❶❷ *Demuestra estas identidades:*

(a) $\dfrac{1}{1+\text{sen}\alpha}+\dfrac{1}{1-\text{sen}\alpha}=2\sec^2\alpha$

(b) (1 - cos α)(cosec α + cotgα) = sen α

(c) $\text{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\cot g\alpha+\cot g\beta}{\cot g\alpha\cdot\cot g\beta-1}$

(a) Partimos del primer miembro:

$$\frac{1}{1+\text{sen}\alpha}+\frac{1}{1-\text{sen}\alpha}=\frac{1-\text{sen}\alpha+1+\text{sen}\alpha}{(1+\text{sen}\alpha)\cdot(1-\text{sen}\alpha)}=\frac{2}{1-\text{sen}^2\alpha}=\frac{2}{\cos^2\alpha}=2\sec^2\alpha$$

- Hacemos la suma (teniendo en cuenta que el denominador común es el producto de denominadores)
- Arriba reducimos los senos (que son cero por tener signo opuesto) y abajo es una suma por una diferencia que es diferencia de cuadrados ((a+b) (a-b) = $a^2 - b^2$).
- De la ecuación fundamental.
- Definición de secante.

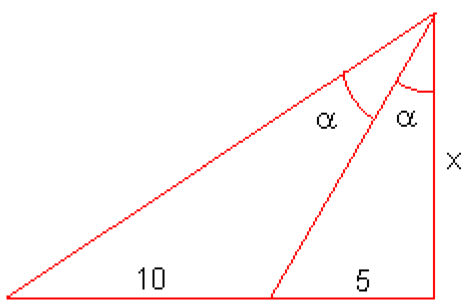
(b) Partimos del primer miembro :

$$(1-\cos\alpha)(\text{cosec}\alpha+\cot g\alpha)=(1-\cos\alpha)\cdot\left(\frac{1}{\text{sen}\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\text{sen}\alpha}\right)=(1-\cos\alpha)\cdot\left(\frac{1+\cos\alpha}{\text{sen}\alpha}\right)=\frac{1-\cos^2\alpha}{\text{sen}\alpha}=\frac{\text{sen}^2\alpha}{\text{sen}\alpha}=\text{sen}\alpha$$

(c) Partimos del segundo miembro :

$$\frac{\cot g\alpha+\cot g\beta}{\cot g\alpha\cdot\cot g\beta-1}=\frac{\dfrac{1}{\text{tg}\alpha}+\dfrac{1}{\text{tg}\beta}}{\dfrac{1}{\text{tg}\alpha\cdot\text{tg}\beta}-1}=\frac{\dfrac{\text{tg}\beta+\text{tg}\alpha}{\text{tg}\alpha\cdot\text{tg}\beta}}{\dfrac{1-\text{tg}\alpha\cdot\text{tg}\beta}{\text{tg}\alpha\cdot\text{tg}\beta}}=\frac{\text{tg}\alpha+\text{tg}\beta}{1-\text{tg}\alpha\cdot\text{tg}\beta}=\text{tg}(\alpha+\beta)$$

❶❸ *Calcula la altura x en la Figura, utilizando la identidad [IT20].*



$$\text{tg}2\alpha=\frac{2\text{tg}\alpha}{1-\text{tg}^2\alpha}$$

Si aplicamos la definición de la tangente en los dos triángulos :

$$\text{tg}\alpha=\frac{\text{opuesto}}{\text{contiguo}}=\frac{5}{x}\ \text{y}\ \text{tg}2\alpha=\frac{\text{opuesto}}{\text{contiguo}}=\frac{10+5}{x}=\frac{15}{x}$$

Sustituyendo ahora estas dos expresiones en la primera igualdad tendremos una ecuación de segundo grado, en x, que resuelta nos dará el valor de x buscado :

$$\frac{15}{x}=\frac{2\frac{5}{x}}{1-\left(\frac{5}{x}\right)^2}=\frac{10/x}{1-\frac{25}{x^2}}=\frac{10/x}{(x^2-25)/x^2}=\frac{10x}{x^2-25}\Leftrightarrow 15(x^2-25)=10x^2\Leftrightarrow 3x^2-75=2x^2\Leftrightarrow x^2=75\Rightarrow x=\sqrt{75}=8'66$$

◈◈◈◙◙◎◙◙◈◈◈

❶❹ *Halla todas las soluciones de las ecuaciones:*

(a) sen α = 1 *(b)* cos α = -1 *(c)* tg α = $\sqrt{3}$

Exprésalas en grados y en radianes.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

(a) senα = 1 ⇒ α = arc sen1 = 90º = π /2 rad.

