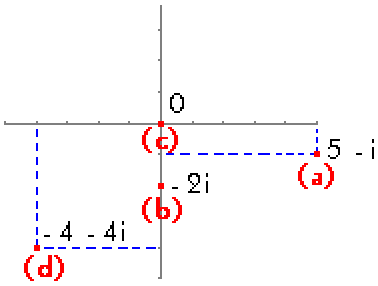
Realizamos el cociente y en el número complejo obtenido igualamos a cero la parte real para que sea imaginario puro :

$$\frac{3+bi}{2-i} = \frac{(3+bi)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{6+3i+2bi+bi^2}{2^2-i^2} = \frac{6-b}{5} + \frac{3+2b}{5}i \Rightarrow \frac{6-b}{5} = 0 \Rightarrow 6-b=0 \Rightarrow b=6$$

❻ Marca en el plano complejo los puntos correspondientes a los números complejos:

(a) 5 - i (b) - 2i (c) 0 (d) - 4 - 4i

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧



◈◈◈▣▣◎▣▣◈◈◈

❼ Escribe la parte real y la parte imaginaria de los números complejos:

(a) 1_{180° (b) $\left(\sqrt{8}\right)_{135^\circ}$ (c) 4_{360° (d) π_{90°

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

Se nos dan en forma polar, los pasamos a binómica, a través de la trigonométrica :

(a) $1_{180^\circ} = \cos 180^\circ + i\,\text{sen}\,180^\circ = -1 + 0i \Rightarrow$ (-1,0)

(b) $\left(\sqrt{8}\right)_{135^\circ} = \sqrt{8}(\cos 135^\circ + i\,\text{sen}\,135^\circ) = \sqrt{2}(-\cos 45^\circ + i\,\text{sen}\,45^\circ) = \sqrt{8}(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = -2 + 2i \Rightarrow$ (2, -2)

(c) $4_{360^\circ} = 4(\cos 360^\circ + i\,\text{sen}\,360^\circ) = 4(1 + 0i) = 4 + 0i \Rightarrow$ (4, 0)

(d) $\pi_{90^\circ} = \pi(\cos 90^\circ + i\,\text{sen}\,90^\circ) = \pi\,(0 + i) = \pi i \Rightarrow$ $(0, \pi)$.

◈◈◈▣▣◎▣▣◈◈◈

❽ Pasa a forma polar:

(a) 5 (b) - 5 (c) 5i (d) - 5i

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

(a) $5 = 5_{0^\circ}$, ya que se representa en la parte positiva del eje horizontal.

(b) $-5 = 5_{180^\circ}$, pues se representa en la parte negativa del eje horizontal.

(c) $5i = 5_{90^\circ}$, está en la parte positiva del eje vertical.

(d) $-5i = 5_{270^\circ}$, está en la parte negativa del eje vertical.

◈◈◈▣▣◎▣▣◈◈◈

❾ Pasa a forma trigonométrica los números complejos: (a) 3i (b) 1 + i (c) -7 - 7i

(a) $3i = 3_{90^o} = 3\,(c0s90^o + isen90^o)$

(b) $1+i = \left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \\ \alpha = arctg1 = 45^o \end{array} \right\} = \sqrt{2}_{45^o} = \sqrt{2}(\cos 45^o + isen45^o)$

(c) $-7-7i = \left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{(-7)^2+(-7)^2} = \sqrt{49+49} = \sqrt{2 \cdot 49} = 7\sqrt{2} \\ \alpha = arctg\dfrac{-7}{-7} = arctg1 = 225^o, 180^o < \alpha < 270^o \end{array} \right\} = 7\sqrt{2}_{225^o} = 7\sqrt{2}(\cos 225^o + isen225^o)$

❿ Calcula estas potencias:

(a) i^{300} (b) $i^{2.255}$ (c) $(-i)^{21}$ (d) $(-i)^{305}$

(a) $i^{300} = i^{4\cdot 75} = (i^4)^{75} = 1^{75} = 1.$

(b) $i^{2.255} = i^{4\cdot 563+3} = (i^4)^{563} \cdot i^3 = 1^{563} \cdot i^3 = i^3 = -i.$

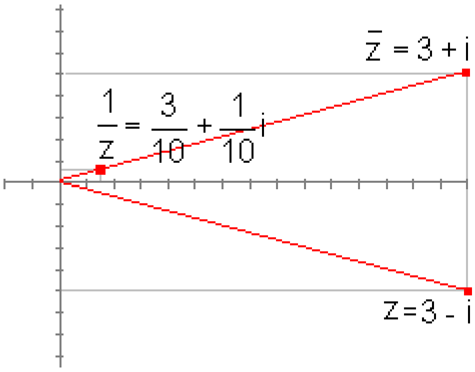
(c) $(-i)^{21} = -i^{21} = -i^{4\cdot 5+1} = -(i^4)^5 \cdot i = -1^5 \cdot i = -i.$

(d) $(-i)^{305} = -i^{305} = -i^{4\cdot 76+1} = -(i^4)^{76} \cdot i = -1^{76} \cdot i = -i.$

⓫ Sea z = 3 - i. Calcula y representa: (a) El inverso de z. (b) El conjugado de z.

