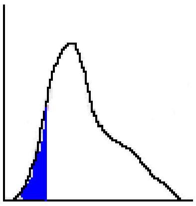
Resuelve tú (Pág ❸❾❻)

Para la función de la Figura 20.6, representa y calcula, con ayuda de la Tabla 20.1, el valor aproximado de:

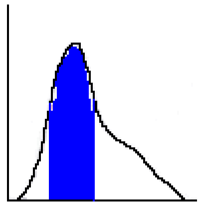
(a) p(X < 75) **(b)** p(70 < X < 92,5)

X (min)	f_r
[60, 70)	0,05
[70, 80)	0,35
[80, 90)	0,30
[90, 100)	0,15
[100, 110)	0,10
[110, 120)	0,05
TOTAL	1



p(X < 75)

(a) p(X < 75) = f_r[60, 70) + f_r[70, 80)/2 = 0,05 + 0,35/2 = 0,05 + 0,185 = 0, 235. Ya que para llegar hasta 75 hay que contar el intervalo [60, 70) y la mitad del siguiente.



p(70 ≤ X ≤ 92,5)

(b) p(70 ≤ X ≤ 92,5) = f_r[70, 80) + f_r[80, 90) + f_r[90, 100)·(2,5/10) = 0,35 + 0,30 + 0,15(2,5/10) = 0,35 + 0,30 + 0,0375 = 0,6875

✵✵✵❀❀✪❀❀✵✵✵

Resuelve tú (Pág ❸❾❽)

Para función de distribución $F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{x^2}{16} & 0 \le x \le 4 \\ 1 & x > 4 \end{cases}$, halla:

(a) p(X < 1) **(b)** p(1 < X < 2) **(c)** p(X = 2,5) **(d)** p(X ≥ 2,5)

(a) $p(X \le 1) = F(1) = \dfrac{1}{16}$

(b) $p(1 < X \le 2) = F(2) - F(1) = \dfrac{2^2}{16} - \dfrac{1^2}{16} = \dfrac{4}{16} - \dfrac{1}{16} = \dfrac{3}{16}$

(c) p(X = 2,5) = 0, ya que al ser una variable continua, la probabilidad de un valor dado es nula.

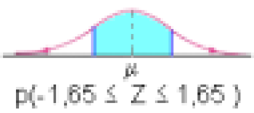
(d) $p(X \ge 2{,}5) = 1 - p(X < 2{,}5) = 1 - F(2{,}5) = 1 - \dfrac{2{,}5^2}{16} = 0{,}61$

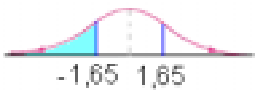
✵✵✵❀❀✪❀❀✵✵✵

Resuelve tú (Pág ❹⓿❸)

Halla utilizando la tabla de la normal p (- 1,65 ≤ Z ≤ 1,65)

$p(-1{,}65 \le Z \le 1{,}65) = p(Z \le 1{,}65) - p(Z \le -1{,}65) = \phi(1{,}65) - (1 - p(Z \le 1{,}65)) = 2\cdot \phi(1{,}65) - 1 =$





$= 2 \cdot 0{,}9505 - 1 = 0{,}901.$

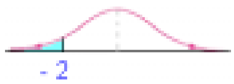
Ya que $p(a \le Z \le b) = p(Z \le a) - p(Z \le b)$.

Además $p(Z \le -b) = 1 - p(Z \le -b)$ ya que la región por debajo de – b es igual (por simetría) a la que hay por encima de + b y esta última es 1 – la región que hay por de bajo de b que es la que nos da la tabla.

❋❋❋❀❀✪❀❀❋❋❋

Resuelve tú (Pág ❹⓿❺)

En una N (165, 7) calcula p(X ≥ 151)



$P(X \ge 151) = \{$tipificando la variable, $z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ $\} = p\left(Z \le \dfrac{151-165}{7}\right) = p(Z \le -2) = 1 - p(Z \le 2) =$ $1 - \phi(2) = 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228.$

❋❋❋❀❀✪❀❀❋❋❋

Resuelve tú (Pág ❹⓿❽)

Supongamos que la probabilidad de que un hombre sea calvo es p = 0,2. Si en una reunión hay 50 hombres, calcula la probabilidad de que haya:

(a) Más de 20 calvos.

(b) 4 calvos

Como $np = 50 \cdot 0{,}2 = 10 > 5$ y $nq = n(1 - p) = 50 \cdot 0{,}8 = 40 > 5$, podemos usar la aproximación de la binomial a la normal:

Media = np = 10, Desviación tipica = $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{50\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8} = 2{,}83$, es decir N(10, 2,83)

(a) $p(X>20) = p\left(Z > \dfrac{20-10}{2{,}83}\right) = p(Z>3{,}53) = 1 - p(Z \le 3{,}53) = 1 - \phi(3{,}53) = 1 - 0{,}9999 \approx 0$

(b) $p(X = 4) = \binom{50}{4} 0{,}2^4 \cdot 0{,}8^{36} = 0{,}12$

❋❋❋❀❀✪❀❀❋❋❋

PROBLEMAS PROPUESTOS

1 Dada la función

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}x & x\in[1,3]\\ 0 & x\notin[1,3]\end{cases}$$

(a) Comprueba que f(x) es función de densidad de una variable aleatoria continua X .
(b) Calcula p(2 < X < 3).
(c) Representa gráficamente f(x) y comprueba tus resultados.