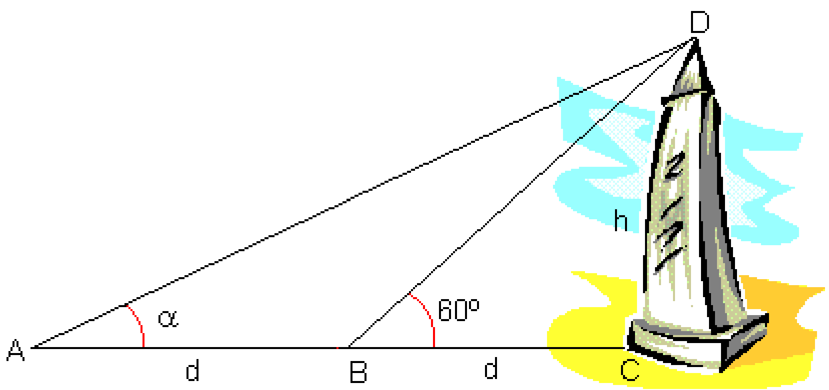
(b) cos α = -1⇒ α = arc cos -1 = 180º = π rad.

(c) $\text{tg}\alpha=\sqrt{3}\Rightarrow\alpha=\text{arctg}\sqrt{3}=\left\{\begin{matrix}60º=\frac{\pi}{3}\text{rad}\\ 240º=\frac{4\pi}{3}\text{rad}\end{matrix}\right\}$

◈◈◈◙◙◎◙◙◈◈◈

❶❺ *Mirando a lo alto de un rascacielos lo vemos con un ángulo de elevación de 60°. ¿Con qué ángulo de elevación lo veríamos desde una distancia doble?*

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧



Ya hemos visto problemas similares, es una variante del típico problema de "doble observación ", aplicamos la definición de la tangente a los dos ángulos el conocido y el desconocido :

En el triángulo BCD :

$$\text{tg}60º=\frac{h}{d}\ (1)$$

En el triángulo ACD :

$$\text{tg}\alpha=\frac{h}{2d}\ (2)\ \text{Despejamos h de (1)}\ h=d\cdot\text{tg}60=d\sqrt{3}\ \text{y lo sustituimos en (2)}:\ \text{tg}\alpha=\frac{d\sqrt{3}}{2d}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Sólo nos queda hallar, con la calculadora el ángulo cuya tangente tiene ese valor :

$$\alpha = \text{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2} = 40^{o}53'36''$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❶❻ *A un ebanista le han encargado un tablero triangular con dos lados de longitudes 1 m y 1,75 m, y el ángulo opuesto al primero de 30°, y no sabe qué hacer. ¿Por qué?*

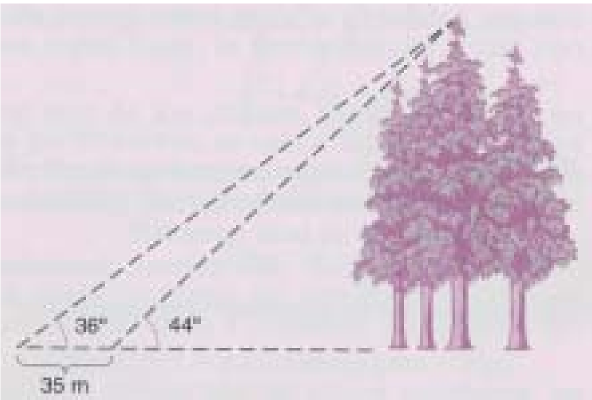
✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

