ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

① Sabiendo que sen a = - 1 2/13 y tg b = 24/7 , y que 270° < a < 360° y 180° < b < 270°, calcula:

a) sen (a+ b) **b)** cos (a + b) **c)** tg (a + b).

Hallamos el resto de razones trigonométricas de los ángulos que se nos dan:

Partiendo de sen a = -12/13, a en el cuarto cuadrante:

$$\begin{cases} \cos a = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 a} = \sqrt{1-\left(-\frac{12}{13}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{144}{169}} = \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13} \\ \operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a} = \frac{-12/13}{5/13} = -\frac{12}{5} \end{cases}$$

Partiendo de la tg b = 24/7 y b en el tercer cuadrante:

$$1+\operatorname{tg}^2 b=\sec^2 b \Leftrightarrow \sec b = -\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 b} = -\sqrt{1+\left(\frac{24}{7}\right)^2} = -\sqrt{1+\frac{576}{49}} = -\sqrt{\frac{625}{49}} = -\frac{25}{7} \Rightarrow \cos b = \frac{1}{\sec b} = \frac{1}{-25/7} = -\frac{7}{25}$$

Como tg b = senb/cosb ⇒ senb = cosb·tgb = $-\frac{7}{25}\cdot\frac{24}{7} = -\frac{24}{25}$.

Ahora podemos hallar los valores de las razones de ángulos de adicción que se nos piden.

a) sen(a + b) = sena·cosb + senb·cosa = $-\frac{12}{13}\cdot\left(-\frac{7}{25}\right)+\left(-\frac{24}{25}\right)\cdot\frac{5}{13} = \frac{84}{325}-\frac{120}{325} = -\frac{36}{325}$.

b) cos(a + b) = cosa·cosb – sena·senb = $\frac{5}{13}\cdot\left(-\frac{7}{25}\right)-\left(-\frac{12}{13}\right)\cdot\left(-\frac{24}{25}\right) = -\frac{35}{325}-\frac{288}{325} = -\frac{323}{325}$.

c) tg(a +b) = $\begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{-36/325}{-323/325} = \frac{36}{323} \\ = \frac{\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b}{1-\operatorname{tg}a\cdot\operatorname{tg}b} = \frac{-\frac{12}{5}+\frac{24}{7}}{1-\left(\frac{-12}{5}\right)\cdot\frac{24}{7}} = \frac{36/35}{323/35} = \frac{36}{323} \end{cases}$ usando las dos posibilidades.

② Partiendo de las razones trigonométricas de 30°, 45° y 60°, calcula:

a) sen 90° **b)** cos 90° **c)** sen 120° **d)** cos 120° **e)** tg 120° **f)** sen 105° **g)** cos 105° **h)** tg 105°

a) sen90º = $\begin{cases} sen(30º+60º) = sen30º·cos60º+cos30º·sen60º = \frac{1}{2}·\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}·\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4}+\frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1 \\ sen(2·45º) = 2sen45º·cos45º = 2·\frac{\sqrt{2}}{2}·\frac{\sqrt{2}}{2} = 2·\frac{2}{4} = \frac{4}{4} = 1 \end{cases}$

b) cos90º = $\begin{cases} cos(30º+60º) = cos30º·cos60º-sen30º·sen60º = \frac{\sqrt{3}}{2}·\frac{1}{2}-\frac{1}{2}·\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4} = 0 \\ cos(2·45º) = cos^2 45º-sen^2 45º = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 0 \end{cases}$.

c) sen120º = sen(2·60º) = 2sen60º·cos69º = $2·\frac{\sqrt{3}}{2}·\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

d) cos120º = cos(2·60º) = cos^{2}60º - sen^{2}60º = $\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}-\frac{3}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$.

e) tg120º = $\frac{sen120º}{cos120º} = \frac{\sqrt{3}/2}{-1/2} = -\sqrt{3}$.