(a) Para que pueda considerarse como una función de densidad, debe cumplir dos condiciones:

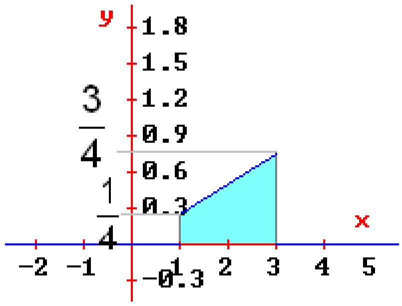
❶ f(x) ≥ 0, que cumple ya que en el intervalo [1, 3] f(x) = x/4 que es positiva en el intervalo y para valores fuera del citado intervalo f(x) = 0

❷ $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_1^3 \frac{x}{4}dx=\left.\frac{x^2}{8}\right]_1^3=\left(\frac{3^2}{8}-\frac{1^2}{8}\right)=\frac{9}{8}-\frac{1}{8}=\frac{8}{8}=1$$

(b) $$p(2<X<3)=\int_2^3 \frac{x}{4}dx=\left.\frac{x^2}{8}\right]_2^3=\left(\frac{3^2}{8}-\frac{2^2}{8}\right)=\frac{9}{8}-\frac{4}{8}=\frac{5}{8}$$

(c) El área del trapecio de la figura es:

$$\text{Área}=\frac{B+b}{2}\cdot h=\frac{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}{2}\cdot(3-1)=\frac{4/4}{2}\cdot 2=1$$



Y p(2 < X < 3) = $\text{Área}=\dfrac{B+b}{2}\cdot h=\dfrac{\frac{3}{4}+\frac{2}{4}}{2}\cdot(3-2)=\dfrac{5/4}{2}=\dfrac{5}{8}$

Además la gráfica de la función (en azul) es f(x) ≥ 0.

✺✺✺❀❀✪❀❀✺✺✺

2 Halla la función de distribución F(x) correspondiente a la función f(x) del problema anterior. A partir de ella, calcula:

(a) F(2) y F(3) **(b)** p(2 ≤ X ≤ 3)

La función de distribución, en variables continuas se obtiene por integración de la función de densidad en cada intervalo F(x) = p(X ≤ x) = $\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \int \frac{x}{4}\,dx = \frac{x^2}{8} & 1 \le x \le 3 \\ 1 & x > 3 \end{cases}$$

(a) $F(2) = 2^2/8 = 4/8 = ½$, $F(3) = 3^2/8 = 9/8$.

(b) $p(2 \le X \le 3) = F(3) - F(2) = \frac{9}{8} - \frac{4}{8} = \frac{5}{8}$.

3 La insolación directa es el tiempo que luce el sol sobre un determinado lugar de la Tierra. Para Jaén, la insolación diaria media, en horas, para los diferentes meses del año es:

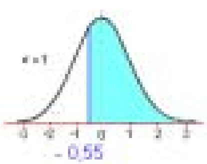
Meses	E	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
Insolación	5	6,3	6,6	7,8	8,8	10,5	11,3	10,6	8,1	6,8	5,5	4,9

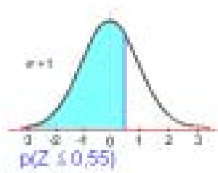
(a) Calcula la media y la desviación típica para todo el año.

(b) Si se considera que la insolación diaria se distribuye normalmente, con la misma media y desviación típica hallada en (a), calcula p(I ≥ 6,5). ¿Coincide aproximadamente con los valores dados en la tabla?

(a) $$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{12} x_i}{N} = \frac{5+6{,}3+6{,}6+7{,}8+8{,}8+10{,}5+11{,}3+10{,}6+8{,}1+6{,}8+5{,}5+4{,}9}{12} = 7{,}68$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{12} x_i^2}{N} - \mu^2} = \sqrt{\frac{5^2+6{,}3^2+6{,}6^2+7{,}8^2+8{,}8^2+10{,}5^2+11{,}3^2+10{,}6^2+8{,}1^2+6{,}8^2+5{,}5^2+4{,}9^2}{12} - 7{,}68^2} =$$
$= 2{,}13$





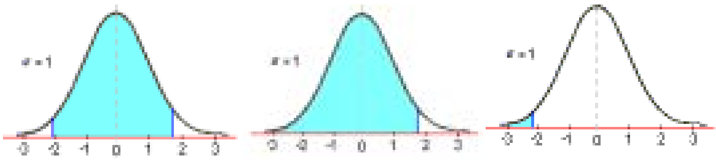
(b) $p(I \ge 6{,}5) = p\left(Z \ge \frac{6{,}5 - 7{,}68}{2{,}13}\right) = p(Z \ge -0{,}55) = 1 - p(Z \le -0{,}55) = 1 - (1 - p(Z \le 0{,}55))$
$= p(Z \le 0{,}55) = \phi(0{,}55) = 0{,}7088$

4 Para la variable aleatoria Z , N (0, 1), calcula las siguientes probabilidades:

(a) p(Z = -1,05)
(b) p(-2,14 ≤ Z ≤ 1,8)
(c) p(Z ≥ 2,58)
(d) p(Z ≤ -0,63)
(e) p(2,08 ≤ Z ≤ 2,7)
(f) p(Z ≥ -1,2)

(a) p(Z = - 1,05) = 0, ya que Z es continua.

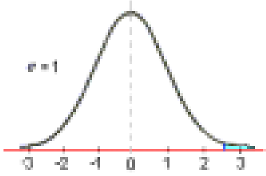
(b) p(- 2,14 ≤ Z ≤ 1,8) = p(Z ≤ 1,8) – p(Z ≤ - 2,14) = p(Z ≤ 1,8) – (1 - p(Z ≤ 2,14)) =



p(- 2,14 ≤ Z ≤ 1,8)

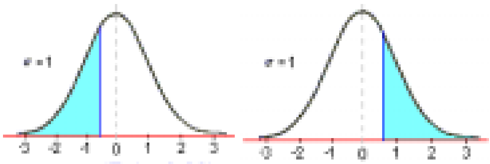
= p(Z ≤ 1,8) – 1 + p(Z ≤ 2,14) = ϕ(1,8) + ϕ(2,14) – 1 = 0,9641 + 0,9793 – 1 =0,9434.

