

RESUELVE TÚ (28)

(a) Aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo PQR de la figura adjunta, verifica que la altura y del pistón en el instante t es :

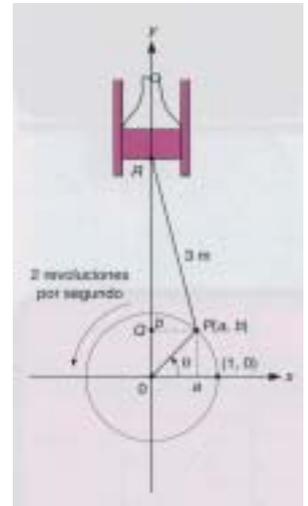
$$y = OQ + QR = b + \sqrt{3^2 - a^2} = \text{sen}4\pi t + \sqrt{9 - \text{cos}^2 4\pi t}$$

(b) Poniendo t = 1'25 en esta fórmula, y usando la calculadora, averigua a qué altura estará el pistón 1'25 segundos después de que la rueda comience a girar.

(c) ¿ Cuántos grados ha girado la rueda en ese tiempo .?



(a) La primera igualdad es evidente, y = altura total es la suma de OQ + QR, y OQ = b y QR lo obtenemos aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo PQR, en donde queremos hallar uno de los catetos (QR). En el triángulo OPa, inscrito en la circunferencia, b es el cateto opuesto a θ y a el contiguo o adyacente, luego como el radio de la circunferencia es R =1 se cumple :



$$\text{sen}\theta = \frac{\text{cat. opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{R} \Rightarrow b = R\text{sen}\theta = \text{sen}\theta ; \text{cos}\theta = \frac{\text{cot. adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{R} \Rightarrow a = R\text{cos}\theta = \text{cos}\theta$$

Sustituyendo los valores anteriores de a y b tenemos :

$$y = \text{sen}\theta + \sqrt{9 - \text{cos}^2 \theta}$$

Como θ representa el ángulo girado y según el movimiento circular uniforme (mira las fórmulas en física) Ángulo = velocidad angular · tiempo = ω · t, y además la velocidad con que gira es (2 vueltas por segundo) ω = 2 · (1vuelta) = 2 (2π) = 4π rad/s, sustituyendo nos queda:

$$y = \text{sen}\theta + \sqrt{9 - \text{cos}^2 \theta} = \text{sen}\omega t + \sqrt{9 - \text{cos}^2 \omega t} = \text{sen}4\pi t + \sqrt{9 - \text{cos}^2 4\pi t} \text{ q.e.d.}$$

(b) Es una simple sustitución¹ :

$$y = \text{sen}4\pi \cdot 1'25 + \sqrt{9 - \text{cos}^2 4\pi \cdot 1'25} = \text{sen}5\pi + \sqrt{9 - \text{cos}^2 5\pi} = 0 + \sqrt{9 - (-1)^2} = \sqrt{8} = 2'828\text{m}$$

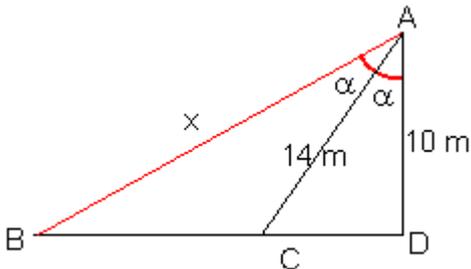
(c) Ahora nos pide el ángulo (θ) girado en ese tiempo, luego θ = ω · t = 4π · 1'25 = 5π radianes = 5π · 180°/π = 5 · 3 180° = 900°.



¹ Ten cuidado de poner la calculadora en [MODE] [RAD] pues ángulo (5π) está en radianes.

RESUELVE TÚ (28)

Halla las distancias AB y BD en la figura, tomando como nuevos datos AD = 10 m y AC = 14 m.