f) sen105º = sen(60º + 45º) = sen60º·cos45º+cos60º·sen45º = $\frac{\sqrt{3}}{2}·\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}·\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

g) cos105º = cos(60º + 45º) = cos60º·cos45º - sen60º·cos45º = $\frac{1}{2}·\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}·\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$.

h) tg105º = $\frac{sen105º}{cos105º} = \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})/4}{(\sqrt{2}-\sqrt{6})/4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{6}} = \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{2}-\sqrt{6})·(\sqrt{2}+\sqrt{6})} = \frac{\left(\sqrt{6}\right)^2+2·\sqrt{6}·\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{6}\right)^2} = \frac{8+2\sqrt{12}}{-4} =$

$= -\frac{8+2·2\sqrt{3}}{4} = -\frac{2+\sqrt{3}}{2}$.

③ Sabiendo que el seno de un ángulo es sen a = 3/5 y π/2 < a < π, halla las razones trigonométricas de a - 30º.

Calculamos primero la razones trigonométricas del ángulo a que faltan:

$$\begin{cases} cos\,a = -\sqrt{1-sen^2 a} = -\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\sqrt{1-\frac{9}{25}} = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5} \\ tga = \frac{sena}{cos\,a} = \frac{3/5}{-4/5} = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

sen(a – 30º) = sena·cos30º - cosa·sen30º = $\frac{3}{5}·\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(-\frac{4}{5}\right)·\frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{10}+\frac{4}{10} = \frac{4+3\sqrt{3}}{10}$.

cos(a – 30º) = cosa·cos30º + sena·sen30º = $\left(-\frac{4}{5}\right)·\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{5}·\frac{1}{2} = -\frac{4\sqrt{3}}{10}+\frac{3}{10} = \frac{3-4\sqrt{3}}{10}$.

$$tg(a-30^o)=\begin{cases} \dfrac{sen(a-30^o)}{cos(a-30)}=\dfrac{(4+3\sqrt{3})/10}{(3-4\sqrt{3})/10}=\dfrac{4+3\sqrt{3}}{3-4\sqrt{3}}=\dfrac{(4+3\sqrt{3})\cdot(3+4\sqrt{3})}{(3-4\sqrt{3})\cdot(3+4\sqrt{3})}=\dfrac{12+16\sqrt{3}+9\sqrt{3}+36}{9-48}=\dfrac{48+25\sqrt{3}}{-39} \\ =\dfrac{tga-tg30^o}{1+tga\cdot tg30^o}=\dfrac{-\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}=\dfrac{-(9+4\sqrt{3})/12}{(12-3\sqrt{3})/12}=\dfrac{-(9+4\sqrt{3})}{12-3\sqrt{3}}=-\dfrac{(9+4\sqrt{3})\cdot(12+3\sqrt{3})}{(12-3\sqrt{3})\cdot(12-3\sqrt{3})}=-\dfrac{144+75\sqrt{3}}{117}=\dfrac{48+25\sqrt{3}}{-39} \end{cases}.$$

④ Justifica las siguientes igualdades:

a) sen (180° + a) = -sen a
b) tg (π/ 2 + a) = -cotg a
c) sen (270° + a) = -cos a
d) tg (π + 2a) = tg 2a
e) cos (90° + a) = -sen a
f) tg (270° + a) = -cotg a

a) sen(180º + a) = sen180º·cosa + cos180º·sena = 0·cosa + (-1)·sena = -sena.

b) $tg\left(\frac{\pi}{2}+a\right)=\dfrac{tg\frac{\pi}{2}+tga}{1-tg\frac{\pi}{2}\cdot tga}=\dfrac{\dfrac{tg\frac{\pi}{2}+tga}{tg\frac{\pi}{2}}}{\dfrac{1-tg\frac{\pi}{2}\cdot tga}{tg\frac{\pi}{2}}}=\dfrac{1+\dfrac{tga}{tg\frac{\pi}{2}}}{\dfrac{1}{tg\frac{\pi}{2}}-tga}=\dfrac{1+\dfrac{tga}{\infty}}{\dfrac{1}{\infty}-tga}=\dfrac{1}{-tga}=-\cot ga$, ya que $\dfrac{K}{\infty}=0$.