(c) p(Z ≥ 2,58) = 1 – p(Z ≤ 2,58) = 1 - ϕ(2,58) = 1 – 0,9951 = 0,0049.



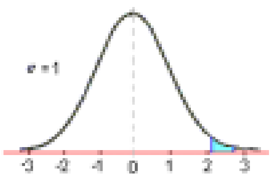
p(Z ≥ 2,58)

(d) p(Z ≤ – 0,63) = p(Z ≥ 0,63) = 1- p(Z ≤ 0,63) = 1 - ϕ(0,63) = 1 – 0,7357 = 0,2643.

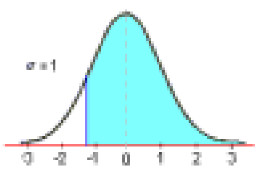


p(Z ≤ – 0,63)

(e) p(2,08 ≤ Z ≤ 2,7) = p(Z ≤ 2,7) – p(Z ≤ 2,08) = ϕ(2,7) - ϕ(2,08) = 0,9965 – 0,9812 =
= 0,0153



(f) p(Z ≥ - 1,2) = p(Z ≤ 1,2) = ϕ(1,2) = 0,8849.



p(Z ≥ - 1,2)

5 Una variable aleatoria X se ajusta a una distribución normal N(140, 25). Calcula las siguientes probabilidades:

(a) p(X ≤ 152,5)
(b) p(100 ≤ X ≤ 152,5)
(c) p(X ≥ 155)

(a) $p(X \leq 152{,}5) = p\left(Z \leq \frac{152{,}5-140}{25}\right) = p(Z \leq 0{,}5) = \phi(0{,}5) = 0{,}6915.$

(b) $p(100 \leq X \leq 152{,}5) = p\left(\frac{100-140}{25} \leq Z \leq \frac{152{,}5-140}{25}\right) = p(-1{,}6 \leq Z \leq 0{,}5) = p(Z \leq 0{,}5) - p(Z \leq -1{,}6) = p(Z \leq 0{,}5) – (1- p(Z \leq 1{,}6)) = p(Z \leq 0{,}5) + p(Z \leq 1{,}6) – 1 = \phi(0{,}5) + \phi(1{,}6) - 1 = 0{,}6915 + 0{,}9452 – 1 = 0{,}6367.$

(c) $p(X \geq 155) = p\left(Z \geq \frac{155-140}{25}\right) = p(Z \geq 0{,}6) = 1 – p(Z \leq 0{,}6) = 1 - \phi(0{,}6) = 1 – 0{,}7257=$
$= 0{,}2743.$

✺✺✺❀❀✪❀❀✺✺✺

6 Una variable aleatoria continua X tiene una distribución normal N(12, 5). Halla el valor de t para que:

(a) p(X ≥ t) = 0,58 (b) p(t ≤ X ≤ 16) = 0,25

(a) El valor de z que deja por debajo de si 0,58 es 0,2 (que buscamos en el interior de la tabla normal, el más próximo 0,5793, y vamos al margen a leer el valor de z) luego el que deja por encima de sí 0,58 es z = - 0,2, es decir p(z ≥ - 0,2) = 0,58.

Para ese valor de z despejamos X: $z = \frac{t-\mu}{\sigma} \Leftrightarrow t = \mu + z\cdot\sigma$ = 12 – 0,2 · 5 = 11, es decir: p(X ≥ 11) = 0,58.

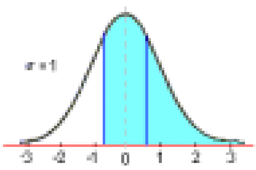
(b) $p(t \leq X \leq 16) = p\left(Z_1 \leq Z \leq \frac{16-12}{5}\right) = p(Z \leq 0{,}8) - p(Z \leq Z_1) = 0{,}7881 - p(Z \leq Z_1) = 0{,}25$.
$p(Z \leq Z_1) = 0{,}7881 – 0{,}25 = 0{,}5381$, buscamos en la tabla normal el valor Z_1 que es 0,1 (el valor más próximo es 0,5398), luego $Z_1 = \frac{t-\mu}{\sigma} \Leftrightarrow t = \mu + Z_1\cdot\sigma =$ = 12 + 0,1 · 5 = 12,5 .

✺✺✺❀❀✪❀❀✺✺✺

7 Supongamos que el peso de las mujeres de una ciudad se distribuye normalmente como media 62 kg y desviación típica 9.

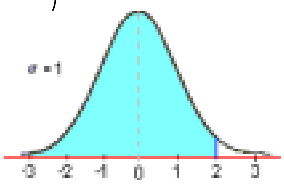
(a) ¿Cuál es la probabilidad de que una mujer pese más de 55 kg?
(b) ¿Qué porcentaje pesa menos de 80 kg?
(c) ¿Qué porcentaje pesa entre 55 y 80 kg?

N(62, 9)

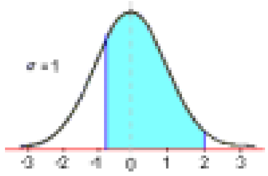


(a) $p(X \geq 55) = p\left(Z \geq \frac{55-62}{9}\right) = p(Z \geq -0{,}78)$ = p(Z ≤ 0,78) = 0,7823.

(b) $p(X < 80) = p\left(Z < \frac{80-62}{9}\right) = p(Z < 2)$ = 0,9772, un 97,72 % pesa menos de 80 kg.



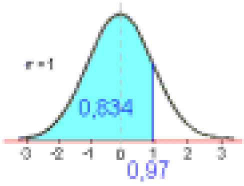
(c) $p(55 \leq X \leq 80) = p(-0{,}78 \leq Z \leq 2) = p(Z \leq 2) - p(Z \leq -0{,}78) = 0{,}9772 - 0{,}7823 = 0{,}1949$.