✿ En el triángulo rectángulo ADC, como conocemos el cateto adyacente (AD = 10m) y la hipotenusa (AC = 14 m) podemos hallar el coseno de α :

$$\cos \alpha = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$$

Si conocemos el coseno, aplicando la ecuación fundamental de la trigonometría, podemos saber cuánto vale el seno :

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{7}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{25}{49}} = \sqrt{\frac{49 - 25}{49}} = \sqrt{\frac{24}{49}} = \frac{2\sqrt{3}}{7}$$

Ahora nos fijamos en triángulo grande (ABD) en donde pretendemos hallar la hipotenusa (BA = x) y el cateto opuesto a A (BD), primero hallamos x, mediante el coseno (ya que sabemos que el cateto adyacente AD = 10 m :

$$\cos \hat{A} = \cos 2\alpha = \frac{\text{cat. adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{10}{x} \xrightarrow{\text{despejando}} x = \frac{10}{\cos 2\alpha}$$

Pero, ¿ como sabemos lo que vale $\cos 2\alpha$.?, mediante la fórmula del ángulo doble [IT19]* que tienes en esa misma página (y que a partir de ahora debes tener en la memoria, si no la tienes ya) :

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \left(\frac{5}{7}\right)^2 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{7}\right)^2 = \frac{25}{49} - \frac{24}{49} = \frac{1}{49}$$

Ya podemos saber AB sin más que sustituir el coseno hallado en la fórmula anterior:

$$x = \frac{10}{\cos 2\alpha} = \frac{10}{\frac{1}{49}} = 10 \cdot 49 = 490\text{m}$$

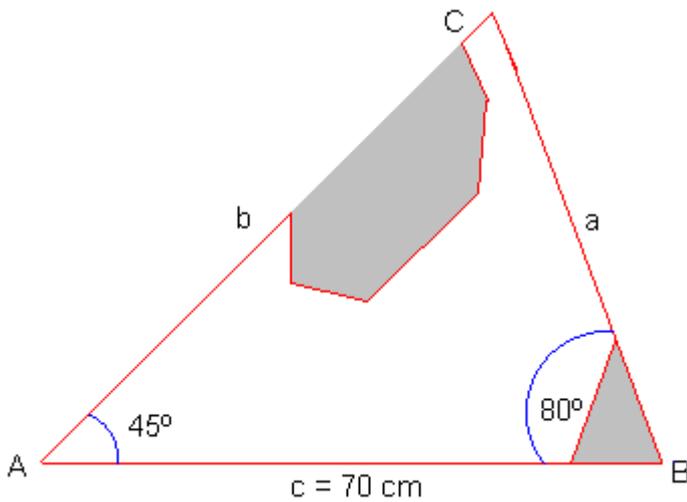
Una vez hallado AB, calcular BD se puede hacer de varias formas (teorema de Pitágoras, por la tangente, por el seno...), optamos por el teorema (para no tener que hallar el seno o la tangente del ángulo doble) :

$$\overline{AB}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2 \xrightarrow{\text{DESPEJANDO}} \overline{BD} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AD}^2} = \sqrt{490^2 - 10^2} = \sqrt{240000} = 489'9\text{m}$$



RESUELVE TÚ (42)

Ídem con $A = 45^\circ$, $B = 80^\circ$ y $c = 70$ cm



En este ejercicio observo un error, en el dibujo que viene en el libro, ya que el trozo dibujado no es un fragmento de triángulo, sino de cuadrilátero, es decir el ángulo B no puede ser el que se dibuja sino el que dibujo yo (si se quiere resolver como lo hace el libro), es decir el dibujo sería como el que tienes al lado. Bueno vamos a resolverlo, como sabemos dos ángulos hallamos el tercero por diferencia :

$$A + B + C = 180^\circ, \text{ luego } C = 180^\circ - (A + B) = 180^\circ - (45^\circ + 80^\circ) = 55^\circ.$$

