Resuelve tú (Pág ❸❼❾)

Para una diana numerada del 1 al 5, la distribución de probabilidad para el mismo jugador es la siguiente:

Número	0	1	2	3	4	5
Probabilidad	0,01	0,05	0,1	0,3	0,4	0,14

Halla la probabilidad de que consiga:

(a) Al menos 4 ($x \geq 4$). (b) Menos de 3 ($x \leq 2$).

(a) $p(x \geq 4) = p(x = 4) + p(x = 5) = 0,4 + 0,14 = 0,54.$

(b) $p(x \leq 2) = p(x = 0) + p(x = 1) + p(x = 2) = 0,01 + 0,05 + 0,1 = 0,16$

✵✵✵❀❀✪❀❀✵✵✵

Resuelve tú (Pág ❸❽❷)

Supongamos que la moneda del juego anterior (si sale cara A recibe 10 pta de B y si sale cruz A paga 10 pta a B) estuviera trucada de modo tal que p(cara) = 0,8 y p(cruz) = 0,2.

(a) Si el jugador A apuesta cara, calcula su esperanza matemática de ganancia en una tirada.

(b) ¿Cuánto debe pagar A cada vez que pierda para que el juego sea equitativo?

(a) $\mu = \sum_{i=1}^{2} x_i \cdot p(x_i) = x_{Cara} \cdot p(cara) + x_{cruz} \cdot p(cruz) = 10 \cdot 0,8 + (-10) \cdot 0,2 = 8 - 2 = 6$ pta.

(b) La media debe ser nula ($\mu = 0$) para que el juego sea equitativo. Si llamamos C a lo que debe pagar A cuando pierda (salga Cruz) tenemos:

$$\mu = x_{Cara} \cdot p(cara) + x_{cruz} \cdot p(cruz) = 10 \cdot 0,8 + C \cdot 0,2 = 0 \Leftrightarrow 0,2C = -8 \Leftrightarrow C = \frac{-8}{0,2} = -40 \text{ pta}$$

Debe pagar 40 pta cuando pierda.

✵✵✵❀❀✪❀❀✵✵✵

Resuelve tú (Pág ❸❽❸)

Halla la media, la varianza y la desviación típica de la variable S = «suma de las puntuaciones» en el lanzamiento de dos dados.

Hacemos una tabla para hallar las sumas posibles:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Para hallar los parámetro pedidos nos ayudamos de otra tabla:

Sumas = x_i	p_i	$x_i \cdot p_i$	x^2_i	$x_i^2 \cdot p_i$
2	1/36	2/36	4	4/36
3	2/36	6/36	9	18/36
4	3/36	12/36	16	48/36
5	4/36	20/36	25	100/36
6	5/36	30/36	36	180/36
7	6/36	42/36	49	294/36
8	5/36	40/36	64	320/36
9	4/36	36/36	81	324/36
10	3/36	30/36	100	300/36
11	2/36	22/36	121	242/36
12	1/36	12/36	144	144/36
Sumatorios	1	252/36=7		1974/36

Media

$\mu = \sum_{i=1}^{2} x_i \cdot p(x_i) = 7$, como vemos en la tercera columna de la tabla.

Varianza

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 \cdot p_i - \mu^2\right) = \frac{1974}{36} - 7^2 = 5{,}8\widehat{3}$$

Desviación típica

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{5{,}8\widehat{3}} = 2{,}42$$

Resuelve tú (Pág ❸❽❺)

Supongamos que en Andalucía el 25 % de los aficionados al fútbol es hincha del Betis. Elegidos 7 aficionados andaluces al azar, calcula la probabilidad de que sean del Betis:

(a) 2 (b) Al menos 5.

n = 7, p = probabilidad de ser hincha del Betis = 0,25, luego es una B(7, 0,25)

(a) $p(X = 2) = \binom{7}{2}p^2q^5 = \frac{7!}{2!\cdot 5!}\cdot 0{,}25^2\cdot 0{,}75^5 = 0{,}31.$

(b) $p(X \geq 5) = p(X = 5) + p(X = 6) + p(X = 7) = \binom{7}{5}0{,}25^5\cdot 0{,}75^2 + \binom{7}{6}0{,}25^6\cdot 0{,}75 + \binom{7}{7}0{,}25^7 =$

$= 0{,}01154 + 0{,}001282 + 0{,}000061035 \cong 0{,}0129$ (1,3 %)

✺✺✺❀❀✪❀❀✺✺✺

PROBLEMAS PROPUESTOS

1 Una variable aleatoria discreta tiene la siguiente distribución de probabilidad:

X	1	2	3	4
P(X)	0,1	m	0,25	0,35

(a) ¿Cuánto debe valer m?

(b) Halla p(X ≥ 2).

(c) Calcula la media y la desviación típica.

(a) Como $\sum p(X_i) = 1$, 0,1 + m + 0,25 + 0,35 = 1; m = 1 – (0,1 + 0,25 + 0,35) = 0,3

(b) p(X ≥ 2) = 1 – p(X < 2) = 1 – p(X = 1) = 1 – 0,1 = 0,9.