c) sen(270º + a) = sen270º·cosa + cos270º·sena = (-1)·cosa + 0·sena = -cosa.

d) $tg(\pi+2a)=\dfrac{tg\pi+tg2a}{1-tg\pi\cdot tg2a}=\dfrac{0+tg2a}{1-0\cdot tg2a}=\dfrac{tg2a}{1}=tg2a$.

e) cos(90º + a) = cos90º·cosa – sen90º·sena = 0·cosa – 1·sena = - sena.

f) $tg(270^o+a)=\dfrac{tg270^o+tga}{1-tg270^o\cdot tga}=\dfrac{\dfrac{tg270^o+tga}{tg270^o}}{\dfrac{1-tg270^o\cdot tga}{tg270^o}}=\dfrac{1+\dfrac{tga}{tg270^o}}{\dfrac{1}{tg270^o}-tga}=\dfrac{1+\dfrac{tga}{-\infty}}{\dfrac{1}{-\infty}-tga}=\dfrac{1}{-tga}=-\cot ga$.

⑤ Calcula el valor de la siguiente expresión: sena · sen (b - c) - sen b · sen (a - c) + sen c · sen (a-b)

sena sen (b - c) - sen b - sen (a - c) + sen c . sen (a-b) = sena·(senb·cosc –cosb·senc) – senb(sena·cosc – cosa·senc) + senc(sena·cosb –cosa·senb) = sena·senb·cosc $^{(1)}$ – sena·cosb·senc$^{(2)}$ – sena·senb·cosc$^{(1)}$ + senb·cosa·senc $^{(3)}$ + senc·sena·cosb $^{(2)}$ – senc·cosa·senb $^{(3)}$ = 0 ya que las expresiones con subíndices iguales son opuestas.

⑥ Demuestra que $\cos(a+b)\cos(a-b) = \cos^2 a - \sin^2 b = \cos^2 b - \sin^2 a$.

$\cos(a+b)\cos(a-b) = (\cos a\cdot\cos b - \sin a\cdot\sin b)(\cos a\cdot\cos b + \sin a\cdot\sin b) = (\cos a\cdot\cos b)^2 - (\sin a\cdot\sin b)^2 = \cos^2 a\cdot\cos^2 b - \sin^2 a\cdot\sin^2 b \overset{(1)}{=} \cos^2 a(1-\sin^2 b) - (1-\cos^2 a)\cdot\sin^2 b = \cos^2 a \cancel{- \cos^2 a\cdot\sin^2 b} - \sin^2 b + \cancel{\cos^2 a\cdot\sin^2 b} = \mathbf{\cos^2 a - \sin^2 b}$.

(1) en donde hemos sustituido $\cos^2 b = 1 - \sin^2 b$ y $\sin^2 a = 1 - \cos^2 a$ para llegar a la primera igualdad.

Si la sustitución la hacemos $\cos^2 a = 1 - \sin^2 a$ y $\sin^2 b = 1 - \cos^2 b$, tenemos:

$\cos(a+b)\cos(a-b) = (\cos a\cdot\cos b - \sin a\cdot\sin b)(\cos a\cdot\cos b + \sin a\cdot\sin b) = (\cos a\cdot\cos b)^2 - (\sin a\cdot\sin b)^2 = \cos^2 a\cdot\cos^2 b - \sin^2 a\cdot\sin^2 b = (1-\sin^2 a)\cos^2 b - \sin^2 a(1-\cos^2 b) = \cos^2 b - \sin^2 a\cdot\cos^2 b - \sin^2 a + \sin^2 a\cdot\cos^2 b = \mathbf{\cos^2 b - \sin^2 a}$

⑦ Demuestra que $\sin(a+b)\sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b = \cos^2 b - \cos^2 a$.

