Resuelve tú (Pág ❸❺❺)

En una ciudad hay tres periódicos A, B y C. Estos periódicos son leídos según los siguientes porcentajes: A por el 40 % de la población; B por el 37 %; C por el 31 %. Además, un 16 % lee A y B; un 11 % lee A y C; un 8 % lee B y C, y un 3 % lee los tres.

(a) ¿Cuántas personas no leen periódicos?

(b) ¿Cuántas leen sólo un periódico?

(c) ¿Cuántas leen sólo A?

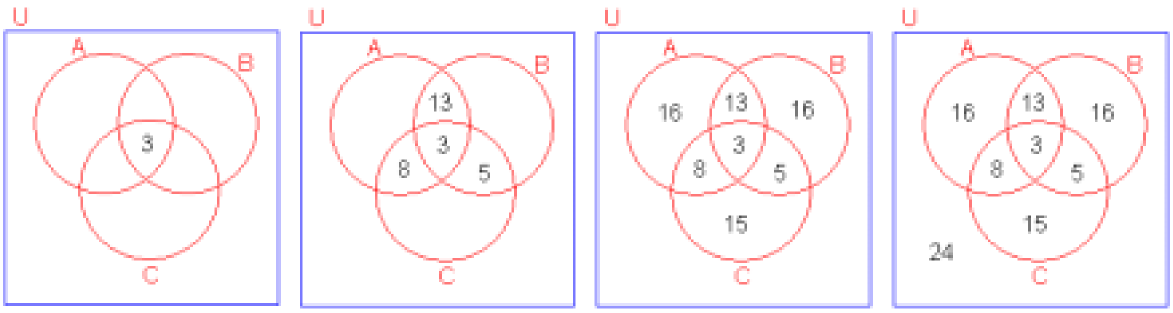
(a) Entiendo que se pide el porcentaje de personas que no leen ningún periódico, pues par saber las personas que no leen ningún periódico necesitaríamos saber el total de habitantes de esa ciudad. Vamos a ir rellenando el diagrama de Venn:

❆ Comenzamos por poner el porcentaje de los que leen los tres periódicos, es decir Cardinal(A∩B∩C) = 3 %.

❆ Ahora el porcentaje de los que leen sólo dos: Los que leen A y B pero no C, son Card(A∩B) – Card(A∩B∩C) = 16 % - 3 % = 13 %, Análogamente el porcentaje de los que sólo leen B y C pero no A. Card(B∩C) – Card(A∩B∩C) = 8 % - 3 % = 5 %, y el porcentaje de los que leen A y C pero no B, Card(A∩C) – Card(A∩B∩C) = 11 % - 3 % = 8 %,

❆ El porcentaje de los que sólo leen un periódico son: sólo A = 40 – 16 – 8 = 16 % , sólo B = 37 – 16 – 5 = 16 % y sólo C = 31 – 8 – 8 = 15 %.

❆ Por ultimo el porcentaje de los que no leen ningún periódico: 100 – (16 + 16 + 15 + 13 + 8 + 5 + 3) = 100 – 76 = 24 %



(b) Porcentaje de los que leen sólo un periódico = leen sólo A + leen sólo B + leen sólo C = 16 % + 16 % + 15 % = 47 %.

(c) Porcentaje de los que leen sólo A = 16 %.

Resuelve tú (Pág ❸❺❽)

Sean A y B dos sucesos tales que p(A) = 0,5, p(B) = 0,4 y p(A n B) = 0,2. Halla:

(a) $p(A \cup B)$ **(b)** $p(A^C \cup B^C)$

❄❄❄❁❁✪❁❁❄❄❄

(a) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0,5 + 0,4 - 0,2 = 0,9 - 0,2 = 0,7$.

(b) $p(A^C \cup B^C) = p((A \cap B)^C)$ = { aplicando una de las leyes de Morgan} = $1 - p(A \cap B) = 1 - 0,2 = 0,8$.

❄❄❄❁❁✪❁❁❄❄❄

Resuelve tú (Pág ❸❻⓿)

Los 300 alumnos de un centro de bachillerato se distribuyen de acuerde con la tabla

Modalidad	Alumnos	Alumnas	Total
Ciencias	95	85	180
Humanidades	50	70	120
Total	145	155	300

Calcula las probabilidades:

(a) De ser de Ciencias, p(C).
(b) De ser de Humanidades, p(H)
(c) De ser alumno, p(A).
(d) De ser alumna, p(B).
(e) p(A/C).
(f) p(B/C).
(g) p(H/A)
(h) p(C/A).

❄❄❄❁❁✪❁❁❄❄❄

(a) $p(C) = \dfrac{\text{Alumnos/as de Ciencias}}{\text{Total}} = \dfrac{180}{300} = \dfrac{3}{5} = 0,6 = (60\%)$.

(b) $p(H) = \dfrac{\text{Alumnos/as de Humanidades}}{\text{Total}} = \dfrac{120}{300} = \dfrac{2}{5} = 0,4 = (40\%)$.

(c) $p(A) = \dfrac{\text{Alumnos}}{\text{Total}} = \dfrac{145}{300} = \dfrac{29}{60} = 0,48\overset{\frown}{3} = (48,3\%)$.

(d) $p(B) = \dfrac{\text{Alumnas}}{\text{Total}} = \dfrac{155}{300} = \dfrac{31}{60} = 0,51\overset{\frown}{6} = (51,7\%)$.

(e) $p(A/C) = \dfrac{\text{Alumnos de Ciencias}}{\text{Total de alumnos de Ciencias}} = \dfrac{95}{180} = \dfrac{19}{36} = 52,\widehat{7} = (52,8\%)$.

(f) $p(B/C) = \dfrac{\text{Alumnas de Ciencias}}{\text{Total de alumnos de Ciencias}} = \dfrac{85}{180} = \dfrac{17}{36} = 47,\widehat{2} = (47,2\%)$.

(g) $p(H/A) = \dfrac{\text{Alumnos de Humanidades}}{\text{Total de alumnos}} = \dfrac{50}{145} = \dfrac{10}{29} = 34,5 = (34,5\%)$.

(h) $p(C/A) = \dfrac{\text{Alumnos de Ciencias}}{\text{Total de alumnos}} = \dfrac{95}{145} = \dfrac{19}{29} = 65,5 = (65,5\%)$.

❄❄❄❁❁✪❁❁❄❄❄

Resuelve tú (Pág ❸❻❸)

De una baraja de 40 cartas se extraen dos naipes sucesivamente sin reemplazamiento. Halla la probabilidad de extraer:

(a) Dos copas.
(b) 1.° un as y 2.° rey, por ese orden.
(c) Un as y un rey, en cualquier orden.
(d) Dos sotas.

Calcula las mismas probabilidades si las cartas se extraen sucesivamente con reemplazamiento.

❄❄❄❁❁✪❁❁❄❄❄

Sin reemplazamiento

(a) p(Dos copas) = p(1ª carta de copas y 2ª de copas habiendo sido copas la 1ª) = $p(C_1 \cap C_2) = p(C_1) \cdot p(C_2/C_1) = \dfrac{10 \text{ copas}}{40 \text{ cartas}} \cdot \dfrac{9 \text{ copas que quedan}}{39 \text{ cartas que quedan}} = \dfrac{9}{156} = \dfrac{3}{52} \approx 0{,}058 = (5{,}8\%)$, ya que al sacar la primera carta de copas quedan 39 cartas de las cuales son copas 9.

(b) p(1º As y 2º Rey) = $p(A_1 \cap R_2) = p(A_1) \cdot p(R_2/A_1) = \dfrac{4}{40} \cdot \dfrac{4}{39} = \dfrac{2}{195} \approx 0{,}01 = (1\%)$ ya que si la primera carta sacada es un As, quedan 39 entre las que hay 4 reyes.

(c) p(Un as y un rey en cualquier orden) = $p((A_1 \cap R_2) \cup (R_1 \cap A_2)) = p(A_1 \cap R_2) + p(R_1 \cap A_2) = p(A_1) \cdot p(R_2/A_1) + p(R_1) \cdot p(A_2/R_1) = \dfrac{4}{40} \cdot \dfrac{4}{39} + \dfrac{4}{40} \cdot \dfrac{4}{39} = \dfrac{4}{195} \approx 0{,}021 = (2{,}1\%)$.

(c) p(sotas) = $p(S_1 \cap S_2) = p(S_1) \cdot p(S_2/S_1) = \dfrac{4}{40} \cdot \dfrac{3}{39} = \dfrac{1}{130} \approx 0{,}008 = (0{,}8\%)$.

Con reemplazamiento

Si la primera carta que se saca se vuelve a devolver a la baraja, la situación es la inicial, es decir la primera extracción NO CONDICIONA a la segunda.

(a) p(Dos copas) = $p(C_1 \cap C_2) = p(C_1) \cdot p(C_2) = \frac{10}{40} \cdot \frac{10}{40} = \frac{1}{16} = 0{,}0625 = (6{,}25\%)$.

(b) p(1º As y 2º Rey) = $p(A_1 \cap R_2) = p(A_1) \cdot p(R_2) = \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{40} = \frac{1}{100} = 0{,}01 = (1\%)$.

(c) p(Un as y un rey en cualquier orden) = $p((A_1 \cap R_2) \cup (R_1 \cap A_2)) = p(A_1 \cap R_2) + p(R_1 \cap A_2)$ $= p(A_1) \cdot p(R_2) + p(R_1) \cdot p(A_2) = \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{40} + \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{40} = \frac{1}{50} = 0{,}02 = (2\%)$.

(c) p(sotas) = $p(S_1 \cap S_2) = p(S_1) \cdot p(S_2) = \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{40} = \frac{1}{100} = 0{,}01 = (1\%)$.

❄❄❄❁❁✪❁❁❄❄❄

Resuelve tú (Pág ❸❻❹)

En un distrito universitario los estudiantes se distribuyen del siguiente modo: 25 % Letras, 35 % Ciencias e Ingeniería y 40 % Ciencias Sociales o de la Salud. El porcentaje de alumnos que finalizan sus estudios es del 70, 40 y 60 % respectivamente. Si seleccionamos un alumno al azar, ¿cuál será la probabilidad de que termine sus estudios?

❄❄❄❁❁✪❁❁❄❄❄

Es el típico ejercicio de probabilidad total.

Sean:

L = suceso consistente en seleccionar un alumno de Letras.