Porque no tiene datos suficientes para cortar el tablero, le falta un dato : otro ángulo u otro lado para que el problema esté determinado.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❶❼ *Los árboles más altos del mundo se encuentran en el Parque Redwood de California. Estima la altura de uno de ellos a partir de la información de la siguiente ilustración.*

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧



Otra vez la " doble observación ":

Sea:

h = altura de los árboles.
d = distancia de los árboles al primer punto de observación.

$$\text{tg}44^{o} = \frac{h}{d} \text{ y } \text{tg}36^{o} = \frac{h}{d+35}$$

Despejamos d de la primera y lo sustituimos en la segunda (quizás para ti sea más fácil despejar h de las dos, igualar y despejar d, hallando después h) :

$$d = \frac{h}{\text{tg}44^{o}} \Rightarrow \text{tg}36^{o} = \frac{h}{\frac{h}{\text{tg}44^{o}}+35} \Rightarrow \text{tg}36^{o}\left(\frac{h}{\text{tg}44^{o}}+35\right) = h \Leftrightarrow \frac{h}{\text{tg}44^{o}}+35 = \frac{h}{\text{tg}36^{o}} \Leftrightarrow \frac{h}{\text{tg}44^{o}} - \frac{h}{\text{tg}36^{o}} = -35$$

$$h\left(\frac{1}{\text{tg}44^{o}} - \frac{1}{\text{tg}36^{o}}\right) = -35 \Leftrightarrow h(1'036 - 1'38) = -35 \Leftrightarrow h = \frac{-35}{-0'344} = 101'7 \text{ m}$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❶❽ *Resuelve la ecuación cos x - sen x = 0,5.*

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

$$\cos x - \text{sen}x = 0'5 \Leftrightarrow \sqrt{1-\text{sen}^2 x} - \text{sen}x = 0'5 \Leftrightarrow \sqrt{1-\text{sen}^2 x} = (0'5+\text{sen}x) \Leftrightarrow \left(\sqrt{1-\text{sen}^2 x}\right)^2 = (0'5+\text{sen}x)^2$$

$$1-\text{sen}^2 x = 0'25 + \text{sen}x + \text{sen}^2 x \Leftrightarrow 2\text{sen}^2 x + \text{sen}x - 0'75 = 0 \Rightarrow \text{sen}x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4\cdot 2\cdot 0'75}}{4} = \frac{-1\pm\sqrt{7}}{4}$$

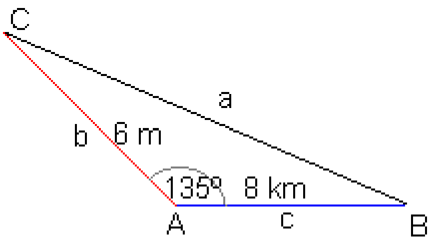
$$senx = 0'41 \Rightarrow x = arcsen0'41 = \begin{Bmatrix} 24^o17'42'' \\ 155^o42' \end{Bmatrix}; senx = -0'91 \Rightarrow x = arcsen - 0'91 = \begin{Bmatrix} 245^o42' \\ 294^o17'42'' \end{Bmatrix}$$

válidas x = 24º 17’ 42”

◈◈◈▣▣◎▣▣◈◈◈

❶❾ *El radar de un buque de guerra detecta un barco enemigo en dirección este a 8 km de distancia y otro en dirección noroeste a 6 km. ¿Cuánto distan entre sí los dos barcos detectados?*

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧



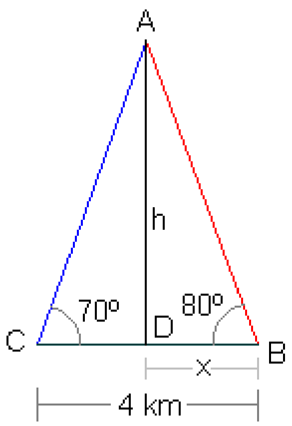
Como sabemos dos lados **c** = **8** km y **b** = **6** km y el ángulo comprendido **A** = 90º+ 45º = **135**º, para hallar el otro lado **a**, tenemos que usar el teorema del coseno :

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos \hat{A}} = \sqrt{6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos 135^o} = \sqrt{167'88} = 13 \text{ km}$$