$\sin(a+b)\sin(a-b) = (\sin a\cdot\cos b + \cos a\cdot\sin b)\cdot(\sin a\cdot\cos b + \cos a\cdot\sin b) = (\sin a\cdot\cos b)^2 - (\cos a\cdot\sin b)^2 = \sin^2 a\cdot\cos^2 b - \cos^2 a\cdot\sin^2 b$, a partir de aquí, como en el ejercicio anterior, tenemos dos caminos:

(1) $\sin^2 a\cdot\cos^2 b - \cos^2 a\cdot\sin^2 b = \sin^2 a\cdot(1-\sin^2 b) - (1-\sin^2 a)\cdot\sin^2 b = \sin^2 a - \sin^2 a\cdot\sin^2 b - \sin^2 b + \sin^2 a\cdot\sin^2 b = \mathbf{\sin^2 a - \sin^2 b}$, que demuestra la primera igualdad.

(2) $\sin^2 a\cdot\cos^2 b - \cos^2 a\cdot\sin^2 b = (1-\cos^2 a)\cdot\cos^2 b - \cos^2 a\cdot(1-\cos^2 b) = \cos^2 b - \cos^2 a\cdot\cos^2 b - \cos^2 a + \cos^2 a\cdot\cos^2 b = \mathbf{\cos^2 b - \cos^2 a}$ que demuestra la segunda igualdad.

⑧ Halla las expresiones que se piden usando los teoremas de adición:

a) $\cos 3a$ en función de $\cos a$ **b)** $\sin 4a$ en función de $\sin a$

a) $\cos 3a = \cos(2a+a) = \cos 2a\cdot\cos a - \sin 2a\cdot\sin a = (\cos^2 a - \sin^2 a)\cdot\cos a - (2\sin a\cdot\cos a)\cdot\sin a = \cos^3 a - \sin^2 a\cdot\cos a - 2\sin^2 a\cdot\cos a = \cos^3 a - 3\sin^2 a\cdot\cos a = \cos^3 a - 3(1-\cos^2 a)\cdot\cos a = \mathbf{4\cos^3 a - 3\cos a}$.

b) $\sin(4a) = \sin(2\cdot 2a) = 2\sin 2a\cdot\cos 2a = 2(2\sin a\cdot\cos a)(\cos^2 a - \sin^2 a) = 4\sin a\cdot\cos^3 a - 4\sin^3 a\cdot\cos a = 4\sin a\cdot\cos a(\cos^2 a - \sin^2 a) = 4\sin a\cdot\cos a(1-\sin^2 a - \sin^2 a) = 4\sin a\cdot\cos a(1-2\sin^2 a) =$

$= 4\sin a\sqrt{1-\sin^2 a}(1-2\sin^2 a)$.

⑨ Sabiendo que tg a = $\sqrt{24}$, y que a es un ángulo cuyo seno y coseno son negativos, calcula las razones trigonométricas del ángulo 2a.

Hallamos primero las razones trigonométricas de las razones que faltan:

$$1+tg^2a=sec^2a \Leftrightarrow \sec a = -\sqrt{1+tg^2a} = -\sqrt{1+\sqrt{24}^2} = -5 \Rightarrow \cos a = \frac{1}{\sec a} = -\frac{1}{5}$$

Como tg a = sena/cosa ⇒ sena = cosa·tga = $-\frac{1}{5}\cdot\sqrt{24} = -\frac{\sqrt{24}}{5}$.