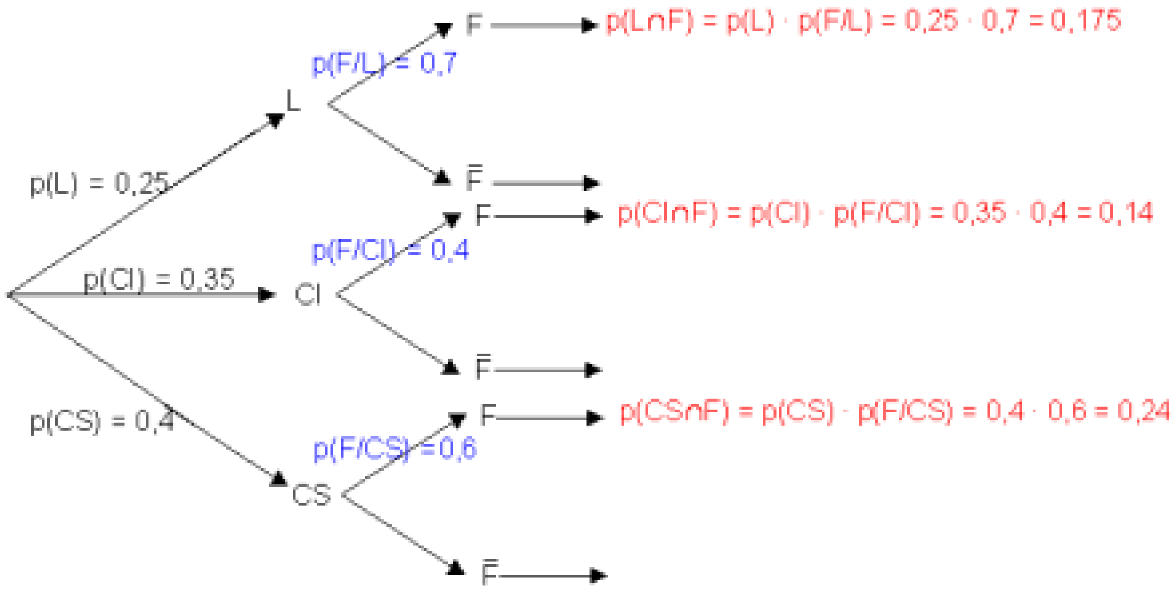
CI = suceso consistente en seleccionar un alumno de Ciencias e Ingeniería.

CS = suceso consistente en seleccionar un alumno de Ciencias Sociales.

F = suceso consistente en que un alumno finalice sus estudios.

F^C = suceso contrario del anterior, no finaliza sus estudios.

Confeccionemos el diagrama en árbol que nos ayudará a entender el problema:



p(F) = p(Finalizar) = p(termine un alumno de Letras ó un alumno de Ciencias e Ingeniería ó de Ciencias Sociales) = p((L∩F)∪ (CI∩F)∪(CS∩F)) = p(L∩F) + p(CI∩F) + p(CS∩F) = p(L) · p(F/L) + p(CI) · p(F/CI) + p(CS) · p(F/CS) = 0,175 + 0,14 + 0,24 = 0,555 (55,5 %)

❈❈❈❁❁✪❁❁❈❈❈

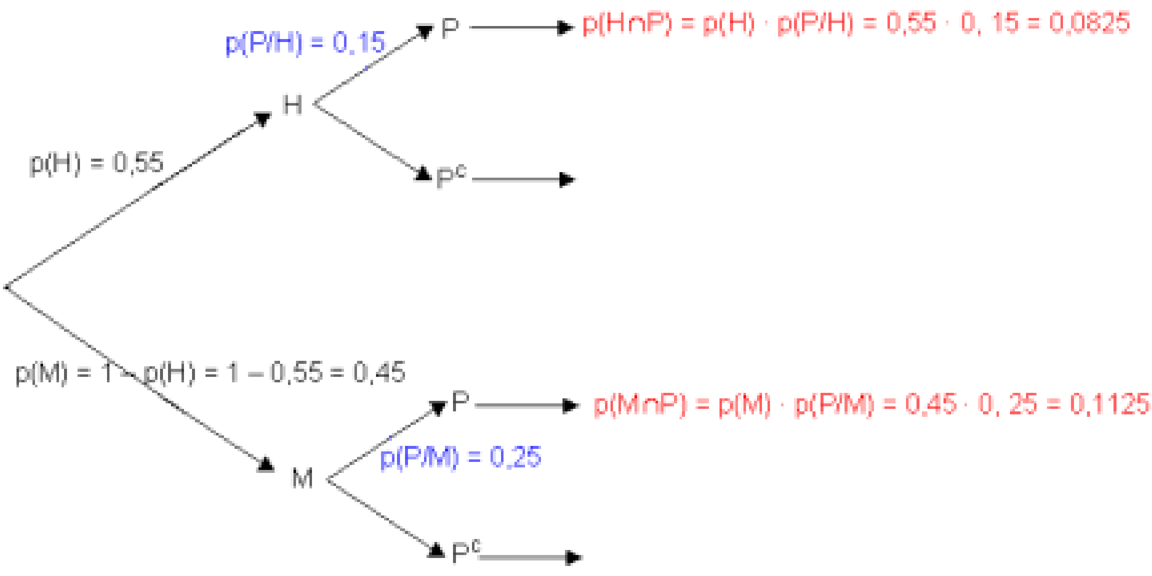
Resuelve tú (Pág ❸❻❻)

Para el Ejercicio de aplicación 5, confecciona un diagrama similar al anterior. En una ciudad el 55 % de la población son hombres, de ellos, un 15 % está en paro. Entre las mujeres el porcentaje de paro es del 25 %. Siendo H = hombre, M = mujer, P = parado, vuelve a calcular:

(a) p(P) **(b)** p(M/P) **(c)** p(H/P)

❈❈❈❁❁✪❁❁❈❈❈

(a)



$p(P) = p(H\cap P) + p(M\cap P) = p(H) \cdot p(P/H) + p(M) \cdot p(P/M) = 0{,}55 \cdot 0{,}15 + 0{,}45 \cdot 0{,}25 = 0{,}0825 + 0{,}1125 = 0{,}195$.

(b) Es una típica aplicación del teorema de Bayes.

$$p(M/P) = \frac{p(M\cap P)}{p(P)} = \frac{p(M)\cdot p(P/M)}{p(M)\cdot p(P/M)+p(H)\cdot p(P/H)} = \frac{0{,}1125}{0{,}195} = 0{,}58$$

(c) Aplicamos de nuevo el teorema de Bayes:

$$p(H/P) = \frac{p(H\cap P)}{p(P)} = \frac{p(H)\cdot p(P/H)}{p(M)\cdot p(P/M)+p(H)\cdot p(P/H)} = \frac{0{,}0825}{0{,}195} = 0{,}42 = 1 - p(M/P)$$

❈❈❈❁❁✪❁❁❈❈❈

PROBLEMAS PROPUESTOS

1 Si se lanzan tres monedas al aire, halla las probabilidades de obtener:

(a) Sólo una cruz.
(b) Al menos una cruz.
(c) Exactamente dos cruces.

❈❈❈❁❁✪❁❁❈❈❈

Cara = C, Cruz = X p(C) = ½ y p(X) = ½.

(a) p(sólo una cruz) = p(cruz la 1ª ó cruz la 2ª ó cruz la 3ª) = $p((X_1\cap C_2\cap C_3)\cup(C_1\cap X_2\cap C_3)\cup (C_1\cap C_2\cap X_3)) = p(X_1\cap C_2\cap C_3) + p(C_1\cap X_2\cap C_3) + p(C_1\cap C_2\cap X_3)$ = { ya que son independientes } = $p(X_1) \cdot p(C_2) \cdot p(C_3) + p(C_1) \cdot p(X_2) \cdot p(C_3) + p(C_1) \cdot p(C_2) \cdot p(X_3)$ $= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 3\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}$.

(b) p(al menos una cruz) = 1 – p(ninguna cruz) = $1 - p(C_1\cap C_2\cap C_3) = 1 - [p(C_1) \cdot p(C_2) \cdot p(C_3)] = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.

(c) p(exactamente 2 cruces) = $p[(X_1\cap X_2\cap C_3)\cup (C_1\cap X_2\cap X_3)\cup(X_1\cap C_2\cap X_3)] = p(X_1\cap X_2\cap C_3) + p(C_1\cap X_2\cap X_3) + p(X_1\cap C_2\cap X_3) = 3\,(1/2)^3 = 3/8$.

❈❈❈❁❁✪❁❁❈❈❈

2 Se ha trucado una moneda de modo que la probabilidad de obtener cara es la mitad que la de obtener cruz.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener cara?
(b) Si se tira tres veces, ¿cuál es la probabilidad de obtener al menos una cara?

❈❈❈❁❁✪❁❁❈❈❈

(a) Como al lanzar una moneda sólo son posibles dos casos, p(cara) + p(cruz) = 1, luego x/2 + x = 1, 3x/2 = 1, x = p(cruz = X) = 2/3, luego p(cara = C) = 1/3.

(b) p(al menos una cara) = 1 – p(no sacar ninguna cara) = 1 - $p(X_1 \cap X_2 \cap X_3)$ =

$$= 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}$$

❈❈❈❁❁✪❁❁❈❈❈

3 En un dado cargado, la probabilidad de obtener cada cara es proporcional a la puntuación de dicha cara. Halla la probabilidad de obtener 6.

❈❈❈❁❁✪❁❁❈❈❈

Si llamamos k a la constante de proporcionalidad, las probabilidades son:

Probabilidad de que salga 1 = p(1) = k·1 = k.
Probabilidad de que salga 2 = p(2) = k·2 = 2k.
Probabilidad de que salga 3 = p(3) = k·3 = 3k.
Probabilidad de que salga 4 = p(4) = k·4 = 4k.
Probabilidad de que salga 5 = p(5) = k·5 = 5k.
Probabilidad de que salga 6 = p(6) = k·6 = 6k.