(c) Media = $\mu = \sum_{i=1}^{4} X_i\cdot p(X_i) = X_1\cdot p(X_1) + X_2\cdot p(X_2) + X_3\cdot p(X_3) + X_4\cdot p(X_4) = 1\cdot 0{,}1 + 2\cdot 0{,}3 + 3\cdot 0{,}25 + 4\cdot 0{,}35 = 0{,}1 + 0{,}6 + 0{,}75 + 1{,}4 = 2{,}85.$

✺✺✺❀❀✪❀❀✺✺✺

2 Halla la distribución de probabilidad del número de caras obtenidas al tirar tres veces una moneda. Calcula su media y su desviación típica.

Al lanzar 3 monedas pueden salir X_i = 0, 1, 2, 3 caras, hallemos sus probabilidades:

p(0 caras) = p(X = 0) = p(+,+,+) = $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$.

p(1 caras) = p(X = 1) = p(C,+,+) + p(+,C,+) + p(+,+,C) = $3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$.

p(2 caras) = p(X = 2) = p(C,C,+) + p(C,+,C) + p(+,C,C) = $3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$.

p(3 caras) = p(X = 3) = p(C,C,C) = $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$.

Luego la tabla que nos da la distribución es:

X	0	1	2	3
P(X)	1/8	3/8	3/8	1/8

Media = $\mu = \sum_{i=1}^{4} X_i\cdot p(X_i) = X_1\cdot p(X_1)+X_2\cdot p(X_2)+X_3\cdot p(X_3)+X_4\cdot p(X_4) = 0\cdot 1/8 + 1\cdot 3/8 + 2\cdot 3/8 + 3\cdot 1/8$ = 3/2 = 1,5, como era de esperar.

Desviación típica = $\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2\cdot p_i - \mu^2\right)} = \sqrt{0^2\cdot\frac{1}{8}+1^2\cdot\frac{3}{8}+2^2\cdot\frac{3}{8}+3^2\cdot\frac{1}{8}-\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{0{,}75} = 0{,}87$

✹✹✹❀❀✪❀❀✹✹✹

3 Se han tirado tres monedas 1.000 veces, obteniéndose los siguientes resultados:

Caras	0	1	2	3
Frecuencias	121	381	372	126

Calcula la media y la desviación típica. Teniendo en cuenta el problema anterior, ¿qué resultados cabía esperar? ¿Son aproximados a los obtenidos?

Corregimos la tabla pues entendemos que al lanzar 3 monedas, el número de caras puede ser 0, 1, 2 y 3 (en ningún caso 4 pues son 3 las monedas)

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i\cdot f_i}{\sum f_i} = \frac{0\cdot121+1\cdot381+2\cdot372+3\cdot126}{121+381+372+126} = \frac{1503}{1000} = 1{,}503$$

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{\sum x_i^2\cdot f_i}{\sum f_i = N}\right) - \bar{x}^2} = \sqrt{\left(\frac{0^2\cdot121+1^2\cdot381+2^2 372+3^2\cdot126}{1000}\right) - 1{,}503^2} = \sqrt{0{,}743991} = 0{,}86$$

Los resultados esperados son μ = 1,5, σ = 0, 87, que son muy parecidos.

✹✹✹❀❀✪❀❀✹✹✹

4 Se tiran dos dados y se apuestan 5 ptas. Si sale uno doble o seis doble se gana una cantidad x; en caso contrario se pierden las 5 ptas. ¿Cuánto debe ser x para que el juego sea equitativo?

Para que el juego sea equitativo la esperanza matemática μ = 0.

p((1,1) ó (6, 6)) = 2/36 = 1/18 y p(perder) = p(no sacar (1, 1) ó (6, 6)) = 1- 1/18 = 17/18.

$$x \cdot (1/18) - 5 \cdot 17/18 = 0;\ x = \frac{85/18}{1/18} = 85 \text{ pta.}$$

✵✵✵❀❀✪❀❀✵✵✵

5 En un examen de tipo test, cada pregunta tiene tres respuestas posibles de las que sólo una es cierta.

(a) Si se responde al azar, ¿cómo hay que penar cada respuesta incorrecta para que la puntuación final sea justa?

(b) ¿Qué puntuación se debe asignar a un examen de 100 preguntas con 63 aciertos, 30 errores y 7 respuestas en blanco?

(a) Supongamos que asignamos a cada respuesta correcta una puntuación de 1 y n su puntuación:

1 ·p(acierto) + x · p(error) = 0; $1 \cdot \frac{1}{3} + x \cdot \frac{2}{3} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{3} = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2 \cdot 3} = -\frac{1}{2}$, hay que penar cada respuesta incorrecta con 0,5 punto.

(b) Puntuación = 63 ·1 + 30 ·(- 0,5) + 7 · 0 = 63 – 15 = 48 puntos sobre 100.