Ahora podemos aplicar el teorema del seno (¿ ya te lo sabes de memoria ?) para hallar los lados que quedan por conocer (a y b) :

$$\frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{C}}{c} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{C}}{c} \xrightarrow{\text{despejamos } a} a = \frac{\sin \hat{A}}{\sin \hat{C}} \cdot c = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 55^\circ} \cdot 70 = \frac{0'707}{0'819} \cdot 70 = 60'43\text{m} \\ \frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{C}}{c} \xrightarrow{\text{despejamos } b} b = \frac{\sin \hat{B}}{\sin \hat{C}} \cdot c = \frac{\sin 80^\circ}{\sin 55^\circ} \cdot 70 = \frac{0'985}{0'819} \cdot 70 = 84'16\text{m} \end{array} \right.$$



RESUELVE TÚ (📖 42) 2º Ejercicio

Repite el ejercicio con ángulos de 12° en C y de 58° en A, si la distancia AB es de 120 m.



Es el típico problema de aplicación del teorema del seno pues conocemos los tres ángulos (B se puede hallar por diferencia, pero aquí no lo necesitamos) y un lado, deseando hallar uno o los dos lados que nos faltan:

$$\frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{C}}{c} \xrightarrow{\text{despejamos } a=x} a = \frac{\sin \hat{A}}{\sin \hat{C}} \cdot c = \frac{\sin 58^\circ}{\sin 12^\circ} \cdot 120 = \frac{0'848}{0'208} \cdot 120 = 489'5 \text{ m}$$



RESUELVE TÚ (📖 44)

Comprueba, paso a paso, que el siguiente cálculo es correcto para la posición V': $\theta = 149^\circ$. Ahora

$$\gamma' = 180^\circ - (19^\circ + \theta') = 12^\circ$$

Por el teorema del seno, $\frac{\text{sen}19^\circ}{109.000.000} = \frac{\text{sen}\gamma'}{x}$, así que $x = \frac{109.000.000\text{sen}\gamma'}{\text{sen}19^\circ} = 69.610.000\text{km}$



☒ Comprobemos el ángulo $\gamma' = 180^\circ - (19^\circ + \theta') = 180^\circ - (19 + 149) = 180^\circ - 168^\circ = 12^\circ$

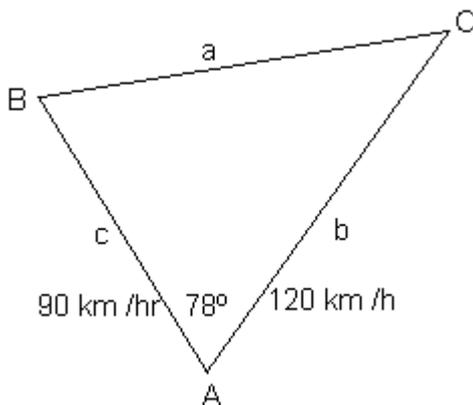
☒ Y ahora el teorema del seno :

$$x = \frac{109.000.000\text{sen}\gamma'}{\text{sen}19^\circ} = \frac{109.000.000 \cdot \text{sen}12^\circ}{\text{sen}19^\circ} = \frac{109.000.000 \cdot 0'2079}{0'325568} = 6.960.478 \text{ km}$$



RESUELVE TÚ (45)

Repite el ejercicio con un ángulo de 78° y un tiempo de 4 min.



Primero tenemos que calcular lo que miden los lados c y b que son las distancias que recorren sendos motoristas en 4 min :

$$c = v_1 \cdot t = 90 \frac{\text{km}}{\text{hr}} \cdot \frac{1\text{hr}}{60\text{min}} \cdot 4\text{min} = 6 \text{ km}$$

$$b = v_2 \cdot t = 120 \frac{\text{km}}{\text{hr}} \cdot \frac{1\text{hr}}{60\text{min}} \cdot 4\text{min} = 8 \text{ km}$$

Ahora vamos a hallar el lado a (que es la distancia que los separa al cabo de 4 min), como conocemos un ángulo ($A = 78^\circ$) y los lados que lo forman (b y c) es una típica aplicación del teorema del coseno :