Ahora las razones trigonométricas del ángulo doble:

$$\begin{cases} sen2a = 2sena\cdot\cos a = 2\cdot\left(-\frac{\sqrt{24}}{5}\right)\cdot\left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{2\sqrt{24}}{25} \\ \cos 2a = \cos^2 a - sen^2 a = \left(-\frac{1}{5}\right)^2 - \left(-\frac{\sqrt{24}}{5}\right)^2 = \frac{1}{25} - \frac{24}{25} = -\frac{23}{25} \\ tg2a = \begin{cases} \frac{sen2a}{\cos 2a} = \frac{2\sqrt{24}/25}{-23/25} = -\frac{2\sqrt{24}}{23} \\ = \frac{2tga}{1-tg^2a} = \frac{2\cdot\sqrt{24}}{1-\left(\sqrt{24}\right)^2} = \frac{2\cdot\sqrt{24}}{1-24} = -\frac{2\sqrt{24}}{23} \end{cases} \end{cases}$$

①⓪ Sabiendo que tg 2a = $\sqrt{3}$, halla tg a

$tg2a = \sqrt{3} = \frac{2tga}{1-tg^2a} \Leftrightarrow \sqrt{3}(1-tg^2a) = 2tga \Leftrightarrow -\sqrt{3}tg^2a - 2tga + \sqrt{3} = 0$ ecuación de segundo grado en tga que resolvemos:

$$tga = \frac{2 \pm \sqrt{4-4(-\sqrt{3})\sqrt{3}}}{-2\sqrt{3}} = \frac{2\pm 4}{-2\sqrt{3}} = \begin{cases} -\frac{6}{3\sqrt{3}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

①① Simplifica las expresiones:

a) $\frac{sen2a}{1+\cos 2a} = \frac{2sena\cdot\cos a}{1+\cos^2 a - sen^2 a} = \frac{2sena\cdot\cos a}{\cos^2 a + \cos^2 a} = \frac{2sena\cdot\cos a}{2\cos^2 a} = \frac{sena}{\cos a} = tga$.

b) $\dfrac{\text{sen}2a}{\text{sena}}:\dfrac{1+\cos 2a}{\cos a}=\dfrac{\cos a\cdot \text{sen}2a}{\text{sena}(1+\cos 2a)}=\dfrac{\cos a\cdot 2\text{sena}\cdot \cos a}{\text{sena}(1+\cos^2 a-\text{sen}^2 a)}=\dfrac{2\cos^2 a}{1+\cos^2 a-\text{sen}^2 a}=\dfrac{2\cos^2 a}{2\cos^2 a}=1.$

⑫ Demuestra que tg x = cotg x - 2 cotg 2x.

Partimos del segundo miembro con intención de obtener el primero:

$$\text{cotgx} - 2\ \text{cotg}\ 2x = \frac{1}{\text{tgx}}-\frac{2}{\text{tg}2x}=\frac{1}{\text{tgx}}-\frac{2}{\frac{2\text{tgx}}{1-\text{tg}^2x}}=\frac{1}{\text{tgx}}-\frac{1-\text{tg}^2x}{\text{tgx}}=\frac{1-1+\text{tg}^2x}{\text{tgx}}=\frac{\text{tg}^2x}{\text{tgx}}=\text{tgx}\text{, Q.E.D.}$$

⑬ Comprueba que: $\dfrac{\text{tga}}{\text{tg}2a-\text{tga}}=\cos 2a$

$$\frac{\text{tga}}{\text{tg}2a-\text{tga}}=\frac{\frac{\text{tga}}{\text{tga}}}{\frac{\text{tg}2a-\text{tga}}{\text{tga}}}=\frac{1}{\frac{\text{tg}2a}{\text{tga}}-1}=\frac{1}{\frac{\frac{2\text{tga}}{1-\text{tg}^2a}}{\text{tga}}-1}=\frac{1}{\frac{2}{1-\text{tg}^2a}-1}=\frac{1}{\frac{1+\text{tg}^2a}{1-\text{tg}^2a}}=\frac{1-\text{tg}^2a}{1+\text{tg}^2a}=\frac{1-\frac{\text{sen}^2a}{\cos^2 a}}{\sec^2 a}=\frac{\frac{\cos^2 a-\text{sen}^2a}{\cos^2 a}}{\frac{1}{\cos^2 a}}=$$

$$=\cos^2 a-\text{sen}^2 a=\cos 2a\text{, Q.E.D.}$$

⑭ Calcula las razones trigonométricas de 22° 30' y las de 75°. En ambos casos, utiliza las expresiones del ángulo mitad.