✵✵✵❀❀✪❀❀✵✵✵

6 Halla la distribución de probabilidad de una B(5, 0,2). A partir de ella, calcula p(X ≤ 3), p(X > 1) y p(X ≥ 2).

Hallemos las probabilidades:

p(X = 0) = $\binom{5}{0} p^0 \cdot q^5 = 1 \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^5 = 0{,}32768$.

p(X = 1) = $\binom{5}{1} p^1 \cdot q^4 = 5 \cdot 0{,}2^1 \cdot 0{,}8^4 = 0{,}4096$.

p(X = 2) = $\binom{5}{2} p^2 \cdot q^3 = 10 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^3 = 0{,}2048$.

p(X = 3) = $\binom{5}{3} p^3 \cdot q^2 = 10 \cdot 0{,}2^3 \cdot 0{,}8^2 = 0{,}0512$.

p(X = 4) = $\binom{5}{4} p^4 \cdot q^1 = 5 \cdot 0{,}2^4 \cdot 0{,}8^1 = 0{,}0064$.

p(X = 5) = $\binom{5}{5} p^5 \cdot q^0 = 1 \cdot 0{,}2^5 \cdot 0{,}8^0 = 0{,}00032$.

Y ahora tabulamos la distribución:

X	0	1	2	3	4	5
P(X)	0,32768	0,4096	0,2048	0,0512	0,0064	0,00032

Calculamos las probabilidades pedidas:

p(X ≤ 3) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) + p(X = 3) = 0,32768 + 0,4096 + 0,2048 + 0,0512 = 0,99328.

p(X > 1) = p(X = 2) + p(X = 3) + p(X = 4 + p(X = 5) = 0,2048 + 0,0512 + 0,0064 + 0,00032 = 0,26272.
p(X ≥ 2) = p(X > 1) = 0,26272.

7 Un examen consta de 12 preguntas, con cuatro opciones de respuesta cada una, de las que sólo una es correcta. Si se responde al azar, cuál es la probabilidad de:

(a) Acertar todas las preguntas.
(b) No acertar ninguna.
(c) Acertar 10 o más preguntas.

p = probabilidad de acertar una pregunta = ¼ = 0,25, luego q = probabilidad de fallar una pregunta = 1 – p = 1 – 0,25 = 0,75. Como n = 12, se trata de una B(12, 0,25) de la que se nos pide:

(a) p(X = 12) = $\binom{12}{12} 0{,}25^{12} 0{,}75^0 = 0{,}000000059$.

(b) p(X = 0) = $\binom{12}{0} 0{,}25^0 0{,}75^{12} = 0{,}03167...$

(c)
p(X ≥ 10) = p(X = 10) + p(X = 11) + p(X = 12) =
$= \binom{12}{10} 0{,}25^{10} 0{,}75^2 + \binom{12}{11} 0{,}25^{11} 0{,}75^1 + \binom{12}{12} 0{,}25^{12} 0{,}75^0 = 0{,}0000354 + 0{,}000002145 + 0{,}000000059 =$
=0,0000376.

8 Un examen consta de 8 preguntas, con tres respuestas posibles cada una, de las que sólo una es correcta. Si se responde al azar, cuál es la probabilidad de:

(a) Acertar 4 preguntas.
(b) No acertar ninguna.
(c) Acertar al menos 2.

p = probabilidad de acertar una pregunta = 1/3, n = 8, luego es una B(8, 1/3).

(a) $p(X = 4) = \binom{8}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{8!}{4!\cdot 4!}\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^4 = 0{,}17071.$

(b) $p(X = 0) = \binom{8}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^8 = 1\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^8 = 0{,}039\ldots.$

(c) $p(X \geq 2) = 1 - p(X < 2) = 1 - p(X = 0) - p(X = 1) =$

$$= \binom{8}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^8 + \binom{8}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^7 = 0{,}039\ldots + 0{,}1561 = 0{,}195$$

✺✺✺❀❀✪❀❀✺✺✺

9 Lanzamos cinco veces una moneda bien construida.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener 1 cara, 3 caras, 5 caras?
(b) Si sabemos que se ha obtenido un número impar de caras, ¿cuál es la probabilidad de que hayan sido 3 caras?

Es una binomial B(5, 0,5) ya que n = 5 lanzamientos y p(C) = p(+) = q = 0,5.

(a) $p(X = 1) = \binom{5}{1}0{,}5^1\cdot 0{,}5^4 = 0{,}15625$, $p(X = 3) = \binom{5}{3}0{,}5^3\cdot 0{,}5^2 = 0{,}3125$.

$p(X = 5) = \binom{5}{5}0{,}5^5\cdot 0{,}5^0 = 0{,}15625$.

(b) $p(X = 3/ X = \text{impar}) = \frac{p(X = 3)}{p(X = \text{impar})} = \frac{0{,}3125}{0{,}15625 + 0{,}3125 + 0{,}15625} = 0{,}5$

✺✺✺❀❀✪❀❀✺✺✺

10 Para una moneda trucada la probabilidad de sacar cara es 6/11. Si se lanza 7 veces, calcula la probabilidad de:

(a) Sacar 5 caras.
(b) Sacar al menos una cruz.

Como al lanzar la moneda sólo se pueden obtener 2 resultados (C y +) y la probabilidad p(C) = 6/11 permanece constante y n = 7 veces, se trata de una B(7, 6/11).