8 El perímetro craneal de los hombres de la misma ciudad es una N (60, 2), medido en cm.
(a) ¿Qué perímetro craneal debe tener un hombre para que el 16,6 % de sus paisanos tenga más cabeza que él?
(b) ¿ Y cuánto para que el 35,2 % tenga menos?

(a) $p(X > X_1) = 0{,}166$, luego $p(X \leq X_1) = 1 - 0{,}166 = 0{,}834$.

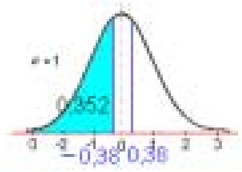
El valor de z que cumple p(Z ≤ z) = 0,834, es 0,97, luego $z = 0{,}97 = \frac{X_1 - 60}{2}$, $X_1 = 60 + 0{,}97 \cdot 2 = 61{,}94$ cm de perímetro



(b) $p(X < X_2) = 0{,}352$, luego $p(X > X_2) = 1- 0{,}352 = 0{,}648$, el valor $z = 0{,}38$, luego :

$$z = -0{,}38 = \frac{X_2 - 60}{2} \Leftrightarrow X_2 = 60 - 0{,}38 \cdot 2 =$$

$= 59{,}24$ cm de diámetro craneal.



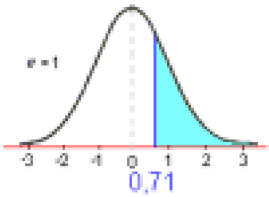
9 Asumamos que el perímetro torácico, medido en cm, de los individuos adultos de una población se distribuye según la ley normal $N(95, 7)$.

(a) ¿Qué porcentaje de individuos tiene un perímetro torácico mayor que 100 cm?

(b) ¿Qué perímetro hay que tener para estar entre el 3 % más «desarrollado»? ¿ Y para pertenecer al 25 % más «estilizado»?

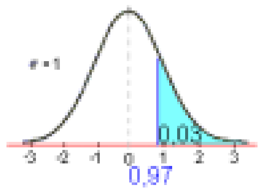
N(95, 7)

(a) $p(X > 100) = p\left(Z > \frac{100-95}{7}\right) = p(Z > 0{,}71) = 1 - p(Z \le 0{,}71) = 1 - 0{,}7611 = 0{,}2389$.



(b) $p(Z > z) = 0{,}03$, es decir $p(Z \le z) = 1 - 0{,}03 = 0{,}97$, que buscado en la tabla normal se corresponde con $z = 1{,}88$ (aproximadamente, es 0,9699), en puntuaciones directas:

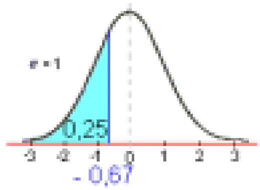
$$z = 1{,}88 = \frac{X_1 - 95}{7} \Leftrightarrow X_1 = 95 + 1{,}88 \cdot 7 = 108{,}16 \text{ cm}$$



El 25 % más estilizado se corresponde con:

$p(Z \le z_1) = 0{,}25$, es decir $p(Z > z_1) = 1- 0{,}25 = 0{,}75$ que se corresponde con $z_1 = - 0{,}67$

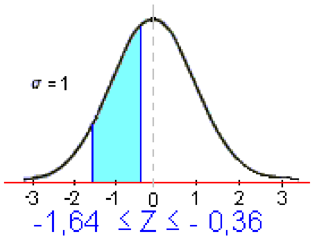
luego $z_1 = -0{,}67 = \frac{X_2 - 95}{7} \Leftrightarrow X_2 = 95 - 0{,}67 \cdot 7 = 90{,}31$ cm



10 El número de puntos conseguidos por un equipo de baloncesto en cada partido se distribuye normalmente con media de 85 puntos y desviación típica de 11 puntos. Calcula la probabilidad de que en el próximo partido dicho equipo consiga:

(a) Entre 67 y 82 puntos, ambos incluidos.

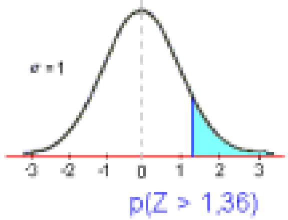
(b) Más de 100 puntos.



N(85, 11)

(a) $p(67 \leq X \leq 82) = p\left(\frac{67-85}{11} \leq z \leq \frac{82-85}{11}\right) = p(-1,64 \leq Z \leq -0,36) = p(Z \leq -0,36) - p(Z \leq -1,64) = (1 - p(Z \leq 0,36)) - (1 - p(Z \leq 1,64)) = p(Z \leq 1,64) - p(Z \leq 0,36) = 0,9495 - 0,6406 = 0,3089$.

(b) $p(X > 100) = p\left(Z > \frac{100-85}{11}\right) = p(Z > 1,36) = 1 - p(Z \leq 1,36) = 1 - 0,9131 = 0,0869$.



✺✺✺❀❀✪❀❀✺✺✺

11 Una industria produce piezas con diámetros distribuidos según una normal de media 0,75 centímetros y desviación típica 0,002 cm.

(a) Determina los cuartiles (los valores correspondientes al 25 % más pequeños y al 25 % más grandes) de la población de diámetros.

(b) Supongamos que el control de calidad exige que las piezas tengan un diámetro entre 0,745 y 0,755 cm; cualquier pieza fuera de ese rango es rechazada. Si se examina una muestra de 1.000 piezas, ¿cuántas cabe esperar que sean rechazadas?

N(0,75, 0,002)

(a) $p(Z < z_1) = 0,25$, $p(Z > z_1) = 0,75$, $z_1 = -0,67 = \frac{X_1 - 0,75}{0,002}$, $X_{25\%} = 0,75 - 0,67 \cdot 0,002 = 0,748$ y $X_{75\%} = 0,7513$.