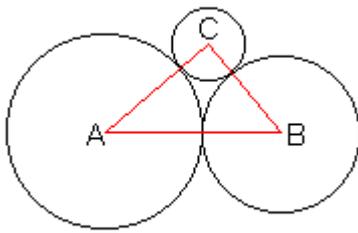
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} \Rightarrow a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}} = \sqrt{8^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos 78^\circ} = \sqrt{80'04} = 8'95 \text{ km}$$



RESUELVE TÚ (45) 2º Ejercicio

Halla los ángulos B y C de la figura





Como conocemos los radios de las tres circunferencias, podemos conocer los tres lados del triángulo :

$a = r_B + r_C = 140'6 \text{ cm}$, $b = 204'6 \text{ cm}$ y $c = 264 \text{ cm}$ (está hecho en el libro)

Al conocer los lados y ningún ángulo es otra de las típicas aplicaciones del teorema del coseno (apréndetelas) :

Como ya se ha calculado A en el libro, podemos usar también el teorema del seno, pero vamos a hacerlo por el del coseno :

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2a \cdot c \cdot \cos \hat{B} \Rightarrow \cos \hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{140'6^2 + 264^2 - 204'6^2}{2 \cdot 140'6 \cdot 264} = 0'6412 \Rightarrow \hat{B} = 50^\circ 6' 58''$$

Para hallar el ángulo C podemos usar de nuevo el teorema del coseno, el del seno o más rápido, por diferencia :

$$C = 180^\circ - (A+B) = 180^\circ - (31^\circ 49' 27'' + 50^\circ 6' 58'') = 180^\circ - 81^\circ 56' 24'' = 98^\circ 3' 35''$$



PROBLEMAS PROPUESTOS (2 3)

1 Halla el seno, el coseno y la tangente de un ángulo en posición normal sabiendo que su lado terminal contiene el punto $P = (- 2, - 5)$.



$$a = -2, b = -5 \Rightarrow r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-5)^2} = \sqrt{29}$$

$$\text{sen} \alpha = \frac{b}{r} = \frac{-5}{\sqrt{29}} = -\frac{5\sqrt{29}}{29}; \text{cos} \alpha = \frac{a}{r} = \frac{-2}{\sqrt{29}} = -\frac{2\sqrt{29}}{29}; \text{tg} \alpha = \frac{\text{sen} \alpha}{\text{cos} \alpha} = \frac{b}{a} = \frac{5}{2}$$



2 ¿Puedes calcular $\text{cos} \alpha$ sabiendo sólo que $\text{tg} \alpha = 0,6$? Compara tu respuesta con la del Problema resuelto 1.



Sí pero hay dos valores en el primer cuadrante (positivo) y en el tercer cuadrante (negativo), que es donde la tangente es positiva, luego hay que fijar el cuadrante:

$$\text{tg} \alpha = 0'6 = \frac{\text{sen} \alpha}{\text{cos} \alpha} \Rightarrow \text{sen} \alpha = 0'6 \text{cos} \alpha$$

y sustituyendo en la ecuación fundamental de la trigonometría podemos despejar los valores del coseno :

$$\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1 \Rightarrow (0'6 \text{cos} \alpha)^2 + \text{cos}^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow 0'36 \text{cos}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow 1'36 \text{cos}^2 \alpha = 1$$

$$\text{cos}^2 \alpha = \frac{1}{1'36} = 0'7352941 \Rightarrow \text{cos} \alpha = \pm \sqrt{0'7352941} = \pm 0'8575$$



3 Encuentra el valor exacto de $\text{cos}(7^\circ 30')$.



Supongo que se refiere a encontrarlo en función de ángulos conocidos, es decir :

$$\text{cos}(7^\circ 30') = \text{cos}\left(\frac{15^\circ}{2}\right) = \{\text{fórmula del ángulo mitad [IT22]}\} = \sqrt{\frac{1 + \text{cos}15^\circ}{2}}$$