$$\begin{cases}\text{sen}22^\circ30'=\text{sen}\dfrac{45^\circ}{2}=\sqrt{\dfrac{1-\cos 45^\circ}{2}}=\sqrt{\dfrac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\sqrt{\dfrac{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}{2}}=\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}\\ \cos 22^\circ30'=\cos\dfrac{45^\circ}{2}=\sqrt{\dfrac{1+\cos 45^\circ}{2}}=\sqrt{\dfrac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\sqrt{\dfrac{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}{2}}=\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\\ \text{tg}22^\circ30'=\text{tg}\dfrac{45^\circ}{2}=\sqrt{\dfrac{1-\cos 45^\circ}{1+\cos 45^\circ}}=\sqrt{\dfrac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}}=\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}=\sqrt{\dfrac{(2-\sqrt{2})^2}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}}=\sqrt{\dfrac{6-4\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{3-2\sqrt{2}}\end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{sen}75^\circ = \text{sen}\dfrac{150^\circ}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\cos 150^\circ}{2}} = \sqrt{\dfrac{1+\cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\dfrac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\dfrac{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}} \\ \cos 75^\circ = \cos\dfrac{150^\circ}{2} = \sqrt{\dfrac{1+\cos 150^\circ}{2}} = \sqrt{\dfrac{1-\cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\dfrac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\dfrac{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}} \\ \text{tg}75^\circ = \text{tg}\dfrac{150^\circ}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\cos 150^\circ}{1+\cos 150^\circ}} = \sqrt{\dfrac{1+\cos 30^\circ}{1-\cos 30^\circ}} = \sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}} = \sqrt{\dfrac{(2+\sqrt{3})^2}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}} = \sqrt{\dfrac{7+4\sqrt{3}}{1}} = \sqrt{7+4\sqrt{3}} \end{cases}$$

❂❂❂✽✽❁✽✽❂❂❂

①⑤ Sabiendo que cotg a = -2 y a es el mayor ángulo negativo que verifica esta igualdad, calcula las razones trigonométricas del ángulo mitad.

❂❂❂✽✽❁✽✽❂❂❂

Estamos en el segundo cuadrante ya que dice que es ángulo negativo mayor que verifica que la cotangente es negativa. Necesitamos el cosa:

$$1 + \text{cotg}^2 a = \text{cosec}^2 a \Leftrightarrow \text{coseca} = \sqrt{1+\cot g^2 a} = \sqrt{1+(-2)^2} = \sqrt{5} \Rightarrow \text{sena} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\cot ga = \frac{\cos a}{\text{sena}} \Leftrightarrow \cos a = \text{sena}\cdot\cos\text{tga} = \frac{\sqrt{5}}{5}(-2) = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Calculamos las razones, directas, del ángulo mitad

$$\begin{cases} \text{sen}\dfrac{a}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\cos a}{2}} = \sqrt{\dfrac{1+\frac{2\sqrt{5}}{5}}{2}} = \sqrt{\dfrac{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}{2}} = \sqrt{\dfrac{5+2\sqrt{5}}{10}} \\ \cos\dfrac{a}{2} = \sqrt{\dfrac{1+\cos a}{2}} = \sqrt{\dfrac{1-\frac{2\sqrt{5}}{5}}{2}} = \sqrt{\dfrac{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}{2}} = \sqrt{\dfrac{5-2\sqrt{5}}{10}} \\ \text{tg}\dfrac{a}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\cos a}{1+\cos a}} = \sqrt{\dfrac{\frac{5+2\sqrt{5}}{10}}{\frac{5-2\sqrt{5}}{10}}} = \sqrt{\dfrac{5+2\sqrt{5}}{5-2\sqrt{5}}} = \sqrt{\dfrac{(5+2\sqrt{5})^2}{(5-2\sqrt{5})(5+2\sqrt{5})}} = \sqrt{\dfrac{45-4\sqrt{5}}{4}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{45-4\sqrt{5}} \end{cases}$$