Si aplicamos el segundo axioma de la probabilidad:

p(E) = 1, p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6) = 1; k + 2k + 3k + 4k + 5k + 6k = 1; 21k=1, luego

k = 1/21, luego las probabilidades son:

Probabilidad de que salga 1 = p(1) = k·1 = k = 1/21.
Probabilidad de que salga 2 = p(2) = k·2 = 2k = 2/21.
Probabilidad de que salga 3 = p(3) = k·3 = 3k = 3/21 = 1/7.
Probabilidad de que salga 4 = p(4) = k·4 = 4k = 4/21.
Probabilidad de que salga 5 = p(5) = k·5 = 5k = 5/21.
Probabilidad de que salga 6 = p(6) = k·6 = 6k = 6/21 = 3/21.

❈❈❈❁❁✪❁❁❈❈❈

4 Se lanzan tres dados con las caras numeradas del 1 al 6. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de resultados sea:

(a) 3 **(b)** 18 **(c)** 9 **(d)** 10

❄❄❄❁❁✪❁❁❄❄❄

Suponemos el lanzamiento consecutivo, de manera que pueden distinguirse las mismas puntuaciones en orden diferente.

(a) Para que la suma de las puntuaciones de las caras superiores sea 3, deben de salir (1, 1, 1), uno en los tres lados.

$$p(S=3) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}} = \frac{1}{V^R_{6,3}} = \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}$$

(b) Caso en que la suma sea 18: (6, 6, 6)

$$p(S = 18) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}} = \frac{1}{V^R_{6,3}} = \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}$$

(c) Casos en que la suma es 9:

(1, 2, 6), (1, 3, 5), (1, 4, 4), (1, 5, 3), (1, 6, 2)
(2, 1, 6), (2, 2, 5), (2, 3, 4), (2, 4, 3), (2, 5, 2), (2, 6, 1)
(3, 1, 5), (3, 2, 4), (3, 3, 3), (3, 4, 2), (3, 5, 1)
(4, 1, 4), (4, 2, 3), (4, 3, 2), (4, 4, 1)
(5, 1, 3), (5, 2, 2), (5, 3, 1)
(6, 1, 2), (6, 2, 1)

$$p(S=9) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}} = \frac{25}{V^R_{6,3}} = \frac{25}{6^3} = \frac{25}{216}$$

(d) Casos en que la suma es 10:

(1, 3, 6), (1, 4, 5), (1, 5, 4), (1, 6, 3)
(2, 2, 6), (2, 3, 5), (2, 4, 4), (2, 5, 3), (2, 6, 2)
(3, 1, 6), (3, 2, 5), (3, 3, 4), (3, 4, 3), (3, 5, 2), (3, 6, 1)
(4, 1, 5), (4, 2, 4), (4, 3, 3), (4, 4, 2), (4, 5, 1)
(5, 1, 4), (5, 2, 3), (5, 3, 2), (5, 4, 1)
(6, 1, 3), (6, 2, 2), (6, 3, 1)

$$p(S = 10) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}} = \frac{27}{V^R_{6,3}} = \frac{27}{6^3} = \frac{27}{216} = \frac{1}{8}$$

❄❄❄❁❁✪❁❁❄❄❄

5 En una bolsa hay 10 bolas numeradas del 1 al 10. Si se extraen dos bolas a la vez, ¿cuál es la probabilidad de que la suma de los números sea 11?

❄ ❄ ❄ ❁ ❁ ✪ ❁ ❁ ❄ ❄ ❄

Hacemos una tabla teniendo en cuenta que al realizarse una extracción simultánea no pueden darse dos bolas repetidas y que son indistinguibles los resultados simétricos del tipo (a, b) y (b, a)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)	(1, 7)	(1, 8)	(1, 9)	(1, 10)
2			(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)	(2, 7)	(2, 8)	(2, 9)	(2, 10)
3				(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)	(3, 7)	(3, 8)	(3, 9)	(3, 10)
4					(3, 5)	(3, 6)	(3, 7)	(3, 8)	(3, 9)	(3, 10)
5						(5, 6)	(5, 7)	(5, 8)	(5, 9)	(5, 10)
6							(6, 7)	(6, 8)	(6, 9)	(6, 10)
7								(7, 8)	(7, 9)	(7, 10)
8									(8, 9)	(8, 10)
9										(9, 10)
10										

Casos favorables (en violeta): (1, 10), (2, 9), (3, 8), (4, 7), (5, 6).

Casos posibles = $\frac{V_{10,2}}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2} = \frac{90}{2} = 45$

$$p(\text{ Suma } 11) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles o totales}} = \frac{5}{45} = \frac{1}{9}$$

❄ ❄ ❄ ❁ ❁ ✪ ❁ ❁ ❄ ❄ ❄

6 Una familia de seis miembros, los padres y cuatro hijos, se sienta aleatoriamente en una mesa circular. ¿Cuál es la probabilidad de que los padres estén sentados uno junto a otro?

❄ ❄ ❄ ❁ ❁ ✪ ❁ ❁ ❄ ❄ ❄

Casos favorables : Los padres se sientan juntos y los 4 hijos se permutan a su lado
Casos posibles o totales: Las permutaciones circulares de 6 elementos

$$p = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles o totales}} = \frac{1 \cdot P_4}{P_6^C} = \frac{4!}{5!} = \frac{4!}{5 \cdot 4!} = \frac{1}{5}$$

❄ ❄ ❄ ❁ ❁ ✪ ❁ ❁ ❄ ❄ ❄

7 De una baraja de 40 naipes se extraen dos cartas sin reemplazamiento. Calcula la probabilidad de que:

(a) Sean del mismo palo.

(b) A1 menos una sea figura.

(c) Ninguna sea figura.

❄❄❄❁❁✪❁❁❄❄❄

Extracción sin reemplazamiento.

(a) P_i = Suceso consistente en sacar una copa del palo P (Oros, Copas, Espadas o Bastos) en el lugar i (1 ó 2).

p(mismo palo) = p(2 Oros ó 2 Copas ó 2 Espadas ó 2 Bastos) = $p[(O_1\cap O_2)\cup(C_1\cap C_2)\cup(E_1\cap E_2)\cup(B_1\cap B_2)] \stackrel{(1)}{=} p(O_1\cap O_2) + p(C_1\cap C_2) + p(E_1\cap E_2) + p(B_1\cap B_2) = p(O_1)\cdot p(O_2/O_1) + p(C_1)\cdot p(C_2/C_1) + p(E_1)\cdot p(E_2/E_1) + p(B_1)\cdot p(B_2/B_1) \stackrel{(2)}{=} \frac{10}{40}\cdot\frac{9}{39}+\frac{10}{40}\cdot\frac{9}{39}+\frac{10}{40}\cdot\frac{9}{39}+\frac{10}{40}\cdot\frac{9}{39} = 4\frac{10}{40}\cdot\frac{9}{39} = \frac{3}{13}$

---

(1) *Ya que los sucesos ($O_1\cap O_2$), ($C_1\cap C_2$), etc. son incompatibles.*
(2) *Ya que si se ha extraído una carta de una palo determinado, al ser sin reemplazamiento, quedan 39 de las cuales 9 son del palo de la extraída en primer lugar.*

(b) F = Figuras: Rey, Caballo, Sota.

◊ p(al menos una figura) = p(1 figura ó 2 figuras) = $p\left[\left(F_1\cap F_2^C\right)\cup\left(F_1^C\cap F_2\right)\cup\left(F_1\cap F_2\right)\right]\stackrel{(1)}{=}$

$$= p\left(F_1\cap F_2^C\right)+p\left(F_1^C\cap F_2\right)+p\left(F_1\cap F_2\right) = p(F_1)\cdot p\left(F_2^C/F_1\right)+p(F_1^C)\cdot p\left(F_2/F_1^C\right)+p(F_1)\cdot p(F_2/F_1)\stackrel{(2)}{=}$$

$$= \frac{12}{40}\cdot\frac{28}{39}+\frac{28}{40}\cdot\frac{12}{39}+\frac{12}{40}\cdot\frac{11}{39} = \frac{2\cdot 12\cdot 28+12\cdot 11}{40\cdot 39} = \frac{804}{1560} = \frac{67}{130}$$

◊ También puede usarse el complementario:

p(al menos una figura) =1 - p(ninguna figura) = 1 - $p\left[\left(F_1^C\cap F_2^C\right)\right] = 1-p\left(F_1^C\right)p\left(F_2^C/F_1^C\right)\stackrel{(2)}{=}$

$$= 1-\frac{28}{40}\cdot\frac{27}{39} = \frac{40\cdot 39-28\cdot 27}{40\cdot 39} = \frac{804}{1560} = \frac{67}{130}$$

---

(1) *Ya que los sucesos son incompatibles.*
(2) *Ya que si se ha extraído una carta y es figura (F) o no figura (F^C), al ser sin reemplazamiento, quedan 39 de las cuales una menos son del tipo de la extraída en primer lugar.*

(c) Lo hemos resuelto en la segunda parte del apartado anterior:

$$\text{p(ninguna figura)} = p\left[\left(F_1^C\cap F_2^C\right)\right] = p\left(F_1^C\right)p\left(F_2^C/F_1^C\right) = \frac{28}{40}\cdot\frac{27}{39} = \frac{28\cdot 27}{40\cdot 39} = \frac{756}{1560} = \frac{63}{130}$$

❄❄❄❁❁✪❁❁❄❄❄

8 Sean A, B y C tres sucesos independientes tales que p(A) = 0,5; p(B) = 0,6; p(C) = 0,7. Halla:

(a) $p(A \cup B)$ **(b)** $p(A \cup C)$ **(c)** $p(B \cup C)$ **(d)** $p(A \cup B \cup C)$

❄❄❄❁❁✪❁❁❄❄❄

(a) $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B) = p(A) + p(B) - p(A)\cdot p(B/A) = p(A) + p(B) - p(A)\cdot p(B) = 0,5 + 0,6 - 0,5 \cdot 0,6 = 0,8$, ya que al ser independientes $p(A\cap B) = p(A)\cdot p(B/A) = p(A)\cdot p(B)$.

(b) $p(A\cup C) = p(A) + p(C) - p(A\cap C) = p(A) + p(C) - p(A)\cdot p(C/A) = p(A) + p(C) - p(A)\cdot p(C) = 0,5 + 0,7 - 0,5 \cdot 0,7 = 0,85$, ya que al ser independientes $p(A\cap C) = p(A)\cdot p(C/A) = p(A)\cdot p(C)$.

(c) $p(B\cup C) = p(B) + p(C) - p(B\cap C) = p(B) + p(C) - p(B)\cdot p(C/B) = p(B) + p(C) - p(B)\cdot p(C) = 0,6 + 0,7 - 0,6 \cdot 0,7 = 0,88$, ya que al ser independientes $p(B\cap C) = p(B)\cdot p(C/B) = p(B)\cdot p(C)$.