(b) $p(0,745 \leq X \leq 0,755) = p\left(\frac{0,745-0,75}{0,002} \leq Z \leq \frac{0,755-0,75}{0,002}\right) = p(-2,5 \leq Z \leq 2,5) = p(Z \leq 2,5) - p(Z \leq -2,5) = p(Z \leq 2,5) - (1 - p(Z \leq 2,5)) = 2\,p(Z \leq 2,5) - 1 = 2 \cdot \phi(2,5) - 1 = 2 \cdot 0,9938 - 1 = 0,9876$. Si se examinan 1 000 piezas, 1 000 · 0,9876 = 988 están dentro del intervalo de aceptación luego cabe esperar que sean rechazadas 1 000 – 988 = 12 piezas.

✺✺✺❀❀✪❀❀✺✺✺

12 En un proceso de control de calidad se sabe que el 5 % de los artículos son defectuosos. Si éstos se colocan en cajas de 200, calcula la probabilidad de que una caja contenga:

(a) 10 o más artículos defectuosos.
(b) Entre 10 y 20, ambos inclusive.
(c) Si se rechazan las cajas con más de 20 artículos defectuosos, ¿qué porcentaje de ellas se rechazará?

n·p = 200 · 0,05 = 10, n· q = 200 · 0,95 = 190, como ambos productos son mayores que 5, podemos hacer una aproximación de la binomial a la normal de media μ = n · p = 200 · 0,05 = 10 y desviación típica $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{200 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95} = 3{,}08$,es decir N(10, 3,08).

(a) $p(X \geq 10) = p\left(Z \geq \frac{9{,}5 - 10}{3{,}08}\right) = p(Z \geq -0{,}16) = 1 - p(Z < -0{,}16) = p(Z < 0{,}16) = 0{,}5636$, en donde hemos aplicado la corrección por continuidad diciendo que los mayores o iguales a 10 empiezan desde 9,5

(b) $p(10 \leq X \leq 20) = p\left(\frac{9{,}5 - 10}{3{,}08} \leq Z \leq \frac{20{,}5 - 10}{3{,}08}\right) = p(-0{,}16 \leq Z \leq 3{,}41) = p(Z \leq 3{,}41) - p(Z \leq -0.16) = p(Z \leq 3{,}41) - [1 - p(Z \leq 0.16)] = p(Z \leq 3{,}41) + p(Z \leq 0.16) - 1 = 0{,}9997 + 0{,}5636 - 1 = 0{,}5633$. Observa las correcciones por continuidad usadas.

(c) $p(X > 20) = p\left(Z \geq \frac{20{,}5 - 10}{3{,}08}\right) = p(Z \geq 3{,}41) = 1 - p(Z \leq 3{,}41) = 1 - 0{,}9997 = 0{,}0003$, se rechaza un 0,03 %.

✵✵✵❀❀✪❀❀✵✵✵

13 Un saltador de longitud salta una media de 8 m 10 cm, con desviación típica 20 cm. Para poder participar en los juegos olímpicos realiza 4 pruebas en las que hará un total de 24 saltos. ¿Qué probabilidad tiene de ir a la olimpiada si necesita saltar una vez al menos por encima de 8 m 30 cm?

N(810, 20)

$p(X \geq 830) = p\left(Z \geq \frac{830 - 810}{20}\right) = p(Z \geq 1) = 1 - p(Z < 1) = 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$.

✵✵✵❀❀✪❀❀✵✵✵

14 La balanza de una frutería comete errores en cada pesada que se distribuyen según una normal de media cero gramos y desviación típica 25 g. ¿Cuál es la probabilidad de que en una pesada la balanza marque?:

(a) 50 g a favor del frutero.

(b) 40 g a favor del cliente.

N(0, 25)

(a) $p(0 < X < 50) = p\left(\frac{0-0}{25} \le Z \le \frac{50-0}{25}\right) = p(0 \le Z \le 2) = p(Z \le 2) - p(Z \le 0) = \phi(2) - \phi(0) = 0,9772 - 0,5 = 0,4772$.

(b) $p(-40 < X < 0) = p\left(\frac{-40-0}{25} \le Z \le \frac{0-0}{25}\right) = p(-1,6 \le Z \le 0) = p(Z \le 0) - p(Z \le -1,6) = p(Z \le 0) - (1 - p(Z \le 1,6)) = \phi(0) + \phi(1,6) - 1 = 0,5 + 0,9452 - 1 = 0,44452$.

✵✵✵❀❀✪❀❀✵✵✵

15 Para aprobar unas oposiciones se necesita obtener 100 puntos, o más, en el examen. Por experiencias anteriores se sabe que la distribución de los puntos obtenidos por los opositores es una normal de media 110 puntos y desviación típica 15. Halla:

(a) ¿Qué probabilidad hay de que un opositor apruebe?
(b) Si hay 1.000 opositores y sólo 300 plazas, ¿cuántos puntos se deberá exigir para ajustar el número de plazas al número de opositores aprobados?

N(110, 15)

(a) $p(X \ge 100) = p\left(Z \ge \frac{100-110}{15}\right) = p(Z \ge -0,67) = p(Z < 0,67) = \phi(0,67) = 0,7486$.

(b) Han de aprobar un 300/1000 = 30 % = 0,3, se trata de calcular la puntuación x por encima de la cual aprueban un 30 %:

$p(X > x) = p(Z > z) = 0,3$, $p(Z \le z) = 0,7$, $z = 0,52$, luego $z = 0,52 = \frac{x-110}{15}$, $x = 110 + 0,52 \cdot 15 = 117,8$, para aprobar tienen que obtener 117,8 puntos o más.