(a) $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{3-i} = \dfrac{3+i}{(3-i)(3+i)} = \dfrac{3+i}{3^2-i^2} = \dfrac{3+i}{9+1} = \dfrac{3}{10} + \dfrac{1}{10}i$

(b) $\bar{z} = 3+i$



❶❷ El producto por - i, ¿produce un giro de 90° en sentido de las agujas del reloj?

$-i = 1_{270^o}$, luego al multiplicar por –i, el módulo queda igual y el ángulo gira 270º, como los ángulos positivos se miden en sentido antihorario, 270º equivale a 360º - 270º = 90º en sentido horario.

❶❸ Dado z = 1 + i, representa z, z^2, z^3, z^4, ..., en el plano.

$$z = 1 + i = \left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ \alpha = \mathrm{arctg}1 = 45^o \end{array} \right\} = \sqrt{2}_{45^o}$$

$$z^2 = \left(\sqrt{2}_{45^o}\right)^2 = 2_{90^o} = 2(\cos 90^o + i\,\mathrm{sen} 90) = 2i$$

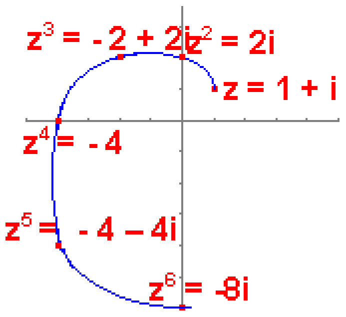
$$z^3 = \left(\sqrt{2}_{45^o}\right)^3 = 2\sqrt{2}_{135^o} = 2\sqrt{2}(\cos 135^o + i\,\mathrm{sen}135^o) = 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -2 + 2i$$

$$z^4 = \left(\sqrt{2}_{45^o}\right)^4 = 4_{180^o} = 4(\cos 180^o + i\,\mathrm{sen}180^o) = 4(-1 + 0i) = -4$$

$$z^5 = \left(\sqrt{2}_{45^o}\right)^5 = 4\sqrt{2}_{225^o} = 4\sqrt{2}(\cos 225^o + i\,\mathrm{sen}225^o) = 4\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -4 - 4i$$

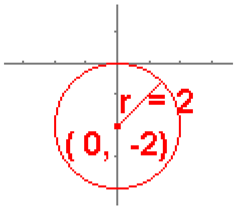
$$z^6 = \left(\sqrt{2}_{45^o}\right)^6 = 8_{270^o} = 8(\cos 270^o + i\,\mathrm{sen}270^o) = 8(0 - i) = -8i$$

Uniendo los puntos se forma una espiral :



❶❹ Representa en el plano la igualdad Iz - 2iI = 2.

Representa una circunferencia de centro en (0, -2) y radio 2 :



❶❺ Resuelve estas ecuaciones de segundo grado:

(a) $2x^2+5x+7=0$ (b) $-5x^2+\sqrt{5}\,x-0{,}25=0$

$$\textbf{(a)}\quad 2x^2+5x+7=0 \Rightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot2\cdot7}}{2\cdot2}=\frac{-5\pm\sqrt{25-56}}{4}=\frac{-5\pm\sqrt{-31}}{4}=\frac{-5}{4}\pm\frac{\sqrt{31}}{4}i$$

$$\textbf{(b)}\quad -5x^2+\sqrt{5}x-0'25=0 \Rightarrow x=\frac{-\sqrt{5}\pm\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2-4\cdot5\cdot0'25}}{-2\cdot5}=\frac{-\sqrt{5}\pm\sqrt{5-5}}{-10}=\frac{\sqrt{5}}{10}\ \text{Doble.}$$

❶❻ Resuelve estas ecuaciones bicuadráticas:

(a) $x^4-81=0$ (b) $x^4+16=0$

$$\text{(a)}\quad x^4-81=0\Rightarrow x=\sqrt[4]{81}=\left(\sqrt[4]{3^4}\right)_{\frac{0+360k}{4}}=3_{90k^o}=\begin{cases} k=0\Rightarrow x_1=3_{0^o}=3(\cos 0^o+i\operatorname{sen}0^o)=3\\ k=1\Rightarrow x_2=3_{90^o}=3(\cos 90^o+i\operatorname{sen}90^o)=3i\\ k=2\Rightarrow x_3=3_{180^o}=3(\cos 180^o+i\operatorname{sen}180^o)=-3\\ k=3\Rightarrow x_4=3_{270^o}=3(\cos 270^o+i\operatorname{sen}270^o)=-3i\end{cases}$$

$$\text{(b)}\quad x^4+16=0\Rightarrow x^4=-16\Rightarrow x=\sqrt[4]{-16}=\sqrt[4]{16_{180^o}}=2_{\frac{180+360k}{4}}=2_{45^o+90k^o}=$$

$$=\begin{cases} k=0\Rightarrow x_1=2_{45^o}=2(\cos 45^o+i\operatorname{sen}45^o)=2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\sqrt{2}+\sqrt{2}i\\ k=1\Rightarrow x_2=2_{135^o}=2(\cos 135^o+i\operatorname{sen}135^o)=2\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)=-\sqrt{2}+\sqrt{2}i\\ k=2\Rightarrow x_3=2_{225^o}=2(\cos 225^o+i\operatorname{sen}225^o)=2\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)=-\sqrt{2}-\sqrt{2}i\\ k=3\Rightarrow x_4=2_{315^o}=2(\cos 315^o+i\operatorname{sen}315^o)=2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\sqrt{2}-\sqrt{2}i\end{cases}$$