(d) $p(A\cup B\cup C) = p((A\cup B)\cup C) = p(A\cup B) + p(C) - p((A\cup B)\cap C) = p(A) + p(B) - p(A\cap B) + p(C) - p(A\cap C) - p(B\cap C) + p(A\cap B\cap C) = p(A) + p(B) - p(A) \cdot p(B) + p(C) - p(A)\cdot p(C) - p(B)\cdot p(C) + p(A)\cdot p(B)\cdot p(C) = 0,5 + 0,6 + 0,7 - 0,5\cdot 0,6 - 0,5 \cdot 0,7 - 0,6\cdot 0,7 + 0,5\cdot 0,6\cdot 0,7 = 0,98$, ya que al ser independientes $p(A\cap B) = p(A)\cdot p(B/A) = p(A)\cdot p(B)$, $p(A\cap C) = p(A)\cdot p(C/A) = p(A)\cdot p(C)$, $p(B\cap C) = p(B)\cdot p(C/B) = p(B)\cdot p(C)$ y $p(A\cap B\cap C) = p(A)\cdot p(B/A) \cdot p(C/(A\cap B)) = p(A)\cdot p(B)\cdot p(C)$.

❄❄❄❁❁✪❁❁❄❄❄

9 Sean A y B sucesos tales que p(A) = 1/2, p(B) = 3/5 . ¿Cuánto debe valer $p(A \cup B)$ para que A y B sean independientes.

❄❄❄❁❁✪❁❁❄❄❄

Si A y B han de ser independientes p(B/A) = p(B) y aque A no condiciona a A, luego, $p(A\cap B) = p(A) \cdot p(B/A) = p(A) \cdot p(B) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5} = \frac{3}{10} = 0,3$ y por tanto :

$$P(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B) = \frac{1}{2}+\frac{3}{5}-\frac{3}{10} = \frac{5+6-3}{10} = \frac{8}{10} = 0,8\ (80\%)$$

❄❄❄❁❁✪❁❁❄❄❄

10 Sean A y B dos sucesos con p(A) = 0,6, p(B) = 0,5 y $p(A\cap B) = 0,3$. Calcula las probabilidades

(a) $p(A/B)$ **(b)** $p(B/A)$ **(c)** $p(A/B^C)$ **(d)** $p(A/A\cap B)$

❄❄❄❁❁✪❁❁❄❄❄

(a) $p(A/B) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)} = \frac{0,3}{0,5} = \frac{3}{5} = 0,6\ (60\%)$

(b) $p(B/A)=\dfrac{p(B\cap A)}{p(A)}=\dfrac{p(A\cap B)}{p(A)}=\dfrac{0{,}3}{0{,}6}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}=0{,}5\ (50\%)$

(c) $p(A/B^C)=\dfrac{p(A\cap B^C)}{p(B^C)}=\dfrac{p(A-B)}{1-p(B)}=\dfrac{p(A)-p(A\cap B)}{1-p(B)}=\dfrac{0{,}6-0{,}3}{1-0{,}5}=\dfrac{0{,}3}{0{,}5}=\dfrac{3}{5}=0{,}6\ (60\%)$

(d) $p(A/A\cap B)=\dfrac{p(A\cap A\cap B)}{p(A\cap B)}=\dfrac{p(A\cap B)}{p(A\cap B)}=1$

❉❉❉❁❁✪❁❁❉❉❉

1 1 Un examen de tipo test presenta tres opciones por pregunta, de las cuales sólo una es verdadera. Si se contesta al azar:

(a) ¿Qué probabilidad hay de acertar cada pregunta?
(b) ¿Cómo habría que penar las respuestas falsas para que la puntuación final sea justa?

❉❉❉❁❁✪❁❁❉❉❉

(a) $p(\text{acertar})=\dfrac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}}=\dfrac{1}{3}$.

(b) La esperanza matemática ha de ser nula. Si asignamos 3 puntos a la respuesta correcta y x a cada incorrecta:

$\mu=3\cdot p(\text{acertar})+x\cdot(\text{no acertar})\Leftrightarrow 0=3\cdot\dfrac{1}{3}+x\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{3+2x}{3}\Leftrightarrow x=-\dfrac{3}{2}=-1{,}5$ es decir hay que penar el error con la mitad de la puntuación que se asigne a acertar.

❉❉❉❁❁✪❁❁❉❉❉

1 2 A 1.000 personas elegidas al azar se les preguntó en una encuesta confidencial: 1. ¿Es usted drogadicto?; 2. ¿Es usted seropositivo? Los resultados fueron: drogadictos, 40; seropositivos, 12; drogadictos y seropositivos, 9. Con estos datos, ¿son independientes los sucesos «ser drogadicto» y «ser seropositivo»?

❉❉❉❁❁✪❁❁❉❉❉

A partir de los datos, tenemos, llamando D = ser drogadicto y S = ser seropositivo :

$$P(D)=\frac{40}{1000}=0{,}04,\quad p(S)=\frac{12}{1000}=0{,}012,\quad p(D\cap S)=\frac{9}{1000}=0{,}009$$

Para que D y S sean independientes ha de cumplir se que $p(D)\cdot p(S)=p(D\cap S)$, veamos si es así:

$p(D) \cdot p(S) = 0{,}04 \cdot 0{,}012 = 0{,}00048 \neq 0{,}009 = p(D \cap S)$, luego NO son independientes.

❉❉❉❁❁✪❁❁❉❉❉

1 3 De una jaula que contiene 3 ratas blancas (B) y 5 negras (N), extraemos sucesivamente tres ratas al azar. Halla las probabilidades de los sucesos:

(a) Las 3 ratas son blancas.
(b) 1 es blanca y 2 son negras.

En cada caso distingue cuando las extracciones se hacen sin reemplazamiento o con reemplazamiento.

❉❉❉❁❁✪❁❁❉❉❉

Con reemplazamiento

(a)

$p(\text{3 blancas}) = p(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = p(B_1) \cdot p(B_2/B_1) \cdot p(B_3/B_1 \cap B_2) = p(B_1) \cdot p(B_2) \cdot p(B_3) = \left(\frac{3}{8}\right)^3 = \frac{27}{512}$

ya que al volverse a introducir la bola extraída la composición de la jaula es siempre la misma, la inicial, en donde hay 3 bolas blancas de un total de 8.

(b)

$p(\text{1B y 2N}) = p((B_1 \cap N_2 \cap N_3) \cup (N_1 \cap B_2 \cap N_3) \cup (N_1 \cap N_2 \cap B_3)) = p(B_1 \cap N_2 \cap N_3) + p(N_1 \cap B_2 \cap N_3) + p(N_1 \cap N_2 \cap B_3) = p(B_1) \cdot p(N_2/B_1) \cdot p(N_3/B_1 \cap N_2) + p(N_1) \cdot p(B_2/N_1) \cdot p(N_3/N_1 \cap B_2) + p(N_1) \cdot p(N_2/N_1) \cdot p(B_3/N_1 \cap N_2) = p(B_1) \cdot p(N_2) \cdot p(N_3) + p(\mathbf{N}_1) \cdot p(B_2) \cdot p(N_3) + p(N_1) \cdot p(N_2) \cdot p(B_3) =$

$$\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{5}{8}+\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{8}+\frac{5}{8}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{8}=3\frac{3\cdot 5\cdot 5}{8^3}=\frac{225}{512}$$

Sin reemplazamiento

(a)

$p(\text{3 blancas}) = p(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = p(B_1) \cdot p(B_2/B_1) \cdot p(B_3/B_1 \cap B_2) = \frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{56}$ ya que al no volverse a introducir la bola extraída la composición de la jaula va disminuyendo en una bola blanca.

(b)

$p(\text{1B y 2N}) = p((B_1 \cap N_2 \cap N_3) \cup (N_1 \cap B_2 \cap N_3) \cup (N_1 \cap N_2 \cap B_3)) = p(B_1 \cap N_2 \cap N_3) + p(N_1 \cap B_2 \cap N_3) + p(N_1 \cap N_2 \cap B_3) = p(B_1) \cdot p(N_2/B_1) \cdot p(N_3/B_1 \cap N_2) + p(N_1) \cdot p(B_2/N_1) \cdot p(N_3/N_1 \cap B_2) + p(N_1) \cdot p(N_2/N_1) \cdot p(B_3/N_1 \cap N_2) = \frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{6}+\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6}+\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}=3\frac{3\cdot 4\cdot 5}{8\cdot 7\cdot 6}=\frac{15}{28}$

❉❉❉❁❁✪❁❁❉❉❉

1 4 El departamento de hacienda de un ayuntamiento supervisa el pago de impuestos de tres edificios A, B y C, con un total de 125 pisos. Un año, la relación de pisos con la contribución pagada y no pagada fue:

Edificio	A	B	C
Pagadas(P)	20	30	35
No pagadas (P^C)	10	18	12

Halla la probabilidad de que un piso, elegido al azar:

(a) Sea del edificio A, p(A)
(b) Haya pagado la contribución, p(P)
(c) Haya pagado la contribución si es del edificio B, p(P/B)
(d) Haya pagado la contribución y sea del edificio C, p(C ∩ P)

❄❄❄❁❁✪❁❁❄❄❄

Primero añadimos a la tabla los la fila y columna de los totales o sumas:

Edificio	A	B	C	Total
Pagadas(P)	20	30	35	85
No pagadas (P^C)	10	18	12	40
Total	30	48	47	125

(a) $p(A) = \dfrac{\text{Nº de pisos en el edificio A}}{\text{Nº total de pisos}} = \dfrac{30}{125} = \dfrac{6}{25} = 0{,}24\ (24\%)$.

(b) $p(P) = \dfrac{\text{Nº de pisos que han pagado}}{\text{Nº total de pisos}} = \dfrac{85}{125} = \dfrac{17}{25} = 0{,}68\ (68\%)$.

(c) $p(P/B) = \dfrac{p(P\cap B)}{p(B)} = \dfrac{30/125}{48/125} = \dfrac{30}{48} = \dfrac{\text{Nº de edificios de B que han pagado}}{\text{Nº de edificios de B}} = \dfrac{5}{8} = 0{,}625\ (62{,}5\%)$

(d) $p(C\cap P) = p(C) \cdot P(P/C) = \dfrac{47}{125}\cdot\dfrac{35}{47} = \dfrac{35}{125} = \dfrac{\text{Los pisos de C que han pagado}}{\text{Pisos totales}} = \dfrac{7}{25} = 0{,}28$ (28%).