✵✵✵❀❀✪❀❀✵✵✵

16 Un examen contiene 100 preguntas de tipo verdadero-falso. El examen se aprueba si se contestan correctamente al menos 60 preguntas. Si un alumno responde al azar, calcula la probabilidad que tiene de:

(a) Aprobar el examen.
(b) Que el número de respuestas acertadas esté comprendido entre 55 y 65.

Probabilidad de contestar bien si se hace al azar = p = ½, ya que hay dos respuestas, una de las cuales es la correcta.

n · p = 100 · ½ = 50 = n · q = 50, luego podemos realizar la aproximación de la binomial a la normal: Media = μ = n · p = 100 · ½ = 50 y desviación típica = $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}$ = 5, es pues una N(50, 5).

(a) p(X ≥ 60) = $p\left(Z \geq \frac{59{,}5 - 50}{5}\right)$ = p(Z ≥ 1,9) = 1 – p(Z < 1,9) = 1- 0,9713 = 0,0287 (2,87 %), en donde se ha aplicado la corrección por pasar de una distribución discreta (binomial a una continua (normal) diciendo que los mayores o iguales que 60 comienzan en 59,5.

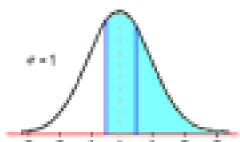
(b) p(55 ≤ X ≤ 65) = $p\left(\frac{54{,}5 - 50}{5} \leq Z \leq \frac{65{,}5 - 50}{5}\right)$ = p(0,9 ≤ Z ≤ 3,1) = p(Z ≤ 3,1) - p(Z ≤ 0,9) = ϕ(3,1) - ϕ(0,9) = 0,9990 – 0,8159 = 0,1831.

1 7 En un Instituto de Bachillerato con 1.080 alumnos la nota media de fin de curso es de 5,7 con una desviación típica de 1,4. Si se supone que la distribución de las notas es normal, calcula:

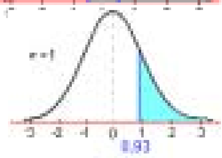
(a) ¿Cuántos alumnos tienen nota media superior a cinco?
(b) ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno tenga una nota superior a siete?
(c) Si los 30 alumnos con las notas más altas se seleccionan para participar en un concurso cultural, ¿cuál es la nota media mínima necesaria para ser elegido?

N(5,7, 1,4)

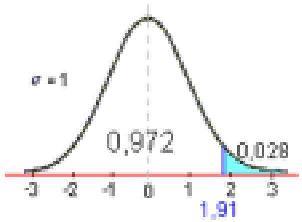
(a) p(X > 5) = $p\left(Z > \frac{5 - 5{,}7}{1{,}4}\right)$ = p(Z > - 0,5) = p(Z ≤ 0,5) = ϕ(0,5) = 0,6915, luego habrá 1 080 · 0,6915 = 746 alumnos con nota media superior a 5.



(b) p(X > 7) = $p(Z > \frac{7 - 5{,}7}{1{,}4})$ = p(Z > 0,93) = 1 – p(Z ≤ 0,93) = 1 – 0,8238 = 0,1762.



(c) Si se seleccionan 30 de 1080, el tanto por uno de alumnos seleccionados es 30/1 080 = 0,028. Se trata pues de hallar la puntuación por encima de la cual está esa proporción:



p(X ≥ x) = 0,028, en puntuaciones típicas p(Z ≥ z) = 0,028, es decir p(Z < z) = 1 – 0,028 = 0,972, que buscado en la tabla normal resulta ser z = 1,91, lo que nos permite la puntuación buscada:

$$z = 1{,}91 = \frac{x - 5{,}7}{1{,}4} \Leftrightarrow x = 5{,}7 + 1{,}91 \cdot 1{,}4 = 8{,}37.$$

18 El porcentaje de españoles con estudios medios es del 40 %. Elegidos 20 al azar, calcula la probabilidad de que 3, 4 o 5 de ellos tengan estudios medios, aplicando:

(a) La distribución binomial.
(b) La aproximación normal a la binomial.

(a) p = 0,4, q = 1 – p = 1 – 0,4 = 0,6, n = 20, es una binomial B(20, 0,4).

Se nos pide $p(3 \le X \le 5) = p(X = 3) + p(X = 4) + p(X = 5) = \binom{20}{3}0{,}4^3 0{,}6^{17} + \binom{20}{4}0{,}4^4 0{,}6^{16}$ $+ \binom{20}{5}0{,}4^5 0{,}6^{15}$ = 0,01234969 + 0,03499079 + 0,074647019 = 0,1219.

(b) np = 20 · 0,4 = 8, nq = 20 · 0,6 = 12,como son mayores de 5, podemos aproximar a una $N\left(np, \sqrt{npq}\right) = N\left(20 \cdot 0{,}4, \sqrt{20 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6}\right) = N(8{,}2{,}19)$, en la que se calcula:

$p(3 \le X \le 5) = p\left(\frac{2{,}5 - 8}{2{,}19} \le Z \le \frac{5{,}5 - 8}{2{,}19}\right)$ = p(- 2, 51 ≤ Z ≤ -1,14) = p(Z ≤ -1,14) - p(Z ≤ - 2,51) = [1 - p(Z ≤ 1,14)] – [1 - p(Z ≤ 2,51)] = 1 - p(Z ≤ 1,14) – 1 + p(Z ≤ 2,51) = p(Z ≤ 2,51) - p(Z ≤ 1,14) = 0,9940 – 0,8729 = 0,1211.

Vemos que la diferencia es de 0,0008.