(a) p(X = 5) = $\binom{7}{5}\left(\frac{6}{11}\right)^5\left(\frac{5}{11}\right)^2 = 0{,}21$

(b) p(al menos una cruz) = p(1+ = 6C, 2+ = 5C, 3+ = 4C, 4+ = 3C, 5+ = 2C, 6+ = 1C, 7+ = 0C) = p(X ≤ 6) = 1 – p(X = 7) = $1-\binom{7}{7}\left(\frac{6}{11}\right)^7\left(\frac{5}{11}\right)^0 = 1-0{,}014365 = 0{,}9856...$

✳✳✳❀❀✪❀❀✳✳✳

11 La probabilidad de que un tirador haga blanco de un disparo es 0,6. Si efectúa 6 disparos, halla la probabilidad de que haga:

(a) 6 blancos.
(b) Un mínimo de 4 blancos.
(c) Si efectúa 60 disparos, calcula la media y la desviación típica del número de blancos conseguidos.

Es una B(6, 0,6)

(a) p(X = 6) = $\binom{6}{6}0{,}6^6\cdot 0{,}4^0 = 0{,}046656$.

(b) p(X ≥ 4) = p(X = 4) + p(X = 5) + p(X = 6) = $\binom{6}{4}0{,}6^4\cdot 0{,}4^2+\binom{6}{5}0{,}6^5\cdot 0{,}4^1+\binom{6}{6}0{,}6^6\cdot 0{,}4^0 = 0{,}54$

(c) Media = μ = n · p = 60 · 0,6 = 36 blancos por término medio.

Desviación típica = $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{60\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4} = 3{,}79$

✳✳✳❀❀✪❀❀✳✳✳

12 Se realizan cinco extracciones, con reemplazamiento, de una baraja de 40 cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que la numeración de todas ellas sea inferior a 4?

p = probabilidad de que la numeración de una carta sea menor que cuatro = 12/40 = 3/10 = 0,3.
q = probabilidad de que la numeración de una carta sea mayor que cuatro = 28/40 = 7/10 = 0,7.
n = 5 cartas.

Es una B(5, 0,3).

p(5 cartas con numeración inferior a 4) = p(X = 5) = $\binom{5}{5}p^5q^0 = 1\cdot 0{,}3^5\cdot 0{,}7^0 = 0{,}00243$

✳✳✳❀❀✪❀❀✳✳✳

1 3 En el año 1992, el 40 % de la población española era laboralmente activa; de ellos, el 18 % estaba en paro. Si se tomó una muestra de 10 españoles:

(a) ¿Cuál era la probabilidad de que al menos dos de ellos no trabajasen?
(b) ¿Y de que al menos dos de ellos estuviesen en paro si eran potencialmente activos?

p = p(no trabajar un español) = p(activa y esté en paro ó no sea una persona activa) = $p(A \cap P) + p(A^C) = p(A) \cdot p(P/A) + (1 - p(A)) = 0,4 \cdot 0,18 + 0,6 = 0,072 + 0,6 = 0,672$.

Como n = 10, B(10, 0,672).

(a) p(al menos 2 no trabajen) = $p(X \geq 2) = 1 - p(X < 2) = 1 - (p(X = 0) + p(X = 1)) =$

$$= 1 - \left[\binom{10}{0} p^0 \cdot q^{10} + \binom{10}{1} p^1 \cdot q^9\right] = 1 - \left[1 \cdot 0,672^0 \cdot 0,328^{10} + 10 \cdot 0,672^1 \cdot 0,328^9\right] = 0,9996903...$$

(b) Ahora varía la probabilidad $p = p(P^C/A) = 0,82$, se trata de una binomial B(10, 0,82).

p(al menos 2 no trabajen) = $p(X \geq 2) = 1 - p(X < 2) = 1 - (p(X = 0) + p(X = 1)) =$

$$= 1 - \left[\binom{10}{0} p^0 \cdot q^{10} + \binom{10}{1} p^1 \cdot q^9\right] = 1 - \left[1 \cdot 0,82^0 \cdot 0,18^{10} + 10 \cdot 0,82^1 \cdot 0,18^9\right] = 0,999998337$$

✺✺✺❀❀✪❀❀✺✺✺

1 4 Aproximadamente, el 25 % de los asalariados españoles cobran del sector público. Si tomamos 5 asalariados al azar, ¿cuál es la probabilidad de que 2 cobren del sector público?

p = probabilidad de que una persona sea funcionario/a = 0,25, como n = 5, se trata de una B(5, 0,25).

Se pide, $p(X = 2) = \binom{5}{2} 0,25^2 \cdot 0,75^8 = 10 \cdot 0,0625 \cdot 0,1 = 0,0626$ (6,26 %).

✺✺✺❀❀✪❀❀✺✺✺

1 5 En una urna hay 5 bolas blancas y 10 rojas. Se hacen 6 extracciones, con reemplazamiento, de la misma. Calcula:

(a) La probabilidad de sacar más de 3 bolas blancas.
(b) El número medio de bolas blancas sacadas.
(c) La composición más probable de bolas sacadas.

p = probabilidad de sacar bola blanca = 5/15 = 1/3

n = 6

Luego es una binomial B(6, 1/3).