◈◈◈▣▣◎▣▣◈◈◈

❷⓿ *Dos baterías antiaéreas, distantes 4 km entre sí, disparan a un caza enemigo en el momento en que éste sobrevuela la línea que forman aquéllas. El primero ha de dirigir sus disparos con un ángulo de elevación de 70°, y el otro con 80°. ¿A qué altura vuela el caza?*

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧



Otro caso de “doble observación” :

$tg\hat{B} = \dfrac{h}{x} \Rightarrow h = x \cdot tg80^o$ y $tg\hat{C} = \dfrac{h}{4-x} \Rightarrow h = (4-x) \cdot tg70^o$, igualando y resolviendo :

x·tg80º = (4 – x) · tg 70º ; x·tg80º = 4·tg70º - x·tg70º ; x(tg80º+tg70º) = 4tg70º ; x = 4·tg70º/(tg 80º + tg 70º) = 4·2’75/(2’75 + 5’67) = 1’31 km

Y sustituyendo : h = x · tg 80º = 1’31 · tg 80º = **7’4 km**.

◈◈◈▣▣◎▣▣◈◈◈

❷❶ *Del extremo superior de un poste se tienden dos cables, para amarrarlo al suelo, hasta dos puntos que distan 20 m uno de otro. Los cables forman con el suelo ángulos de 75° y 65°. Averigua la altura del poste. (Suponemos que el poste y los cables están en un mismo plano vertical).*

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

Igual que el ejercicio precedente: $tg75^o = \dfrac{h}{x}$ y $tg65^o = \dfrac{h}{20-x}$

Despejamos h de ambas e igualamos (en ejercicios anteriores hemos despejado x para que veas las dos maneras de hacerlo) :

De la primera :h = x · tg 75º = 3’73x. De la segunda h = (20 – x) · tg 65º = (20 - x) · 2’14.

Igualando y resolviendo: 3’73x = (20 – x)2’14 ; 3’73x = 42’89 – 2’14x ; 3’73x+ 2’14x = 42’89 ; 5’87x = 42’89 ; x = 42’89/5’87 = 7’31 m. Sustituyendo :

h = 3’73 · 7’31 = 27’27 m
h = (20 – 7’31)·2’14 = 12’69·2’14 = 27’2 m

Vemos que haciéndolo de esta manera hay ciertas diferencias (por las aproximaciones realizadas, cuantos más decimales pongamos menos diferencias habrá) que son menores si lo hacemos como en el ejercicio nº ❶❼

◈◈◈▣▣◎▣▣◈◈◈

AUTOEVALUACIÓN (📖 ❺⓿)

❶ *¿Qué razones trigonométricas tienen sus valores comprendidos entre -1 y 1?*

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

El seno y el coseno, ya lo hemos dicho en un ejercicio anterior, pues lo máximo y mínimo que pueden valer es el radio de la circunferencia trigonométrica, y esta tiene radio unidad (r = 1).

◈◈◈▣▣◎▣▣◈◈◈

❷ *¿Cuándo se considera positivo un ángulo?*

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

Cuando para unir la semirrecta del origen con la del final hay que girar en sentido antihorario (↺).

◈◈◈▣▣◎▣▣◈◈◈

❸ *Completa estas identidades:*

(a) $\text{sen}^2\ \alpha + \cos^2\ \alpha =$
(b) sen α cos β + cosα sen β=
(c) $\dfrac{\text{tg}\alpha - \text{tg}\beta}{1 + \text{tg}\alpha \cdot \text{tg}\beta} = \square$
(d) $\text{sen}\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-[\ ]}{2}}$
(e) cos (90° - α) =

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

(a) $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$

(b) sen α cos β + cosα sen β= sen(α+ β).

(c) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta} = \operatorname{tg}(\alpha - \beta)$

(d) $\operatorname{sen}\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$

(e) cos (90° - α) = sen α.