19 De los 6,1 millones de catalanes, aproximadamente 1 millón emigró desde otras regiones españolas a partir de 1960. Asumamos que 610.000 habitantes catalanes proviene de Andalucía y Extremadura. Si elegimos 1.000 ciudadanos de Cataluña al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya?:

(a) Exactamente 100.
(b) Entre 75 y 150 que procedan de Andalucía o Extremadura.

p = proporción de emigrantes procedentes de Andalucía y Extremadura = 610 000/ 6 100 000 = 0,1

n = 1 000

B(1 000, 0,1)

(a) $p(X = 100) = \binom{1000}{100}0{,}1^{100}0{,}9^{900}$, cuya probabilidad puede resultar casi imposible de abordar (por el tiempo necesario para hallar el número combinatorio), optamos por aproximar a la normal $N(np, \sqrt{npq}) = N\left(1000 \cdot 0{,}1, \sqrt{1000 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9}\right) = N(100{,}9{,}49)$ en donde hallamos:

$p(99{,}5 \le X \le 100{,}5) = p\left(\frac{99{,}5-100}{9{,}49} \le Z \le \frac{100{,}5-100}{0{,}49}\right)$ = p(- 0,053 ≤ Z ≤ 0,053) = p(Z ≤ 0,053) - p(Z ≤ - 0,053) = p(Z ≤ 0,053) - [1 - p(Z ≤ 0,053)] = 2 · p(Z ≤ 0,053) - 1 = 2 · ϕ(0,053) – 1 = 2 · 0,5199 – 1 = 0,0398 (≈ 4 %)

(b) $p(75 \le X \le 150) = p\left(\frac{74{,}5-100}{9{,}49} \le Z \le \frac{150{,}5-100}{9{,}49}\right)$ = p(- 2,69 ≤ Z ≤ 5,32) = p(Z ≤ 5,32) - p(Z ≤ - 2,69) = p(Z ≤ 5,32) – [1 - p(Z ≤ 2,69)] = p(Z ≤ 5,32) + p(Z ≤ 2,69) –1 = 1 + 0,9964 – 1 = 0,9964.

✵✵✵❀❀✪❀❀✵✵✵

20 Dada la siguiente distribución de frecuencias:

x_i	5	10	15	25	45	55	65	75	Suma
f_i	4	8	13	16	30	17	10	2	100

¿Puede afirmarse que procede de una población normal?

Podemos representar el diagrama de barras y ver si tiene forma de “campana”, pero ya sabemos que, a veces, la vista engaña, veamos un tratamiento cualitativo aproximado (lo ideal sería aplicar el test de normalidad).

Ampliamos la tabla:

x_i	5	10	15	25	45	55	65	75	Suma
f_i	4	8	13	16	30	17	10	2	100
f_r	0,04	0,08	0,13	0,16	0,30	0,17	0,10	0,02	1
F_r	0,04	0,12	0,25	0,41	0,71	0,88	0,98	1	

$\text{Media} = \mu = \sum x_i \cdot f_{ri} = 5\cdot 0{,}04 + 10\cdot 0{,}08 + \ldots + 75\cdot 0{,}02 = 37{,}8$

$\text{Desviación típica} = \sigma = \sqrt{\sum x_i^2 \cdot f_{ri} - \mu^2} = \sqrt{(5^2\cdot 0{,}04 + \ldots 75^2\cdot 0{,}02) - 37{,}8^2} = 19{,}14$

Ahora calculemos algunas probabilidades teóricas para ver si se ajustan con las frecuencias acumuladas:

$p(X \le 15) = p\left(Z \le \frac{15-37{,}8}{19{,}14}\right)$ = p(Z ≤ - 1,19) = 1 - p(Z ≤ 1,19) = 1 – 0,8830 = 0,117 ≠ 0,25

$p(X \le 55) = p\left(Z \le \frac{55-37{,}8}{19{,}14}\right)$ = p(Z ≤ 0,90) = 0,8159 ≠ 0,98

Hay mucha diferencia , luego no procede de una normal

✵✵✵❀❀✪❀❀✵✵✵

AUTOEVALUACIÓN

➀ ¿Qué diferencia hay entre distribuciones discretas y continuas? Pon un ejemplo de cada una de ellas.

Una distribución discreta está ligada a una variable discreta que sólo toma unos valores de terminados pero no los comprendidos entre ellos, sin embargo una distribución continua se refiere a la probabilidad de variable continua que puede tomar todos los valores posibles en un intervalo dado de su recorrido.

Ejemplos:

Discreta = número de nacimiento en un determinado hospital en un cierto intervalo de tiempo fijado.

Continua = Tiempo que transcurre desde que comienza el parto hasta el alumbramiento.

✺✺✺❀❀✪❀❀✺✺✺

➁ ¿Por qué en una distribución continua la probabilidad de un valor puntual es 0?

Porque una distribución continua tiene infinitos valores en cualquier intervalo en torno a un valor concreto, luego en ese valor su probabilidad es nula.

✺✺✺❀❀✪❀❀✺✺✺

➂ ¿Qué es la función de densidad de una variable aleatoria continua?

La que asocia a cada intervalo de valores de la variable la probabilidad de ese intervalo.

✺✺✺❀❀✪❀❀✺✺✺

➃ ¿Qué mide la función de distribución de una variable aleatoria continua? ¿Cuál es la función de distribución más normal?

Mide la probabilidad hasta un valor dado, $F(x) = p(X \leq x)$, de manera que $F'(x) = f(x)$.

✺✺✺❀❀✪❀❀✺✺✺

➄ Cita tres procesos aleatorios que pudieran ajustarse razonablemente bien a una distribución normal.

Durante mucho tiempo se pensó que los fenómenos naturales se ajustaban a este tipo de distribución, se la llamo por eso normal, ahora sabemos que sólo son normales algunos procesos aleatorios asociados a variables continuas:

⊙ Tiempo que tardan un conjunto aleatorio de personas en realizar una determinada tarea seleccionada al azar.