(a) p(sacar más de 3 blancas) = p(X > 3) = p(X = 4) + p(X = 5) + p(X = 6) =

$$=\binom{6}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^2+\binom{6}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^1+\binom{6}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^6\left(\frac{2}{3}\right)^0=15\cdot 4\cdot\frac{1}{729}+6\cdot 2\cdot\frac{1}{729}+\frac{1}{729}=\frac{73}{729}\approx 0{,}1$$

(b) Hallamos la distribución de probabilidades:

$p(X=0)=\binom{6}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^6=0{,}088.$ $p(X=1)=\binom{6}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^5=0{,}263.$

$p(X=2)=\binom{6}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^4=0{,}33.$ $p(X=3)=\binom{6}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^3=0{,}22.$

$p(X=4)=\binom{6}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^2=0{,}082.$ $p(X=5)=\binom{6}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^1=0{,}016.$

$p(X=6)=\binom{6}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^6\left(\frac{2}{3}\right)^0=0{,}0014.$

Y ahora podemos hallar la media:

$\mu=\sum_{1=0}^{6}x_i\cdot p_i=0\cdot 0{,}88+1\cdot 0{,}263+2\cdot 0{,}33+3\cdot 0{,}22+4\cdot 0{,}082+5\cdot 0{,}016+6\cdot 0{,}0014=2$ bolas blancas por término medio.

(c) Como vemos en el apartado anterior, la mayor probabilidad se corresponde con sacar 2 bolas p(X = 2) = 0, 33 (un 33%).

✺✺✺❀❀✪❀❀✺✺✺

16 En unos grandes almacenes, la probabilidad de que un cliente ladrón sea descubierto por un vigilante es 0,2.

(a) Si hay cinco vigilantes, ¿cuál es la probabilidad de que un ladrón sea descubierto?

(b) ¿Cuántos vigilantes son necesarios si se quiere descubrir a más del 85 % de los ladrones?

(a) B(5, 0,2)

Se pide la probabilidad de que el ladrón sea descubierto por al menos uno de los 5 vigilantes, es decir p(X ≥ 1)

$$p(X\geq 1)=1-p(X<1)=1-p(X=0)=1-\binom{5}{0}0{,}2^0\cdot 0{,}8^5=0{,}67232\quad(67{,}2\ \%)$$

(b) Evidentemente ha de ser más de uno, luego p(X ≥ 1) ≥ 0,85.

p(X ≥ 1) = 1 - p(X < 1) = 1- p(X = 0) = 1 - $\binom{n}{0}0{,}20^0 \cdot 0{,}8^n = 1 - 0{,}8^n$ ya que $\binom{n}{0} = 1$ y $0{,}20^0 = 1$, luego hemos de resolver la inecuación exponencial:

$1 - 0{,}8^n \geq 0{,}85$, $1 - 0{,}85 \geq 0{,}8^n$, $0{,}15 \geq 0{,}8^n$, si aplicamos logaritmos a ambos miembros:

log 0,15 ≥ n log0,8, luego $n \geq \frac{\log 0{,}15}{\log 0{,}8} \Leftrightarrow n \geq 8{,}5$, es decir se necesitan al menos 9 vigilantes para detectar al menos un 85 % de los robos.

✺✺✺❀❀✪❀❀✺✺✺

17 Supongamos que el 10 % de los alumnos de un instituto falta a clase una vez por semana. Si seleccionamos al azar un grupo de 10 alumnos, calcula la probabilidad de que en una semana determinada:

(a) No haya faltado ninguno.
(b) Hayan faltado a clase más de 3 alumnos.

p = probabilidad de que un alumno falte a clase = 0,10.
n = 10, luego es una binomial B(10, 0,10)

(a) p(no haya faltado ninguno) = p(X = 0) = $\binom{10}{0}0{,}1^0 \cdot 0{,}9^{10} = 0{,}35$ (35 %).

(b) $p(X \leq 3) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) + p(X = 3) = \binom{10}{0}0{,}1^0 \cdot 0{,}9^{10} + \binom{10}{1}0{,}1^1 \cdot 0{,}9^9 +$
$+ \binom{10}{2}0{,}1^2 \cdot 0{,}9^8 + \binom{10}{3}0{,}1^3 \cdot 0{,}9^7 = 0{,}35 + 0{,}387 + 0{,}1937 + 0{,}0574 = 0{,}988$.

✺✺✺❀❀✪❀❀✺✺✺

18 El 60 % de los afiliados de una organización juvenil está al corriente de sus cuotas. Si se seleccionan al azar 7 afiliados, cuál es la probabilidad de que estén al corriente de sus cuotas:

(a) Al menos dos. (b) Más de cinco.

Se trata de una B(7, 0,6).

(a) p(al menos dos estén al corriente de sus cuotas) = p(X ≥ 2) = 1 – p(X < 2) =
= 1 – p(X = 0) – p(X = 1) = 1 - $\binom{7}{0}0{,}6^0 \cdot 0{,}4^7 - \binom{7}{1}0{,}6^1 \cdot 0{,}4^6 = 0{,}981158$ (98 %)

(b) p(más de 5 estén al corriente de sus cuotas) = p(X > 5) = p(X = 5) + p(X = 6) + p(X = 7) = $\binom{7}{5}0{,}6^5 \cdot 0{,}4^2 + \binom{7}{6}0{,}6^6 \cdot 0{,}4^1 + \binom{7}{7}0{,}6^7 \cdot 0{,}4^0 = 0{,}42$ (42 %)

✺✺✺❀❀✪❀❀✺✺✺

19 En Andalucía, la probabilidad de nacimiento de niñas es del 48,5 %. Si elegimos al azar una familia de cinco hijos, halla la probabilidad de que tenga:

(a) Tres hijas. (b) Al menos una hija.