◈◈◈▣▣◎▣▣◈◈◈

❹ *Para calcular las razones trigonométricas de un ángulo en posición normal, ¿basta conocer un punto de su lado terminal?*

✧✧✧⌗⌗⌖⌗⌗✧✧✧

Sí, si conocemos P (a, b) podemos hallar todas las razones (véase la pág 27)

◈◈◈▣▣◎▣▣◈◈◈

❺ *Demuestra la identidad trigonométrica:*

$$(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{cotg}\alpha)\operatorname{sen}\alpha \cos\alpha = 1 - 2\cos^2\alpha.$$

✧✧✧⌗⌗⌖⌗⌗✧✧✧

Partimos del primer miembro, sustituyendo la tg y cotg en función del seno y coseno :

$$(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{cotg}\alpha)\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha = \left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\right)\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{\operatorname{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha}\cdot\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha = \operatorname{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha =$$

$= (1 - \cos^2\alpha) - \cos^2\alpha = 1 - 2\cos^2\alpha$, q.e.d.

◈◈◈▣▣◎▣▣◈◈◈

❻ *Una de estas identidades no es correcta. ¿Cuál?*

(a) $\dfrac{1+\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\cos\alpha}{1-\operatorname{sen}\alpha}$

(b) $\dfrac{1-\sec\alpha}{1+\sec\alpha} = \dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$

(e) $\dfrac{\operatorname{cotg}^2\alpha - 1}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \operatorname{cotg}^2\alpha$

(a) $\dfrac{1+\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{\cos\alpha}{1-\text{sen}\alpha}\xrightarrow{\text{multiplicando en cruz}}(1+\text{sen}\alpha)\cdot(1-\text{sen}\alpha)=1-\text{sen}^2\alpha=\cos^2\alpha\Rightarrow \text{V}$

(b) $\dfrac{1-\sec\alpha}{1+\sec\alpha}=\dfrac{1-\dfrac{1}{\cos\alpha}}{1+\dfrac{1}{\cos\alpha}}=\dfrac{\dfrac{\cos\alpha-1}{\cos\alpha}}{\dfrac{\cos\alpha+1}{\cos\alpha}}=\dfrac{\cos\alpha-1}{\cos\alpha+1}=-\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\Rightarrow \text{Falsa}$

(e) $\dfrac{\cot g^2\alpha-1}{1-tg^2\alpha}=\dfrac{\dfrac{1}{tg^2\alpha}-1}{1-tg^2\alpha}=\dfrac{\dfrac{1-tg^2\alpha}{tg^2\alpha}}{1-tg^2\alpha}=\dfrac{(1-tg^2\alpha)}{(1-tg^2\alpha)tg^2\alpha}=\dfrac{1}{tg^2\alpha}=\cot g^2\alpha\Rightarrow \text{Verdadera}$

❼ *Calcula el seno y el coseno de 337° 30' haciendo uso de identidades trigonométricas.*

$$\text{sen}(337^o30')=\text{sen}\left(\frac{675^o}{2}\right)=-\sqrt{\frac{1-\cos 675^o}{2}}[IT21]^*;\cos(337^o30')=\cos\left(\frac{675^o}{2}\right)=\sqrt{\frac{1+\cos 675^o}{2}}[IT22]^*$$

Necesitamos hallar previamente el cos 675º = cos(360º + 315º) = cos 315º = cos (360º - 45º) = cos 45º, luego :

$$\text{sen}337^o30'=-\sqrt{\frac{1-\cos 45^o}{2}}=-\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=-\sqrt{\frac{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}{2}}=-\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

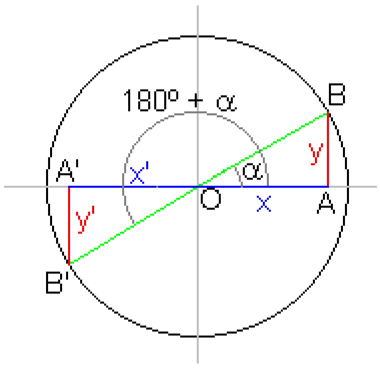
$$\cos 337^o30'=\sqrt{\frac{1+\cos 45^o}{2}}=-\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

❽ *Dibujando sobre el círculo unidad un ángulo a y el ángulo opuesto a + 180°, comprueba la validez de cada una de estas relaciones:*