❄❄❄❁❁✪❁❁❄❄❄

1 5 En una clase, el 50 % de los alumnos ha aprobado Literatura mientras que el 60 % aprobó Matemáticas. Además, la probabilidad de aprobar Literatura habiendo aprobado Matemáticas es 0,8.

(a) ¿Qué porcentaje de alumnos suspendió ambas asignaturas?

(b) Calcula el porcentaje de alumnos que teniendo aprobada Literatura aprobó también las Matemáticas.

❈ ❈ ❈ ❁ ❁ ✪ ❁ ❁ ❈ ❈ ❈

p(aprobar Literatura) = p(L) = 0,5, p(aprobar Matemáticas) = p(M) = 0,6 y p(L/M) = 0,8

(a) p(suspender las dos) = $p(L^C \cap M^C) = p((L \cup M)^C) = 1 - p(L \cup M) = 1 - [p(L) + p(M) - p(L \cap M)] = 1 - [p(L) + p(M) - p(M) \cdot p(L/M)] = 1 - [0{,}5 + 0{,}6 - 0{,}6 \cdot 0{,}8] = 0{,}38$.

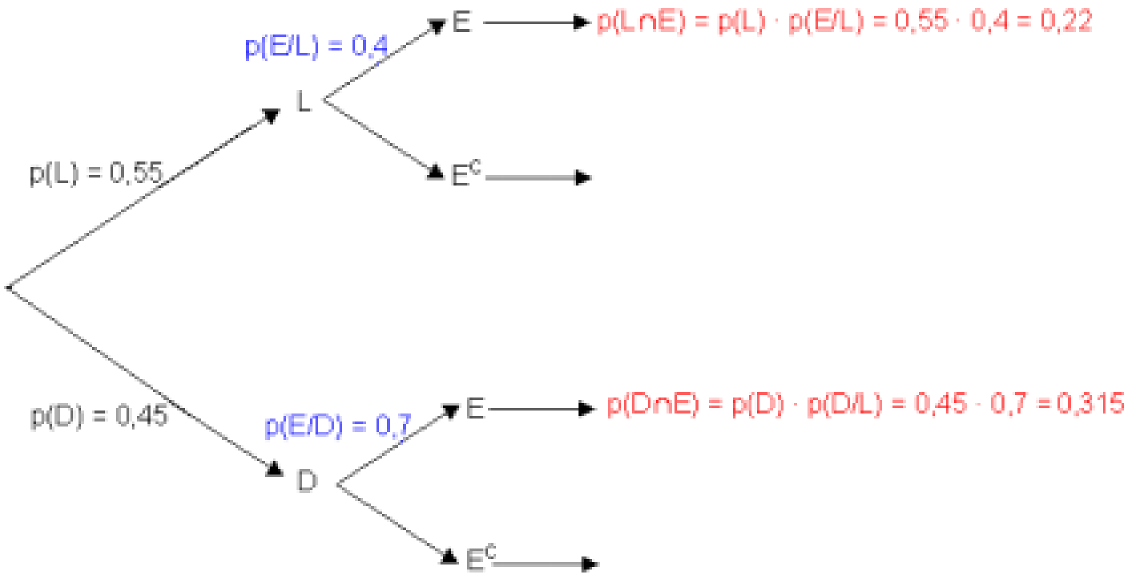
(b) p(aprobar M teniendo aprobada L) = $p(M/L) = \dfrac{p(M \cap L)}{p(L)} = \dfrac{p(M)p(L/M)}{p(L)} = \dfrac{0{,}6 \cdot 0{,}8}{0{,}5} = \dfrac{24}{25}$

❈ ❈ ❈ ❁ ❁ ✪ ❁ ❁ ❈ ❈ ❈

16 En una ciudad el 55 % de los votantes lo hacen por el Partido Liberal (L), y el 45 % votan al Partido Demócrata (D). Se sabe además que el 40 % de los liberales y el 70 % de los demócratas son ecologistas. ¿Cuál es la probabilidad de que un votante elegido al azar sea ecologista?

❈ ❈ ❈ ❁ ❁ ✪ ❁ ❁ ❈ ❈ ❈

Diagrama en árbol:



Aplicamos el teorema de la probabilidad total:

p (ecologista) = $p(E) = p(L \cap E) + p(D \cap E) = p(L) \cdot p(E/L) + p(D) \cdot p(D/L) = 0{,}55 \cdot 0{,}4 + 0{,}45 \cdot 0{,}7 = 0{,}22 + 0{,}315 = 0{,}535$.

❈ ❈ ❈ ❁ ❁ ✪ ❁ ❁ ❈ ❈ ❈

1 7 En una bolsa hay 8 bolas rojas y 2 blancas. Se extraen dos bolas sin reemplazamiento.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda sea blanca si la primera también lo fue?
(b) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera fuese blanca si se sabe que la segunda ha sido blanca?

❄❄❄❁❁✪❁❁❄❄❄

B_i = suceso consistente en sacar blanca en la extracción i.
R_i = suceso consistente en sacar roja en la extracción i.

(a) p (2ª B si 1ª B) = $p(B_2/B_1) = \dfrac{\text{Blancas que quedan después de sacar 1ª B}}{\text{Bolas que quedan despues de 1ª B}} = \dfrac{1}{9}$.

(b) Ahora hemos de aplicar el teorema de Bayes, es una probabilidad a posteriori:

$$p(1^aB \text{ si ha sido } 2^aB) = p(B_1/B_2) = \frac{p(B_1 \cap B_2)}{p(B_2)} = \frac{p(B_1)\cdot p(B_2/B_1)}{p(B_1)\cdot p(B_2/B_1) + p(R_1)\cdot p(B_2/R_1)} =$$

$$= \frac{\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{9}}{\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{9} + \frac{8}{10}\cdot\frac{7}{9}} = \frac{2/90}{58/90} = \frac{2}{58} = \frac{1}{29}$$

❄❄❄❁❁✪❁❁❄❄❄

1 8 Tres niños tienen dos canicas cada uno, una en cada mano (cerrada). Las canicas de uno son blancas, las de otro rojas y las del tercero una roja y una blanca. Un niño abre la mano y resulta bola roja, ¿cuál es la probabilidad de que en la otra mano tenga bola blanca?

❄❄❄❁❁✪❁❁❄❄❄

N_i = suceso consistente en elegir al niño i (i = 1, 2 ó 3)
B_i = suceso consistente en elegir la canica de color blanca la vez i (i = 1 ó 2)
B_i = suceso consistente en elegir la canica de color rojo la vez i (i = 1 ó 2)

$p(N_1) = \dfrac{1}{3} = p(N_2) = p(N_3)$ ya que elegimos un niño al azar de entre 3.

$P(B_1/N_1) = 1$, ya que el primer niño tiene las dos bolas blancas.

$P(R_1/N_2) = 1$, ya que el segundo niño tiene las dos bolas rojas.

$P(B_1/N_3) = 1/2$, ya que el tercer niño tiene las una bola de cada color.

$P(R_1/N_3) = 1/2$, ya que el tercer niño tiene las una bola de cada color.

$P(B_2/N_1 \cap B_1) = 1$, ya que el primer niño tiene las dos bolas blancas.

$P(R_2/N_2 \cap R_1) = 1$, ya que el segundo niño tiene las dos bolas rojas.

$P(R_2/N_3 \cap B_1) = 1$, ya que al tercer niño si la primera bola era B, la segunda ha de ser roja.

$P(B_2/N_3 \cap R_1) = 1$, ya que al tercer niño si la primera bola era R, la segunda ha de ser B.

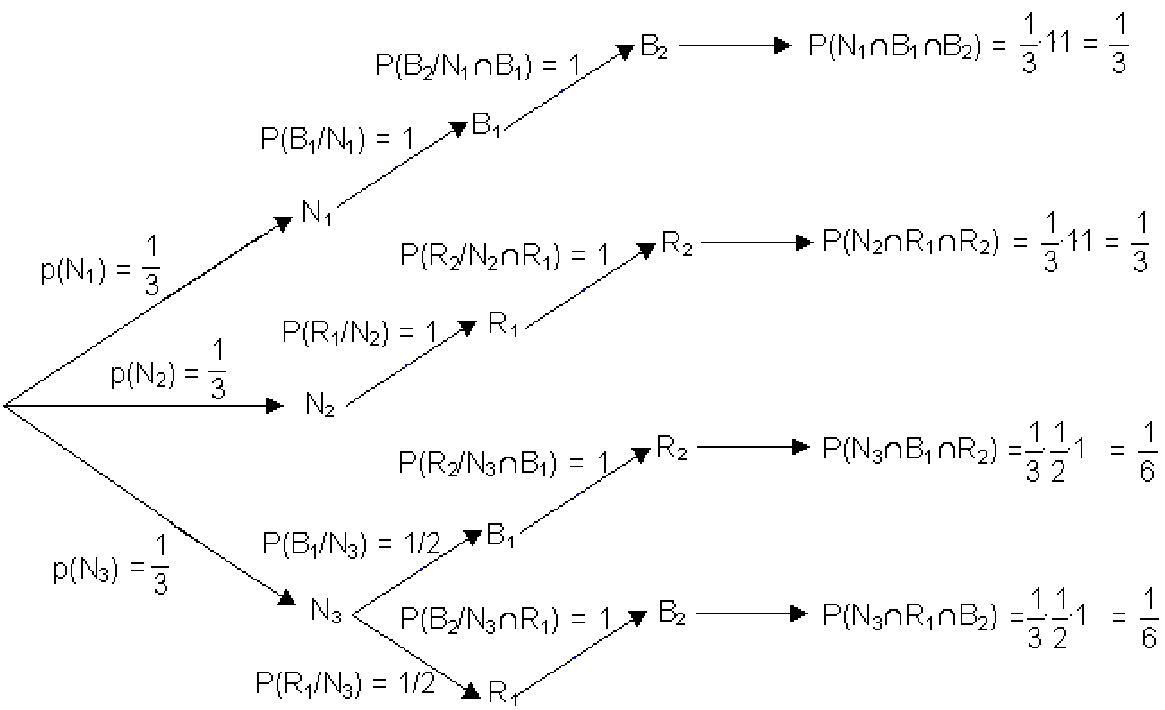
$P(N_1 \cap B_1 \cap B_2) = p(N_1) \cdot P(B_1/N_1) \cdot P(B_2/N_1 \cap B_1) = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{3}$