Es una B(5, 0,485) ya que sólo hay dos resultado posibles (niña o niño), la probabilidad (p) de que sea niña se mantiene y hay n = 5 "experimentos".

(a) p(3 hijas) = p(X = 3) = $\binom{5}{3}0{,}485^3 \cdot 0{,}515^2 = 0{,}3026$ (30 %).

(b) p(al menos una hija) = p(X ≥ 1) = 1 – p(ninguna hija) = 1 – p(X = 0) = 1 - $\binom{5}{0}0{,}485^0 \cdot 0{,}515^5 = 0{,}963777...$ (≃ 96 %)

✸✸✸❀❀✪❀❀✸✸✸

20 Si en la comunidad andaluza se eligen 3.000 familias con 5 hijos. Cuántas de ellas tendrán:

(a) Tres hijas (b) Al menos una hija.

Como en el ejercicio anterior ya hemos hallado las probabilidades para saber las familias sólo hay que multiplicar por N = 3 000.

(a) 3 000 · 0,3026 ≃ 908 familias tendrán 3 niñas.

(b) 3 000 · 0,963777... ≃ 2 892 familias tendrán al menos una hija.

✸✸✸❀❀✪❀❀✸✸✸

21 En 1991 el 6,5 % de los españoles vivía en Castilla-León. Si elegimos 5 españoles al azar, qué probabilidad hay de que:

(a) Todos vivan en Castilla-León.

(b) Al menos uno viva en Castilla-León.

p = probabilidad de vivir en Castilla-León = 0,065 = cte.
n = 5 "experimentos"
Luego es B(5, 0,065).

(a) p(los 5 vivan en Castilla-León) = p(X = 5) = $\binom{5}{5}0{,}065^5 \cdot 0{,}945^0 = 0{,}00000116$, evidentemente muy baja.

(b) p(al menos uno de los 5 viva en CL) = p(X ≥ 1) = 1 – p(ninguno de los 5 viva en CL) = 1 – p(X = 0) = 1 – $\binom{5}{0}0{,}065^0 \cdot 0{,}945^5$ = 0,7536... (≃ 75 %).

❋❋❋❀❀✪❀❀❋❋❋

2 2 La probabilidad de acertar un número en el juego de la ruleta es 1/37.

(a) Si apostamos seis veces a un mismo número, ¿cuál es la probabilidad de acertar al menos una vez?

(b) ¿Cuántas veces hay que apostar al mismo número para que la probabilidad de ganar al menos una vez sea mayor que 0,5?

(a) Se trata de una B(5, 1/37) y se nos pide p(acertar al menos 1 vez) = p(X ≥ 1) = 1 – p(acertar menos de 1 vez) = 1 – p(X < 1) = 1 – p(X = 0) = 1 – $\binom{5}{0}\left(\frac{1}{37}\right)^0 \cdot \left(\frac{36}{37}\right)^5$ = 0,128...

(b) p(X ≥ 1) ≥ 0,5.

p(X ≥ 1) = 1 - p(X < 1) = 1- p(X = 0) = 1 - $\binom{n}{0}\left(\frac{1}{37}\right)^0 \cdot \left(\frac{36}{37}\right)^n$ = 1 - $\left(\frac{36}{37}\right)^n$ ya que $\binom{n}{0}$ = 1y K^0 = 1, luego hemos de resolver la inecuación exponencial:

1 – $0{,}972972...^n$ ≥ 0,5, 1 – 0,5 ≥ $0{,}972972...^n$, 0,5 ≥ $0{,}972972...^n$, si aplicamos logaritmos a ambos miembros:

log 0,5 ≥ n log0,972972..., luego $n \geq \dfrac{\log 0{,}5}{\log\left(\frac{36}{37}\right)} \Leftrightarrow n \geq 25{,}298...$, es decir se necesitan al menos 26 veces apostando al mismo número para que la probabilidad de ganar rebase el 50 %.

❋❋❋❀❀✪❀❀❋❋❋

2 3 En una partida de disquetes para ordenador se detecta que el 20 % están defectuosos. Para vender esos disquetes se ofertan ocho al precio de cinco. ¿Hasta qué punto es interesante comprar esos disquetes? Si una empresa compra 1.000 disquetes, ¿cuántos debe pagar y cuántos cabe esperar que sean defectuosos?

p = probabilidad de que un disquete sea defectuoso = 0,20 = cte.
n = 8.
Es una binomial B(8, 0,20).

Hallamos la probabilidad de que entre los 8 disquetes haya al menos 5 en buen estado, es decir menos de 3 defectuosos:

$p(X < 3) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) = \binom{8}{0}0{,}2^0 \cdot 0{,}8^8 + \binom{8}{1}0{,}2^1 \cdot 0{,}8^7 + \binom{8}{2}0{,}2^2 \cdot 0{,}8^6 = 0{,}7969$

luego tenemos 80 % de posibilidades de que haya más de 5 en buen estado y merezca la pena comprarlos.