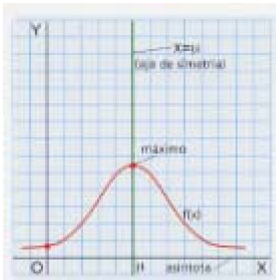
⊙ Errores cometidos por un conjunto de personas elegidas al azar al medir la distancia entre determinadas marcas en el suelo.

⊙ Tamaño de los copos de nieve.

❻ ¿Cuáles son las principales características de la curva normal?

La función de densidad de una variable continua de media μ y desviación típica σ, viene dada por: $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ cuyas características son:

❶ **Campo de existencia**: Toda la recta real; es decir, $(-\infty, +\infty)$.



❷ **Simetrías**: La función es simétrica respecto de la recta $x = \mu$.

❸ **Cortes con los ejes**:

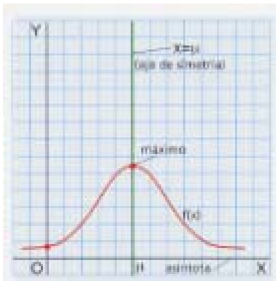
a) Con el eje Y: para $x = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}$

b) Con el eje X: no hay puntos de corte.

❹ **Asíntotas**: Cuando x tiende a $\pm\infty$, la y se aproxima a 0. Por tanto, el eje X es una asíntota. Es importante destacar que la ordenada es prácticamente cero para valores situados ala izquierda de $\mu - 3\sigma$ y para valores situados ala derecha de $\mu + 3\sigma$

❺ **Crecimiento y decrecimiento**: La función crece hasta $x = \mu$, y decrece a partir de $x = \mu$.

❻ **Máximos y mínimos**: La función f(x) presenta un máximo en $x = \mu$.



❼ **Puntos de inflexión**: La función presenta dos puntos de inflexión I e I' para los valores de $x = \mu - \sigma$ y $x = \mu + \sigma$.

❽ **Área encerrada bajo la curva**: El área del recinto determinado bajo la función f(x) y el eje de abscisas es igual a la unidad, ya que es una función de densidad. Al ser simétrica respecto al eje que pasa por $x = \mu$, dicho eje deja un área igual a 0,5 ala izquierda y otra igual a 0,5 a la derecha.

⑦ Sea $f(x)=\begin{cases} k & \text{si } x\in[0,5] \\ 0 & \text{si } x\notin[0,5]\end{cases}$ ¿Cuánto debe valer k para que f(x) sea la función de densidad de una variable aleatoria continua?

(a) k = 1
(b) k = 1/5
(c) k=5
(d) k = 0

Pra que f(x) sea una función de densidad se debe cumplir:

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{5} kdx + \int_{5}^{\infty} 0dx = \int_{0}^{5} kdx = kx\Big|_0^5 = 5k - 0 = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{5}$, opción (b).

✺✺✺❀❀✪❀❀✺✺✺

⑧ Sea la función de distribución $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ \dfrac{x}{5} & \text{si } x\in[0,5] \\ 1 & \text{si } x>5\end{cases}$ .Calcula:

(a) p(X = 1)
(b) F(1)
(c) F(3)
(d) F(6)

(a) p(X = 1) = 0, ya que la probabilidad de un valor concreto es nulo.

(b) F(1) = 1/5.

(c) F(3) = 3/5.

(d) F(6) = 1.

✺✺✺❀❀✪❀❀✺✺✺

⑨ ¿Cuándo una distribución binomial puede aproximarse correctamente por una normal? ¿Qué normal aproxima mejor a una binomial B (n, p)?

Cuando $n\cdot p$ y $n\cdot q$ son ≥ 5, y va mejorando a medida que *n* aumenta y *p* se acerca a 0,5.

La normal que se aproxima mejor a la binomial es $N\left(\mu = np, \sigma = \sqrt{npq}\right)$.

✵✵✵❀❀✪❀❀✵✵✵

① ⓪ Para la normal N (0, 1) se cumple que p($Z \le 1{,}5$), vale:

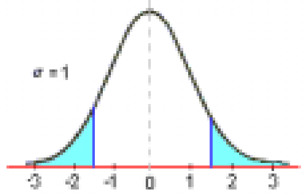
(a) 0,4332
(b) 0,0668
(c) 0,9332
(d) 0,8531

$p(Z \le 1{,}5) = \phi(1{,}5) = 0{,}9332$, apartado (c).

✵✵✵❀❀✪❀❀✵✵✵

① ① La probabilidad p($Z \le -1{,}5$), es igual a:

(a) p(Z = -1,5)
(b) p($0 \le Z \le 1{,}5$)
(c) p($Z \ge 1{,}5$)
(d) 1 - p($Z \ge 1{,}5$)



$p(Z \le -1{,}5) = p(Z \ge 1{,}5)$, opción (c).

✵✵✵❀❀✪❀❀✵✵✵

① ② Si la variable X es N (10, 1) y Z es la normal N (0, 1), la probabilidad p(8 < X < 11) es igual a

(a) p(2 < Z < 3)
(b) p(-2< Z <1)
(c) p(0,8 < Z < 0,11)
(d) Ninguna de las anteriores.

$$p(8 < X < 11) = p\left(\frac{8-10}{1} < Z < \frac{11-10}{1}\right) = p(-2 < Z < 1)$$, opción (b).

✵✵✵❀❀✪❀❀✵✵✵

① ③ Si la variable X es N (0, 3) y Z es N (0, 1), la probabilidad p(3 < X < 6) es igual a:

(a) p(0 < Z < 1).
(b) p(0 < Z < 3).
(c) p(1 < Z < 2).
(d) Ninguna de las anteriores

$$p(3 < X < 6) = p\left(\frac{3-0}{3} < Z < \frac{6-0}{3}\right) = p(1 < Z < 2)$$, opción (c).

❋❋❋❀❀✪❀❀❋❋❋