$P(N_2 \cap R_1 \cap R_2) = p(N_2) \cdot P(R_1/N_2) \cdot P(R_2/N_2 \cap R_1) = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{3}$

$P(N_3 \cap B_1 \cap R_2) = p(N_3) \cdot P(B_1/N_3) \cdot P(R_2/N_3 \cap B_1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{6}$

$P(N_3 \cap R_1 \cap B_2) = p(N_3) \cdot P(R_1/N_3) \cdot P(B_2/N_3 \cap R_1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{6}$

Confeccionamos el diagrama en árbol:



Se nos pide la probabilidad de B_2 si la primera ha sido R_1, es decir que probabilidad hay de elegir al niño tercero:

$$p(B_2/R_1) = \frac{p(N_3 \cap R_1 \cap B_2)}{p(N_3 \cap R_1 \cap B_2) + p(N_2 \cap R_1 \cap R_2)} = \frac{1/6}{\frac{1}{6} + \frac{1}{3}} = \frac{1/6}{3/6} = \frac{1}{3}$$

1 9 Una caja contiene un tetraedro, un cubo y un dodecaedro regulares; los tres poliedros con las caras numeradas del 1 al 4, del 1 al 6 y del 1 al 12, respectivamente. Se selecciona un poliedro al azar y se lanza al aire. Halla la probabilidad de que la cara de apoyo sea 1, 6 o 12.

❈❈❈❁❁✪❁❁❈❈❈

Como seleccionamos un poliedro al azar y son tres, la probabilidad de seleccionar uno de ellos es p(T) = p(C) = p(D) = 1/3.

p(sacar 1, 6 ó 12) = $p(1\cup 6\cup 12) = p(1) + p(6) + p(12) = p((T\cap 1)\cup(C\cap 1)\cup(D\cap 1)) + p((C\cap 6)\cup(D\cap 6)) + p(D\cap 12) = [p(T\cap 1) + p(C\cap 1) + p(D\cap 1)] + [p(C\cap 6) + p(D\cap 6)] + p(D\cap 12) = [\, p(T)\cdot p(1/T) + p(C)\cdot p(1/C) + p(D)\cdot p(1/D)\,] + [p(C)\cdot p(6/C) + p(D)\cdot p(6/D)] + p(D)\cdot p(12/D) =$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{12}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{12}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{12} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{10}{12} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

❈❈❈❁❁✪❁❁❈❈❈

2 0 Dos urnas [1] y [2], tienen las composiciones siguientes: [1] = {8 bolas blancas (B) y 5 bolas negras (N)} y [2]= {6B y 4N}. Se escoge una urna al azar y se extraen de ella dos bolas sin reemplazamiento. Halla la probabilidad de que:

(a) Las 2 bolas sean blancas.
(b) Cada bola sea de un color.

❈❈❈❁❁✪❁❁❈❈❈

Hacemos el diagrama en árbol:

p([1]) = p([2]) = ½, ya que se elige una urna al azar.

p(1ª blanca de la urna [1]) = $p(B_1/[1]) = 8/13$, ya que en [1] hay 13 bolas de las cuales 8 son B.
p(1ª negra de la urna [1]) = $p(N_1/[1]) = 5/13$, ya que en [1] hay 13 bolas de las cuales 5 son N.
p(1ª blanca de la urna [2]) = $p(B_1/[2]) = 6/10$, ya que en [2] hay 10 bolas de las cuales 6 son B.
p(1ª negra de la urna [2]) = $p(N_1/[2]) = 4/10$, ya que en [2] hay 10 bolas de las cuales 4 son N.

p(2ª blanca de la urna [1], siendo B_1) = $p(B_2/B_1\cap[1]) = 7/12$, ya que en [1] quedan 12 bolas de las cuales 7 son B, al ser sin reemplazamiento y haber sido B_1.
p(2ª negra de la urna [1], siendo B_1) = $p(N_2/B_1\cap[1]) = 5/12$, ya que en [1] quedan 12 bolas de las cuales 5 son N, al ser sin reemplazamiento y haber sido B_1.

p(2ª blanca de la urna [1], siendo N_1) = $p(B_2/N_1\cap[1]) = 8/12$, ya que en [1] quedan 12 bolas de las cuales 8 son B, al ser sin reemplazamiento y haber sacado N_1.
p(2ª negra de la urna [1], siendo N_1) = $p(N_2/N_1\cap[1]) = 4/12$, ya que en [1] quedan 12 bolas de las cuales 4 son N, al ser sin reemplazamiento y haber sacado N_1.

p(2ª blanca de la urna [2], siendo B_1) = $p(B_2/B_1\cap[2]) = 5/9$, ya que en [2] quedan 9 bolas de las cuales 5 son B, al ser sin reemplazamiento y haber sido B_1.

p(2ª negra de la urna [2], siendo B_1) = $p(N_2/B_1 \cap [2]) = 4/9$, ya que en [2] quedan 9 bolas de las cuales 4 son N, al ser sin reemplazamiento y haber sido B_1.
p(2ª blanca de la urna [2], siendo N_1) = $p(B_2/N_1 \cap [2]) = 6/9$, ya que en [2] quedan 9 bolas de las cuales 6 son B, al ser sin reemplazamiento y haber sacado N_1.
p(2ª negra de la urna [2], siendo N_1) = $p(N_2/N_1 \cap [2]) = 3/9$, ya que en [2] quedan 9 bolas de las cuales 3 son N, al ser sin reemplazamiento y haber sacado N_1.

Luego:

p(B_1 y B_2 de la urna [1]) = $p([1] \cap B_1 \cap B_2) = p([1]) \cdot p(B_1/[1]) \cdot p(B_2/[1] \cap B_1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{8}{13}\cdot\frac{7}{12}$

p(B_1 y N_2 de la urna [1]) = $p([1] \cap B_1 \cap N_2) = p([1]) \cdot p(B_1/[1]) \cdot p(N_2/[1] \cap B_1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{8}{13}\cdot\frac{5}{12}$

p(N_1 y B_2 de la urna [1]) = $p([1] \cap N_1 \cap B_2) = p([1]) \cdot p(N_1/[1]) \cdot p(B_2/[1] \cap N_1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{13}\cdot\frac{8}{12}$

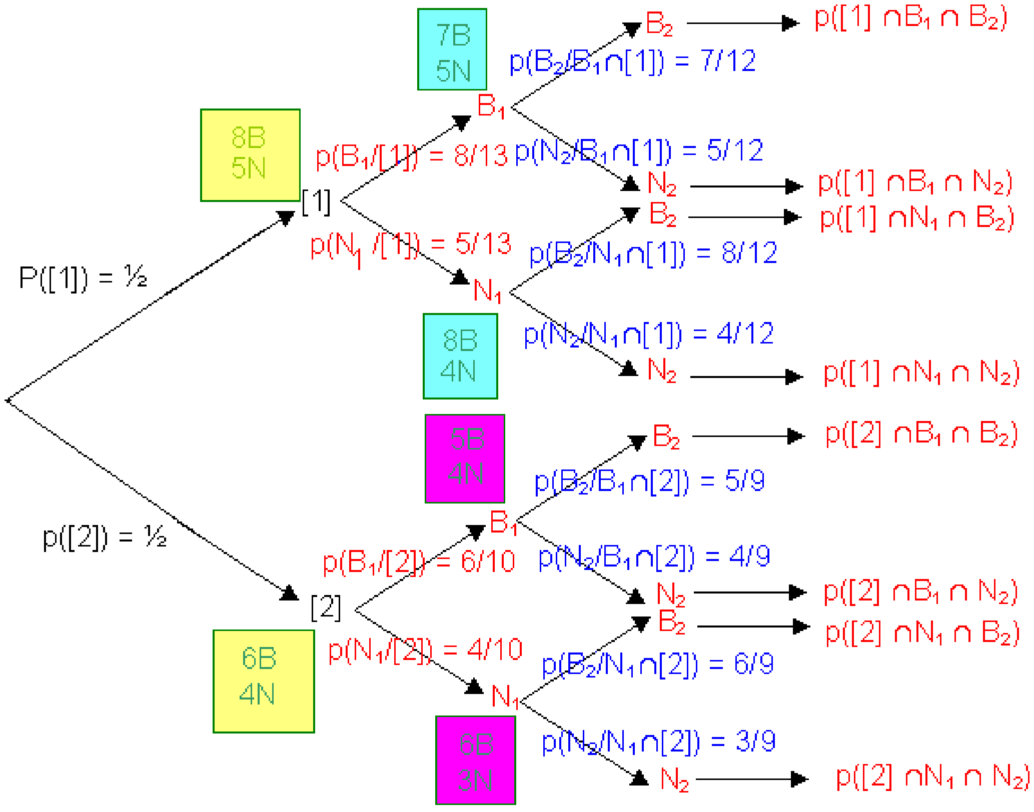
p(N_1 y N_2 de la urna [1]) = $p([1] \cap N_1 \cap N_2) = p([1]) \cdot p(N_1/[1]) \cdot p(N_2/[1] \cap N_1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{13}\cdot\frac{4}{12}$

p(B_1 y B_2 de la urna [2]) = $p([2] \cap B_1 \cap B_2) = p([2]) \cdot p(B_1/[2]) \cdot p(B_2/[2] \cap B_1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}$

p(B_1 y N_2 de la urna [2]) = $p([2] \cap B_1 \cap N_2) = p([2]) \cdot p(B_1/[2]) \cdot p(N_2/[2] \cap B_1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{4}{9}$

p(N_1 y B_2 de la urna [2]) = $p([2] \cap N_1 \cap B_2) = p([2]) \cdot p(N_1/[2]) \cdot p(B_2/[2] \cap N_1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{6}{9}$

p(N_1 y N_2 de la urna [2]) = $p([2] \cap N_1 \cap N_2) = p([2]) \cdot p(N_1/[2]) \cdot p(N_2/[2] \cap N_1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{5}{9}$



a)

p(dos blancas) = p (2 blancas de la urna [1] ó 2 blancas de la urna [2] = p([1] $\cap$ $B_1 \cap B_2$) + p([2] $\cap$ $B_1 \cap B_2$) = $\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{13}\cdot\frac{7}{12}+\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}=\frac{1}{2}\left(\frac{14}{39}+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{14+13}{39}=\frac{1}{2}\cdot\frac{27}{39}=\frac{9}{26}$

b)

p(cada bola de un color) = p(1ª blanca y 2ª negra o al revés) = p([1]$\cap B_1 \cap N_2$) + p([1]$\cap N_1 \cap B_2$) + p([2]$\cap B_1 \cap N_2$) + p([2]$\cap N_1 \cap B_2$) = $\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{13}\cdot\frac{5}{12}+\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{13}\cdot\frac{8}{12}+\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{4}{9}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{6}{9}=\frac{1}{2}\left(2\cdot\frac{10}{39}+2\cdot\frac{4}{15}\right)=\frac{102}{195}$

❄❄❄❁❁✪❁❁❄❄❄

2 1 Un frutero compra mercancía a dos mayoristas, A y B. Al mayorista A le compra el 60 % de la fruta; de ella el 1 % de las cajas llega en malas condiciones. De la fruta que compra a B el 2 % de las cajas no es apta para vender. Si abre una caja y resulta estar en malas condiciones, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de A?