Con 1 000 disquetes se pueden hacer 1 000/8 = 125 lotes de 8 disquetes (que pagaremos al precio de lotes de 5), luego debe pagar 125 · 5 = 625 disquetes.

Es de esperar que halla 1 000 · 0,2 = 200 disquetes defectuosos.

✱✱✱❀❀✪❀❀✱✱✱

24 ¿Cuántas veces hay que tirar un dado para estar seguros, con una confianza del 99 %, de que una vez al menos ha salido un 6?

p = probabilidad de que en un lanzamiento de un dado salga un seis = 1/6 = cte

Se nos pide el número de lanzamientos n tal que en una B(n. 1/6) $p(X \geq 1) = 0{,}99$

$p(X \geq 1) = 1 - p(X < 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{n}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$ ya que $\binom{n}{0} = 1$ y $K^0 = 1$,

luego hemos de resolver la inecuación exponencial:

$1 - (5/6)^n \geq 0{,}99$, $1 - 0{,}99 \geq (5/6)^n$, $0{,}01 \geq (5/6)^n$, si aplicamos logaritmos a ambos miembros:

$\log 0{,}01 \geq n \log(5/6)$, luego $n \geq \dfrac{\log 0{,}01}{\log\left(\frac{5}{6}\right)} \Leftrightarrow n \geq 25{,}2585\ldots$, es decir se necesitan al menos 26 tiradas para que la probabilidad de sacar al menos un 6 sea al menos del 99 %.

✱✱✱❀❀✪❀❀✱✱✱

25 En una biblioteca universitaria el 70 % de los libros están en castellano. Se cogen 7 libros al azar y se observa cuántos de ellos están en castellano. Halla:

(a) La función de probabilidad.
(b) La probabilidad de que la mayoría de los libros estén en algún otro idioma.
(c) La media y la desviación típica.

(a) Para definir la función de probabilidad, se necesita conocer la probabilidad de los distintos valores de la variable X = 0, 1, ... , 7:

$p(X = 0) = \binom{7}{0}0{,}7^0 \cdot 0{,}3^7 = 0{,}00022$ $\qquad$ $p(X = 1) = \binom{7}{1}0{,}7^1 \cdot 0{,}3^6 = 0{,}0036.$

$p(X = 2) = \binom{7}{2}0{,}7^2 \cdot 0{,}3^5 = 0{,}025$ $\qquad$ $p(X = 3) = \binom{7}{3}0{,}7^3 \cdot 0{,}3^4 = 0{,}09724.$

$p(X = 4) = \binom{7}{4} 0{,}7^4 \cdot 0{,}3^3 = 0{,}2268945$ $\quad p(X = 5) = \binom{7}{5} 0{,}7^5 \cdot 0{,}3^2 = 0{,}3176523.$

$p(X = 6) = \binom{7}{6} 0{,}7^6 \cdot 0{,}3^1 = 0{,}2470629$ $\quad p(X = 7) = \binom{7}{7} 0{,}7^7 \cdot 0{,}3^0 = 0{,}0823543.$

X	0	1	2	3	4	5	6	7
P(X)	0,00022	0,0036	0,025	0,097	0,23	0,32	0,25	0,082

(b) p(la mayoría no estén en castellano) = $p(X \leq 3)$ = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) + p(X = 3) = 0,00022 + 0,0036 + 0,025 + 0,097 = 0,12582 (13 %)

(c)

Media = $\mu = \sum_{i=1}^{7} x_i \cdot p_i$ = 0 · 0,00022 + 1 · 0,0036 + 2·0,025 + 3·0,097 + 4·0,23 + 5 ·0,32 + 6·0,25 + 7 · 0,082 = 4,94 ≃ 5.

Varianza = $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{7} x_i^2 \cdot p_i = 0^2 \cdot 0{,}00022 + 1^2 \cdot 0{,}0036 + 2^2 \cdot 0{,}025 + 3^2 \cdot 0{,}097 + 4^2 \cdot 0{,}23 + 5^2 \cdot 0{,}32 + 6^2 \cdot 0{,}25 + 7^2 \cdot 0{,}082 = 25{,}6746$, luego $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{25{,}6746} = 5{,}07$

AUTOEVALUACIÓN

① ¿Es lo mismo distribución de frecuencias que distribución de probabilidad? ¿En qué se parecen? Pon un ejemplo.

La distribución de frecuencias es experimental, a posteriori. La distribución de probabilidad es apriorística son valores teóricos.

Ejemplo: La probabilidad de que al lanzar un dado no trucado salga un 5 es, en teoría, 1/6, pero si lanzamos un dado muchas veces (10 000 por ejemplo) y contamos la frecuencia relativa de que salga un 5, se aproximará a la teórica 1/6.

② Pon un ejemplo de variable aleatoria discreta que tome los valores 0, 1 y 2. (Si no lo sabes, lee la Pregunta 7).

X = número de caras que se pueden obtener al lanzar dos monedas, pueden salir 0, 1 o 2 caras.