Necesitamos hallar, pues el $\text{cos}15^\circ$, ¿ cómo ?, mediante diferencia de ángulos, aplicando la fórmula [IT6bis]* (hay que aprendérselas todas, como ves) :

$$\text{cos}15^\circ = \text{cos}(45^\circ - 30^\circ) = \text{cos}45^\circ \cdot \text{cos}30^\circ + \text{sen}45^\circ \cdot \text{sen}30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

Ahora lo sustituimos en la fórmula anterior :

$$\text{cos}(7^\circ 30') = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{4 + \sqrt{6} + \sqrt{2}}{8}} \approx 0'9914448...$$



4 Una fuente eólica de energía eléctrica genera una corriente alterna de intensidad $I = 25 \text{cos}(100 - \pi t - 60\pi)$, donde t se mide en minutos, I en amperios y los ángulos en radianes. Halla el valor de I en el instante $t = 18$ segundos.

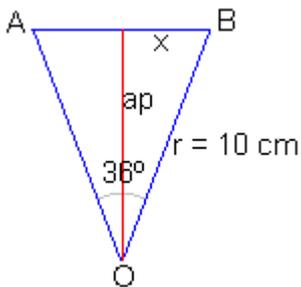


Lo único que hay que hacer es sustituir y hacer las operaciones (teniendo la precaución de poner la calculadora en radianes antes de hallar el coseno del ángulo que se obtenga y pasar los 18 s a min $t = 18/60 = 0'3$ min) :

$$I = 25\text{cos}(100 - \pi \cdot 0'3 - 60 \cdot \pi) = 25 \text{cos}(100 - 0'9425 - 188'5) = 25 \text{cos}(-89'44 \text{ rad}) = 25 \cdot 0'097 = \mathbf{2'43 \text{ amperios}}$$



5 *Calcula el área de un decágono regular inscrito en un círculo de radio 10 cm, con ayuda del Problema resuelto 2.*



En la figura se representa uno de los diez triángulos iguales que forman el decágono.

El área de cualquier polígono es = (perímetro x apotema) / 2, el perímetro es el producto de la longitud de un lado ($l = 2x$) por diez lados que tiene el decágono y la apotema es la altura del triángulo del dibujo, luego, hemos de calcular el lado ($AB = l = 2x$) para hallar el perímetro y la apotema. Hay varias formas :

El lado se puede hallar por el teorema del coseno, por el del seno o simplemente aplicando la definición de seno al triángulo rectángulo que se forma con la altura (apotema del polígono), uso el del seno (hay que operar menos), pero hemos de saber primero los ángulos $A = B = \beta / 2 = 144^\circ / 2 = 72^\circ$ (hallado en el libro) :

$$\frac{\text{sen}\hat{O}}{l} = \frac{\text{sen}\hat{B}}{r} \xrightarrow{\text{despejamos el lado } l} l = 2x = \overline{AB} = \frac{\text{sen}\hat{O}}{\text{sen}\hat{B}} \cdot r = \frac{\text{sen}36^\circ}{\text{sen}72^\circ} \cdot 10 = \frac{0'59}{0'95} \cdot 10 = 6'2 \text{ cm}$$

Si el lado $L = 6'2 = 2x$ entonces $x = l/2 = 6'2/2 = 3'1$ cm y aplicando el teorema de Pitágoras :

$$ap = \sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{10^2 - 3'1^2} = \sqrt{90'39} = 9'51 \text{ cm}$$

Ya podemos hallar el área :

$$\text{Area} = \frac{p \cdot ap}{2} = \frac{10 \cdot l \cdot ap}{2} = \frac{10 \cdot 6'2 \cdot 9'51}{2} = 294'73 \text{ cm}^2$$



6 *Verifica la identidad $\frac{1 - \text{tg}^2 \alpha}{1 + \text{tg}^2 \alpha} = \cos 2\alpha$*



Hay tres formas de demostrar la veracidad o falsedad de una identidad:

* *Partir del primer miembro y realizar transformaciones hasta obtener el segundo miembro.*

* *Por el contrario, podemos partir del segundo miembro y realizar transformaciones hasta obtener el primero.*

* Realizar transformaciones en ambos miembros hasta llegar a una identidad evidente.