❄❄❄❁❁✪❁❁❄❄❄

p(A) = 0,6, luego p(B) = 1- p(A) = 0,4 (40 %)
p(M/A) = 0,01 y p(M/B) = 0,02

Es una probabilidad a posteriori, aplicamos el teorema de Bayes:

p(sea del mayorista A si se sabe que está en malas condiciones) = p(A/M), siendo M = estar la fruta en malas condiciones.

$$p(A/M) = \frac{p(A\cap M)}{p(A\cap M)+p(B\cap M)}=\frac{p(A)\cdot p(M/A)}{p(A)\cdot p(M/A)+p(B)\cdot p(M/B)}=\frac{0{,}6\cdot 0{,}01}{0{,}6\cdot 0{,}01+0{,}4\cdot 0{,}02}=\frac{6}{14}=\frac{3}{7}$$

es decir la probabilidad de la rama A y M partido por la probabilidad de las dos ramas que conducen a M en el diagrama en árbol.

❄❄❄❁❁✪❁❁❄❄❄

2 2 La probabilidad de que un taxista tenga un accidente en día de lluvia es p(A/LL)= 0,007; de tener un accidente en día no lluvioso es p(A/LL^C) = 0,003. En su ciudad llueve uno de cada 10 días. ¿Cuál es la probabilidad de que un día cualquiera tenga un accidente?

❄❄❄❁❁✪❁❁❄❄❄

p(llueva) = p(LL) = 1/10 = 0,1, p(no llueva) = p(LL^C) = 1 – p(LL) = 1 – 0,1 = 0,9.

Probabilidad total:

p(A) = p(LL∩A) + p(LL^C∩A) = p(LL) · p(A/LL) + p(LL^C) · p(A/LL^C) = 0,1 · 0,007 + 0,9 · 0,003 = 0,0007 + 0,0027 = 0,0034.

❄❄❄❁❁✪❁❁❄❄❄

2 3 Si el taxista del problema anterior tuvo ayer un accidente, ¿cuál es la probabilidad de que estuviese lloviendo?

❄❄❄❁❁✪❁❁❄❄❄

Teorema de Bayes:

$$P(LL/A) = \frac{p(LL\cap A)}{p(A)} = \frac{p(LL)\cdot p(A/LL)}{p(LL)\cdot p(A/LL)+p(LL^C)\cdot p(A/LL^C)} = \frac{0{,}1\cdot 0{,}007}{0{,}0034} = \frac{0{,}0007}{0{,}0034} = \frac{7}{34}$$

❄❄❄❁❁✪❁❁❄❄❄

2 4 En una empresa hay 45 empleados, 30 hombres (H) y 15 mujeres (M); de ellos, 6 hombres y 5 mujeres son fumadores (F). Calcula las siguientes probabilidades:

(a) p(H), p(M), p(H/F), p(M/F), p(hombre y fumador); p(mujer y fumadora).

(b) p(F), p(F/H), p(F/M).

❄❄❄❁❁✪❁❁❄❄❄

Hacemos la tabla de contingencia:

	Fumadores = F	No fumadores =F^C	Sumas
Hombres = H	6	24	30
Mujeres = M	5	10	15
Sumas	11	34	45

(a)

$$p(H) = \frac{n^o \text{ de hombres}}{n^o \text{ de empleados}} = \frac{30}{45} = \frac{2}{3}$$

$$p(M) = \frac{n^o \text{ de mujeres}}{n^o \text{ de empleados}} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3} = 1 - p(H) = 1 - \frac{2}{3}$$

$$p(H/F) = \begin{cases} \dfrac{\text{hombres que fuman}}{\text{total de fumadores}} = \dfrac{6}{11} \\ \dfrac{p(H\cap F)}{p(F)} = \dfrac{6/45}{11/45} = \dfrac{6}{11} \end{cases}$$

aplicando la ley de Laplace y la definición de probabilidad condicionada.

$$p(M/F) = \begin{cases} \dfrac{\text{mujeres fumadoras}}{\text{Total de fumadores}} = \dfrac{5}{11} \\ \dfrac{p(M\cap F)}{p(F)} = \dfrac{5/45}{11/45} = \dfrac{5}{11} \\ 1 - p(H/F) = 1 - \dfrac{6}{11} = \dfrac{5}{11} \end{cases}$$

p(hombre y fumador) = $p(H\cap F) = p(H) \cdot p(F/H) = p(F\cap H) = p(F) \cdot p(H/F) = \dfrac{11}{45}\cdot\dfrac{6}{11} = \dfrac{6}{45} = \dfrac{2}{15}$
resultado al que podemos llegar directamente aplicando la regla de Laplace : Nº de hombres fumadores/ Total de empleados = 6/45 = 2/15.

p(mujer y fumadora) = $p(M\cap F) = p(M) \cdot p(F/M) = p(F\cap M) = p(F) \cdot p(M/F) = \dfrac{11}{45}\cdot\dfrac{5}{11} = \dfrac{5}{45} = \dfrac{1}{9}$
resultado al que podemos llegar directamente aplicando la regla de Laplace : Nº de mujeres fumadoras/ Total de empleados = 5/45 = 1/9.

(b)

p(F) = Fumadores/ total de empleados = 11/45.

$$p(F/H) = \begin{cases} \dfrac{\text{hombres que fuman}}{\text{total de hombres}} = \dfrac{6}{30} = \dfrac{1}{5} \\ \dfrac{p(H\cap F)}{p(H)} = \dfrac{6/45}{30/45} = \dfrac{6}{30} = \dfrac{1}{5} \end{cases}$$ aplicando la regla de Laplace y la definición de probabilidad condicionada.

$$p(F/M) = \begin{cases} \dfrac{\text{mujeres que fuman}}{\text{total de mujeres}} = \dfrac{5}{15} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{p(H\cap F)}{p(M)} = \dfrac{5/45}{15/45} = \dfrac{5}{15} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

❈❈❈❁❁✪❁❁❈❈❈

25 En un armario hay 12 rifles, 5 con visor telescópico y 7 sin él. La probabilidad de hacer blanco con un rifle con visor es de 0,9; mientras que para el rifle sin visor es de 0,6. Halla la probabilidad de hacer blanco cogiendo un rifle al azar.

❈❈❈❁❁✪❁❁❈❈❈

p(seleccionar un rifle con visor) = p(V) = 5/12.
p(seleccionar un rifle sin visor) = $p(V^C)$ = 7/12.
Si A = hacer blanco, p(A/V) = 0,9 y $p(A/V^C)$ = 0, 6.

De nuevo se trata de la probabilidad total:

p(hacer blanco) = p(A) = p(hacer blanco con un rifle con visor o hacer blanco con un rifle sin visor) = $p(V\cap A) + p(V^C\cap A) = p(V) \cdot p(A/V) + p(V^C) \cdot p(A/V^C) = \frac{5}{12}\cdot 0{,}9+\frac{7}{12}\cdot 0{,}6=0{,}725$

❉❉❉❁❁✪❁❁❉❉❉

26 En el problema anterior, si el tirador ha hecho blanco, ¿qué es más probable: que haya disparado con un rifle con visor o sin él?

❉❉❉❁❁✪❁❁❉❉❉

Hay que aplicar dos veces el teorema de Bayes:

$$p(V/A) = \frac{p(V\cap A)}{p(A)}=\frac{p(V\cap A)}{p(V\cap A)+p(V^C\cap A)}=\frac{p(V)\cdot p(A/V)}{p(V)\cdot p(A/V)+p(V^C)\cdot p(A/V^C)}=\frac{\frac{5}{12}\cdot 0{,}9}{0{,}725}=0{,}52$$

$$p(V^C/A) = \frac{p(V^C\cap A)}{p(A)}=\frac{p(V^C\cap A)}{p(V\cap A)+p(V^C\cap A)}=\frac{p(V^C)\cdot p(A/V^C)}{p(V)\cdot p(A/V)+p(V^C)\cdot p(A/V^C)}=\frac{\frac{7}{12}\cdot 0{,}6}{0{,}725}=0{,}48$$

También = $p(V^C/A) = 1 - p(V/A) = 1 – 0{,}52 = 0{,}48$.

❉❉❉❁❁✪❁❁❉❉❉

27 Tres hospitales H_1 H_2 y H_3 atienden 600, 350 y 250 urgencias semanales. En H_1 un 30 % de los casos son dados de alta tras una primera cura de urgencia; en H_2 y H_3 las altas inmediatas son del 50 y del 60 %, respectivamente. Si se elige un enfermo de urgencia al azar:

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que reciba el alta inmediata, p(A)?
(b) ¿Qué probabilidad existe de que haya sido dado de alta en el hospital H_1 $p(H_1/A)$?

❉❉❉❁❁✪❁❁❉❉❉

p(que una urgencia sea atendida en el hospital H_1) = $\frac{600}{600+350+250}=\frac{600}{1200}=\frac{1}{2}$

p(que una urgencia sea atendida en el hospital H_2) = $\frac{350}{600+350+250}=\frac{350}{1200}=\frac{7}{24}$

p(que una urgencia sea atendida en el hospital H_3) = $\frac{250}{600+350+250}=\frac{250}{1200}=\frac{5}{24}$

$p(A/H_1) = 0{,}3$.
$p(A/H_2) = 0{,}5$.
$p(A/H_3) = 0{,}6$.