③ Para la variable aleatoria anterior, ¿cuánto debe valer la suma p(X = 0) + p(X = 1) + + p(X = 2)?

Como es la suma de todas los sucesos del espacio muestral su suma valdrá 1.

✺✺✺❀❀✪❀❀✺✺✺

④ ¿Qué significado tienen la esperanza matemática? ¿Qué mide la varianza?

$\mu = \sum_{i=1}^{7} x_i \cdot p_i$, indica el valor medio que cabría esperar si el experimento se realizase un número suficientemente grande de veces.

Varianza = $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{7} x_i^2 \cdot p_i$ es una medida del grado de concentración de los valores de la variable aleatoria alrededor de la media, es decir una medida de la dispersión de los datos en torno a la esperanza matemática.

✺✺✺❀❀✪❀❀✺✺✺

⑤ ¿Cuáles son las características fundamentales de una distribución binomial?

(1) Se realizan n ensayos, cada uno de los cuales tiene dos únicas opciones complementarias que llamamos éxito (E) y fracaso(F).

(2) La probabilidad de éxito p(E) = p permanece constante en cada ensayo y por tanto también la de fracaso p(F) = q = 1 – q, que es el suceso contrario.

(3) Los valores que puede tomar la variable aleatoria (X) son discretos, X = 0, 1, 2, ..., n.

✺✺✺❀❀✪❀❀✺✺✺

⑥ ¿Cuánto valen la media y la desviación típica de una binomial B(n, p)? Da su valor para el caso B(100, 0,2).

Media = μ = n · p = 100 · 0,2 = 20

Desviación típica = $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{100 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8} = 4$

✺✺✺❀❀✪❀❀✺✺✺

⑦ La variable aleatoria que mide el número de caras al tirar dos monedas, toma los valores:

(a) 0, 1, 2
(b) CC, CX, XC, XX
(c) ¼, ½, ¼.

La respuesta correcta es el (a) es decir 0 caras, 1 cara o 2 caras.

✷✷✷❀❀✪❀❀✷✷✷

⑧ Una variable aleatoria mide:
(a) Los posibles sucesos.
(b) La probabilidad de cada suceso.
(c) La esperanza matemática.
(d) La esperanza y la varianza.

Los posibles sucesos, opción (a).

✷✷✷❀❀✪❀❀✷✷✷

⑨ Un examen tipo test consta de 100 preguntas con tres respuestas cada una, de las que sólo una es cierta. Si se responde al azar, la media de aciertos será:

(a) 30
(b) 100/3
(c) 25
(d) Ninguna de las anteriores

p = 1/3 ya que hay tres posibles respuestas y una sola es cierta.

$\mu = n \cdot p = 100 \cdot (1/3) = 100/3$, opción (b).

✷✷✷❀❀✪❀❀✷✷✷

①⓪ Un examen verdadero-falso consta de 100 preguntas. Suponiendo que ninguna pregunta se deja en blanco, para aprobarlo justamente hay que acertar al menos:

(a) $(1/2) \cdot 100 = 50$ preguntas
(b) $(3/4) \cdot 100 = 75$ preguntas
(c) $(2/3) \cdot 100 - 67$ preguntas

Media = $\mu = n \cdot p = 100 \cdot (1/2) = 50$ preguntas, ya que la probabilidad de acertar una pregunta de respuesta verdadero-falso es ½.

✷✷✷❀❀✪❀❀✷✷✷

① ① Las distribuciones de las preguntas 9 y 10 son, respectivamente:

(a) B(3, 1/3) y B(2, ½).
(b) B(100, 3) y B(100, 2).
(c) B(100, 1/3) y B(100, 1/2).
(d) B(100, 3/4) y B (75, ½).

En el ejercicio 9, n = 100 y p = 1/3, en el 10 también n = 100 y p = ½, luego la respuesta correcta es la (c).

✱✱✱❀❀✪❀❀✱✱✱

① ② Si tiramos seis dados a la vez, la probabilidad de que salga al menos un 6 vale:

(a) 1 (b) 1/6 (c) $1-(5/6)^6$ (d) $(5/6)^6$

p(al menos un 6) = 1 – p(ningún 6) = 1 – p(X = 0) = $1-\binom{6}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^6 = 1-\left(\frac{5}{6}\right)^6$ que es la opción (c).

① ③ Si tiramos 7 monedas, ¿cuál es la probabilidad de que se obtengan 5 caras?

(a) 5/7 (b) $\binom{7}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^7$ (e) 7 · 5 · (1/2)

Se trata de una B(7, ½).

p(X = 5) = $\binom{7}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\binom{7}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^7$ que es la opción (b).

✱✱✱❀❀✪❀❀✱✱✱

① ④ ¿Qué es más fácil
(1) tirar 7 monedas y sacar 6 caras, o (2) tirar 2 dados y sacar el 6 doble?

(1) Se trata de una B(7, ½), en la que se nos pide p(X = 6) = $\binom{7}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^7$ = 0,0546875.

(2) Ahora es una B(2, 1/6) y se nos pide p(X = 2) = $\binom{2}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^0$ = 0,0277777...

es más fácil la opción (1).

✱✱✱❀❀✪❀❀✱✱✱