En este caso partimos del primer miembro e intentaremos obtener el segundo (la regla básica es partir del más complicado, el que admita transformaciones, y llegar al que no se pueda transformar o sea más sencillo) :

$$\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1 - \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{1 + \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{\frac{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{\frac{\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha} = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha = \cos 2\alpha$$

- ⇒ Primer paso : sustituir la tangente por su definición (sen/cos).
- ⇒ Segundo paso: hacer la suma y resta de fracciones.
- ⇒ Tercer paso : Dividir las fracciones y simplificar los denominadores ($\cos^2 \alpha$).
- ⇒ Cuarto paso: sustituir la ecuación fundamental de la trigonometría ($\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha$) por 1
- ⇒ Quinto paso : sustituir el coseno del ángulo doble por su fórmula.



7 ¿Son válidas estas identidades trigonométricas?

- (a) $(1 - \operatorname{sen}^2 \alpha) \operatorname{tg}^2 \alpha = \operatorname{sen}^2 \alpha$.
- (b) $\sec(-\alpha) = -\sec \alpha$.
- (c) $\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{cotg}^2 \alpha = \sec^2 \alpha - \operatorname{cosec}^2 \alpha$.



(a) Partimos del primer miembro e intentaremos obtener el 2º miembro :

$$(1 - \operatorname{sen}^2 \alpha) \operatorname{tg}^2 \alpha = (\cos^2 \alpha) \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \operatorname{sen}^2 \alpha \Rightarrow \text{válida}$$

* Como $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow (1 - \operatorname{sen}^2 \alpha) = \cos^2 \alpha$ y la tangente en función del seno y el coseno.

* Simplificar $\cos^2 \alpha$ para llegar al 2º miembro.

(b) Partimos del primer miembro :

$$\sec(-\alpha) = \frac{1}{\cos(-\alpha)} = \frac{1}{\cos \alpha} = \sec \alpha \neq -\sec \alpha \Rightarrow \text{No válida}$$

- ⊙ Definición de la secante.
- ⊙ Expresar el coseno de un ángulo negativo en función del positivo [IT3]* .
- ⊙ Definición de la secante.

(c) Partimos del primer miembro :

$$\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{cotg}^2 \alpha = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - \frac{\cos^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha} = \frac{\operatorname{sen}^4 \alpha - \cos^4 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha} = \frac{(\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha)(\operatorname{sen}^2 \alpha - \cos^2 \alpha)}{\operatorname{sen}^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha} =$$

$$\frac{(\operatorname{sen}^2 \alpha - \cos^2 \alpha)}{\operatorname{sen}^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha} = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha} - \frac{\cos^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha} = \sec^2 \alpha - \operatorname{cosec}^2 \alpha \Rightarrow \text{válida}$$

Pasos :

- Sustituimos la tangente y la cotangente en función del seno y el coseno.
- Hacemos la resta.
- Usamos una de las igualdades notables : $(a^2 - b^2) = (a + b)(a - b)$.
- El primer paréntesis es la ecuación fundamental de la trigonometría = 1.
- Separamos sumandos y dividimos.
- Aplicamos la definición de secante y cosecante.