(a) p(A) = p(sea dado de alta en H_1 o sea dado de alta en H_2 o sea dado de alta en H_3) = $p(H_1\cap A) + p(H_2\cap A) + p(H_3\cap A) = p(H_1) \cdot p(A/H_1) + p(H_2) \cdot p(A/H_2) + p(H_3) \cdot p(A/H_3) = 0{,}5 \cdot 0{,}3 + 0{,}29 \cdot 0{,}5 + 0{,}21 \cdot 0{,}6 =$ **0,421.**

(b) Teorema de Bayes

$$p(H_1/A) = \frac{p(H_1 \cap A)}{p(A)} = \frac{p(H_1 \cap A)}{p(H_1 \cap A) + p(H_2 \cap A) + p(H_3 \cap A)} = \frac{p(H_1) \cdot p(A/H_1)}{p(H_1) \cdot p(A/H_1) + p(H_2) \cdot p(A/H_2) + p(H_3) \cdot p(A/H_3)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \cdot 0{,}3}{\frac{1}{2} \cdot 0{,}3 + \frac{7}{24} \cdot 0{,}5 + \frac{5}{24} \cdot 0{,}6} = \frac{0{,}15}{0{,}421} = 0{,}36$$

❄❄❄❁❁✪❁❁❄❄❄

AUTOEVALUACIÓN

① ¿Cómo se define la probabilidad a partir de la regla de Laplace? ¿Qué debe suponerse en esta definición?

❄❄❄❁❁✪❁❁❄❄❄

"La probabilidad de una suceso A, se obtiene dividiendo el número de casos favorables al A entre el número total de casos posibles."

$$p(A) = \frac{\text{Número de casos favorables a A}}{\text{Número total de casos}}$$

Que la probabilidad de que cada caso ocurra se mantenga constante.

❄❄❄❁❁✪❁❁❄❄❄

② ¿Cómo se definen las probabilidades a priori y a posteriori?

❄❄❄❁❁✪❁❁❄❄❄

A priori (teórica), por la regla de Laplace, enunciada en la cuestión anterior.

A posteriori (experimental), mediante la frecuencia relativa (número de ocurrencias favorables/ número total de ocurrencias) con que ocurre el suceso experimental.

❄❄❄❁❁✪❁❁❄❄❄

③ Definición axiomática de probabilidad.

❄❄❄❁❁✪❁❁❄❄❄

Se puede resumir en tres axiomas:

(1) La probabilidad está comprendida entre 0 y 1, $0 \leqslant p(A) \leqslant 1$.

(2) La probabilidad de todos los casos del espacio muestral es el suceso seguro, ya que uno de los casos ocurre, $p(E) = 1$.

(3) Si dos sucesos A y B son incompatibles (no tienen nada en común):

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B).$$

❄❄❄❁❁✪❁❁❄❄❄

④ ¿Cuándo dos sucesos son contrarios? Pon un ejemplo.

❄❄❄❁❁✪❁❁❄❄❄

Cuando entre ellos abarcan el espacio muestral, siendo complementarios. Al lanzar una moneda, caro o cruz son sucesos contrarios o complementarios.

❄❄❄❁❁✪❁❁❄❄❄

⑤ ¿Cuándo dos sucesos son compatibles? Pon un ejemplo.

❄❄❄❁❁✪❁❁❄❄❄

Cuando tienen algo en común, o pueden darse a la vez, por ejemplo sacar un oro y una sota, que sería la sota de copas.

❄❄❄❁❁✪❁❁❄❄❄

⑥ ¿Qué diferencia hay entre sucesos incompatibles e independientes? Pon un ejemplo de cada tipo.

❄❄❄❁❁✪❁❁❄❄❄

Incompatibles son aquellos cuya intersección es nula (no hay probabilidad de que ocurran a la vez). Si lanzamos un dado no hay posibilidad de que salgan dos caras a la vez

Independientes son aquellos sucesos que no se condicionan uno al otro. Si sacamos dos cartas sucesivamente y con reemplazamiento, el sacar una sota y un oro son independientes pues la primera extracción no condiciona a la segunda ya que se vuelve a a introducir en la baraja y se reproduce la situación de partida.

❄❄❄❁❁✪❁❁❄❄❄

⑦ ¿Cómo se calcula la probabilidad de la unión de dos sucesos compatibles? ¿Es posible que $p(A) = p(B) = 0{,}7$ y $p(A \cap B) = 0{,}3$?

❄❄❄❁❁✪❁❁❄❄❄

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B).$$

$p(A \cup B) = 0{,}7 + 0{,}7 - 0{,}3 = 1{,}1$ lo cual no es posible, ya que la probabilidad no puede ser mayor de 1.

❄❄❄❁❁✪❁❁❄❄❄

8 ¿Cómo se halla la probabilidad de dos sucesos independientes?

❈❈❈❁❁✪❁❁❈❈❈

$p(A) = p(A/B)$, $p(B) = p(B/A)$, luego $p(A\cap B) = p(A) \cdot p(B)$ y $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$.

❈❈❈❁❁✪❁❁❈❈❈

9 Si $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$, los sucesos A y B son:

(a) Compatibles.
(b) Incompatibles.
(c) Independientes.

❈❈❈❁❁✪❁❁❈❈❈

(b) Incompatibles, es decir no tienen nada en común, es decir $p(A\cap B) = 0$, y por tanto la fórmula de la cuestión 7, queda $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

❈❈❈❁❁✪❁❁❈❈❈

10 Si dos sucesos A y B son independientes, entonces

(a) $A\cap B = \phi$
(b) $A\cap B = E$
(c) $p(A/B) = p(A)$

❈❈❈❁❁✪❁❁❈❈❈

(c) Pues al ser independientes A no depende de B, es decir $p(A/B) = p(A)$.

❈❈❈❁❁✪❁❁❈❈❈

11 Para una baraja, sea F el suceso ser figura (sota, caballo o rey) y C el suceso ser copas. Asocia los sucesos que se indican.

(a) $F \cup C$ es el suceso	(1) ser figura de copas
(b) $F \cap C$ es el suceso	(2) ser figura no de copas
(c) $F - C$ es el suceso	(3) no ser figura ni copas
(d) $C - F$ es el suceso	(4) ser de copas pero no figura
(e) $(F\cap C)^C$ es el suceso	(5) ser figura o ser de copas
(f) $F^C \cup C^C$ es el suceso	(6) no ser figura de copas.

❈❈❈❁❁✪❁❁❈❈❈

① ② ¿Cuánto vale la probabilidad de cada uno de los sucesos anteriores?

❈❈❈❁❁✪❁❁❈❈❈

(a) $p(F \cup C) = p(F) + p(C) - p(F \cap C) = \frac{12}{40} + \frac{10}{40} - \frac{3}{40} = \frac{19}{40}$ ya que hay 10 copas y 9 figuras que no son copas (3 de oros, 3 de bastos y 3 de espadas) de 40 cartas.

(b) $p(F \cap C) = \frac{\text{3 figuras de copas}}{\text{40 cartas}} = p(F) \cdot p(C/F) = \frac{12}{40} \cdot \frac{3}{12}$.

(c) $p(F - C) = p(F) - p(F \cap C) = \frac{12}{40} - \frac{3}{40} = \frac{9}{40}$.

(d) $p(C - F) = p(C) - p(F \cap C) = \frac{10}{40} - \frac{3}{40} = \frac{7}{40}$.

(e) $p(F \cap C)^C = 1 - p(F \cap C) = 1 - \frac{3}{40} = \frac{37}{40}$.

(f) $p(F^C \cup C^C) = p(F \cap C)^C = 1 - \frac{3}{40} = \frac{37}{40}$

❈❈❈❁❁✪❁❁❈❈❈

① ③ Tiramos una moneda y un dado. ¿Cuánto vale p(C y 5)?

❈❈❈❁❁✪❁❁❈❈❈

$$p(C \cap 5) = p(C) \cdot p(5/C) = p(C) \cdot p(5) = ½ \cdot 1/6 = 1/12$$

❈❈❈❁❁✪❁❁❈❈❈

① ④ En una urna hay 3 bolas blancas (B) y 5 negras (N). Se extraen 3 bolas sin reemplazamiento. Calcula: **(a)** P(BBB) **(b)** p(1N, 2B).

❈❈❈❁❁✪❁❁❈❈❈

(a) $p(BBB) = p(B_1) \cdot p(B_2/B_1) \cdot p(B_3/ B_1 \cap B_2) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{56}$

(b) $p(1N, 2B) = p(N_1 \cap B_2 \cap B_3) + p(B_1 \cap N_2 \cap B_3) + p(B_1 \cap B_2 \cap N_3) = p(N_1) \cdot p(B_2/N_1) \cdot p(B_3/ N_1 \cap B_2) + p(B_1) \cdot p(N_2/B_1) \cdot p(B_3/ B_1 \cap N_2) + p(B_1) \cdot p(B_2/B_1) \cdot p(N_3/ B_1 \cap B_2) = 3 \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{15}{56}$

❈❈❈❁❁✪❁❁❈❈❈

➀ ➄ Si $p(A) = 0{,}5$, $p(B) = 0{,}4$ y $p(A \cap B) = 0{,}1$, entonces $p(A \cup B)$ es igual a:

(a) 1 **(b)** 0,8 **(c)** 0,9

❄❄❄❁❁✪❁❁❄❄❄

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0{,}5 + 0{,}4 - 0{,}1 = 0{,}8$, opción **(b).**

❄❄❄❁❁✪❁❁❄❄❄

➀ ➅ Si tienes la siguiente tabla de contingencia

	Hombre(H)	Mujer(M)	Suma
Trabaja(T)	35	25	**60**
Parado/a (P)	5	10	**15**
Suma	**40**	**35**	**75**

Calcula:

(a) p(H) **(b)** p(P) **(c)** p(P/H) **(d)** p(M/T)

❄❄❄❁❁✪❁❁❄❄❄

(a) $p(H) = 40/75 = 8/15$.

(b) $p(P) = 15/75 = 1/5$.

(c) $p(P/H) = 5/40 = 1/8$.

(d) $p(M/T) = 25/60 = 5/12$.

❄❄❄❁❁✪❁❁❄❄❄