(a) sen (α+ 180°) = - sen α

(b) cos (α + 180°) = - cos α

(c) tg (α+ 180°) = tg α



✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

Los triángulos rectángulos AOB y A'OB' son iguales pues tienen los tres ángulos iguales y un lado igual (el radios , r = 1 , en verde), luego x = - x' e y = - y'

(a) sen (α+ 180°) = y' = -y = - sen α

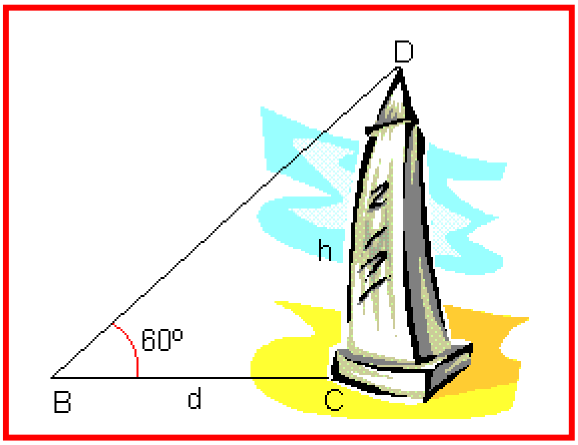
(b) cos (α + 180°) = x' = - x = - cos α

(c) $\operatorname{tg}(180^o+\alpha)=\dfrac{\operatorname{sen}(180^o+\alpha)}{\cos(180^o+\alpha)}=\dfrac{-\operatorname{sen}\alpha}{-\cos\alpha}=\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$

◈◈◈◘◘◎◘◘◈◈◈

❾ *El mayor obelisco del mundo es el del Monumento a G. Washington, con 169,3 m de altura. ¿A qué distancia hay que colocarse para ver su punta con un ángulo de elevación de 60°?*

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧



$$\operatorname{tg}60^o=\frac{h}{d}\Rightarrow d=\frac{h}{\operatorname{tg}60^o}=\frac{169'3\text{ m}}{\sqrt{3}}=97'75\text{ m}$$

◈◈◈◘◘◎◘◘◈◈◈

❿ *El faro más alto del mundo es el del Parque Yamashita en Yokohama. Mide 106 m de altura. ¿Desde qué distancia veríamos su punta con un ángulo de elevación de 1°?*

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

Semejante al anterior :

$$\operatorname{tg}1^o=\frac{h}{d}\Rightarrow d=\frac{h}{\operatorname{tg}1^o}=\frac{106}{0'0175}=6.072'7\text{ m}$$

◈◈◈◘◘◎◘◘◈◈◈

⓫ *¿Para qué ángulos agudos a se verifica 1 + sen 2 α = (sen α + cos α)² ?*

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

$1 + \text{sen } 2\alpha = (\text{sen } \alpha + \cos \alpha)^2$ = { desarrollamos el 2º miembro } = $\text{sen}^2\alpha + 2\text{sen}\alpha\cdot\cos\alpha + \cos^2\alpha$ = $(\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha) + 2\text{sen}\alpha\cos\alpha = 1 + 2\text{sen } 2\alpha$, ya que el paréntesis es la ecuación fundamental de la trigonometría y el 2º sumando el sen2α).

Se cumple para cualquier valor de α pues una identidad.

◈◈◈▣▣◎▣▣◈◈◈

❶❷ *Halla todas las soluciones de la ecuación sen α = 0. Exprésalas en grados y en radianes.*