8 Comprueba que son ciertas las siguientes identidades:

- (a) $\operatorname{sen} \alpha \operatorname{cotg} \alpha \sec \alpha = 1$
- (b) $\sec^2 \alpha (\cos^2 \alpha - 1) + \operatorname{tg}^2 \alpha = 0$
- (c) $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{cotg} (-\alpha) + 1 = 0$



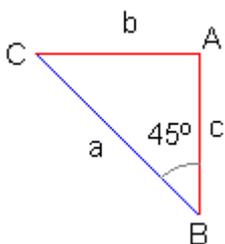
(a) $\operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{cotg} \alpha \cdot \sec \alpha = \operatorname{sen} \alpha \cdot \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} \cdot \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha} = 1$

(b) $\sec^2 \alpha (\cos^2 \alpha - 1) + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \cdot (-\operatorname{sen}^2 \alpha) + \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = -\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 0$

(c) $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{cotg} (-\alpha) + 1 = \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}(-\alpha)} + 1 = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{-\operatorname{tg} \alpha} + 1 = -1 + 1 = 0$



9 Una gaviota vuela en dirección noroeste a una velocidad de 30 km/h. A1 cabo de 15 minutos, ¿cuánto ha avanzado hacia el norte? ¿Y hacia el oeste?



velocidad = $30 \frac{\text{km}}{\text{hr}} \cdot \frac{1 \text{ hr}}{60 \text{ min}} = 0.5 \frac{\text{km}}{\text{min}}$

Espacio recorrido en 15 min = $a = v \cdot t = 0.5 \frac{\text{km}}{\text{min}} \cdot 15 \text{ min} = 7.5 \text{ km}$

Se nos pide los lados c (distancia Norte) y b (distancia oeste), las hallamos mediante las definiciones del seno y el coseno del ángulo conocido de 45° :

$$\operatorname{sen} 45^\circ = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a \operatorname{sen} 45^\circ = 7.5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 5.3 \text{ km} = c \text{ (Pues es isósceles)}$$



10 Sabiendo que un ángulo agudo tiene $\text{sen} \alpha = 0,7$ halla:

- (a) $\text{tg} \alpha$ (b) $\text{sen}(-\alpha)$ (c) $\text{tg}(180^\circ - \alpha)$ (d) $\cos(90^\circ - \alpha)$ (e) $\text{sen}(\alpha - 90^\circ)$



Hallamos con la ecuación fundamental de la trigonometría lo que vale el coseno :

$$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \text{sen}^2 \alpha} = \sqrt{1 - 0,7^2} = 0,71$$

(a) $\text{tg} \alpha = \frac{\text{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{0,7}{0,71} = 0,98$

(b) $\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}(\alpha) = -0,7$.

(c) $\text{tg}(180^\circ - \alpha) = -\text{tg} \alpha = -0,98$ [IT17]*

(d) $\cos(90^\circ - \alpha) = \text{sen} \alpha = 0,7$ [IT13]*

(e) $\text{sen}(\alpha - 90^\circ) = \text{sen}-(90^\circ - \alpha) = -\text{sen}(90^\circ - \alpha) = -\cos \alpha = -0,71$ [IT2]* y [IT12]*



11 Averigua el seno, el coseno y la tangente de $67^\circ 30'$, usando las identidades del ángulo mitad.



(a) $\text{sen} 67^\circ 30' = \text{sen}\left(\frac{135^\circ}{2}\right) \xrightarrow{[IT21]^*} \sqrt{\frac{1 - \cos 135^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \cos(180^\circ - 45^\circ)}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \cos 45^\circ}{2}} =$
 $= \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$

(b) $\cos 67^\circ 30' = \cos\left(\frac{135^\circ}{2}\right) \xrightarrow{[IT22]^*} \sqrt{\frac{1 + \cos 135^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \cos(180^\circ - 45^\circ)}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \cos 45^\circ}{2}} =$
 $= \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$

(c) $\text{tg} 67^\circ 30' = \frac{\text{sen} 67^\circ 30'}{\cos 67^\circ 30'} = \frac{\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}}{\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{(2 + \sqrt{2})^2}{(2 - \sqrt{2}) \cdot (2 + \sqrt{2})}} = \sqrt{3 + \sqrt{2}}$