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

α = arc sen 0 = 180kº = πk rad. k = 0, 1, 2, …

◈◈◈▣▣◎▣▣◈◈◈

❶❸ *¿Existe algún ángulo a que verifique la ecuación $2\cos^2\alpha = \cos 2a$?*

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

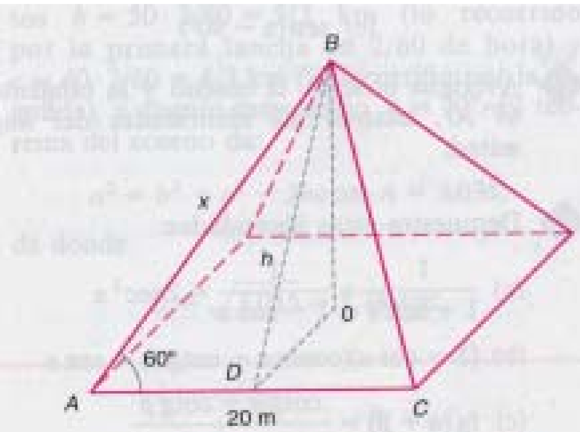
$2\cos^2\alpha = \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) = \cos^2\alpha - 1 + \cos^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, luego se deduce que 1 = -1 lo que nos es cierto, por tanto no se puede cumplir la ecuación para ningún valor de α , es incompatible.

◈◈◈▣▣◎▣▣◈◈◈

❶❹ *En la pirámide de base cuadrada de la figura halla:*

(a) La longitud x de una de las aristas, usando el triángulo equilátero ABC.
(b) La altura h de una de las caras, usando ese mismo triángulo partido en dos triángulos rectángulos iguales.
(c) La altura de la pirámide, mediante el triángulo rectángulo BOD.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧



(a) Si el triángulo es equilátero los tres lados miden 20 m, luego x = 20 m.

(b) Aplicamos el teorema de Pitágoras :

$$h = \sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{20^2 - 10^2} = \sqrt{300} = 17'32 \text{ m}$$

(c) De nuevo el teorema de Pitágoras :

$$a = \sqrt{h^2 - (l/2)^2} = \sqrt{300 - 100} = \sqrt{200} = 14'14 \text{ m}$$

◈◈◈▣▣◎▣▣◈◈◈

❶❺ *Un jugador de golf lanza la pelota desde la posición de salida de un hoyo, distante 350 m, y alcanza una distancia de 180 m. Pero el golpe ha sido defectuoso y la dirección de la pelota forma un ángulo de 20° respecto de la dirección hacia el hoyo. ¿A qué distancia del hoyo ha quedado su pelota?*

Tenemos un ángulo y los lados que lo forman, luego hemos de aplicar el teorema del coseno :

$$x=\sqrt{180^2+350^2-2\cdot 180\cdot 350\cdot \cos 20^o}=\sqrt{36498'73}=191\,m$$

❶❻ *Resuelve la ecuación 2 cos x - sen x = 1.*

$$2\cos x-\sqrt{1-\cos^2 x}=1\Leftrightarrow 2\cos x-1=\sqrt{1-\cos^2 x}\Leftrightarrow (2\cos x-1)^2=(\sqrt{1-\cos^2 x})^2\Leftrightarrow$$

$$4\cos^2 x-4\cos x+1=1-\cos^2 x\Leftrightarrow 5\cos^2 x-4\cos x=0\Leftrightarrow \cos x(5\cos x-4)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{matrix}\cos x=0\Rightarrow x=270k\\ 5\cos x-4=0;\cos x=\dfrac{4}{5}\Rightarrow x=\arccos\dfrac{4}{5}=36^o52'11''+360k\end{matrix}\right\}$$

❶❼ *Dos observadores, distantes 5 km entre sí, divisan un OVNI dirigiendo sus prismáticos con ángulos de elevación respectivos de 80° y 65°. ¿A qué altura se encuentra el OVNI? (Suponemos que está situado sobre la línea que une a los dos observadores.)*

Un último problema de "doble observación" :

$$tg80^o=\frac{h}{x}\Rightarrow x=\frac{h}{tg80^o};tg65^o=\frac{h}{5-x}\xrightarrow{\text{sustituimos}}tg65^o=\frac{h}{5-\dfrac{h}{tg80^o}}\Leftrightarrow (5tg80^o-h)tg65^o=h\,tg80^o\Leftrightarrow$$

$$h\,tg80^o+h\,tg65^o=5tg80^o\,tg65^o\Leftrightarrow h(tg80^o+tg65^o)=5tg80^o\,tg65^o\Rightarrow h=\frac{5tg80^o\,tg65^o}{tg80^o+tg65^o}=\frac{5\cdot 5'67\cdot 2'14}{5'67+2'14}=7'78\text{ km}$$