❂❂❂✽✽❁✽✽❂❂❂

①⑥ Expresa, en función de una razón trigonométrica del ángulo mitad:

a) $\dfrac{1-\cos a}{\text{sena}} = \dfrac{1-\cos a}{\sqrt{1-\cos^2 a}} = \dfrac{2\text{sen}^2\frac{a}{2}}{\sqrt{(1-\cos a)(1+\cos a)}} = \dfrac{2\text{sen}^2\frac{a}{2}}{\sqrt{2\text{sen}^2\frac{a}{2}\cdot 2\cos^2\frac{a}{2}}} = \dfrac{2\text{sen}^2\frac{a}{2}}{2\text{sen}\frac{a}{2}\cdot\cos\frac{a}{2}} = \dfrac{\text{sen}\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}} = \text{tg}\dfrac{a}{2}$.

b)

$$\frac{\text{sen}2a}{1+\cos 2a}\cdot\frac{\cos a}{1+\cos a}=\frac{2\text{sen}a\cdot\cos a}{2\cos^2 a}\cdot\frac{\cos a}{1+\cos a}=\frac{\text{sen}a}{1+\cos a}=\frac{\sqrt{1-\cos^2 a}}{1+\cos a}=\frac{\sqrt{(1+\cos a)(1-\cos a)}}{1+\cos a}=\sqrt{\frac{(1+\cos a)(1-\cos a)}{(1+\cos a)^2}}=$$
$$=\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}=\text{tg}\frac{a}{2}.$$

❂❂❂❂✽✽❃✽✽❂❂❂❂

①⑦ Sabiendo que cos x/2 = - 2/3 y que x es un ángulo del tercer cuadrante, halla sen x, cos x.

❂❂❂❂✽✽❃✽✽❂❂❂❂

$$\cos\frac{x}{2}=-\frac{2}{3}=-\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}\Leftrightarrow\left(-\frac{2}{3}\right)^2=\left(-\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}\right)^2\Leftrightarrow\frac{4}{9}=\frac{1+\cos x}{2}\Leftrightarrow\cos x=-\frac{1}{9}$$

$$\text{sen}x=-\sqrt{1-\cos^2 x}=-\sqrt{1-\left(-\frac{1}{9}\right)^2}=-\sqrt{\frac{80}{81}}=-\frac{4\sqrt{5}}{9}$$

❂❂❂❂✽✽❃✽✽❂❂❂❂

①⑧ Simplifica las expresiones siguientes:

a) $$\frac{\text{sen}40^\circ+\text{sen}20^\circ}{\cos 40^\circ+\cos 20^\circ}=\frac{2\text{sen}\left(\frac{40^\circ+20^\circ}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{40^\circ-20^\circ}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{40^\circ+20^\circ}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{40^\circ-20^\circ}{2}\right)}=\frac{\text{sen}30^\circ\cdot\cos 10^\circ}{\cos 30^\circ\cdot\cos 10^\circ}=\frac{\text{sen}30^\circ}{\cos 30^\circ}=\text{tg}30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

b) $$\frac{\text{sen}195^\circ-\text{sen}75^\circ}{\text{sen}195^\circ+\text{sen}75^\circ}=\frac{2\cos\left(\frac{195^\circ+75^\circ}{2}\right)\cdot\text{sen}\left(\frac{195^\circ-75^\circ}{2}\right)}{2\text{sen}\left(\frac{195^\circ+75^\circ}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{195^\circ-75^\circ}{2}\right)}=\frac{\cos 135^\circ\cdot\text{sen}60^\circ}{\text{sen}135^\circ\cdot\cos 60^\circ}=\frac{\text{tg}60^\circ}{\text{tg}135^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{-1}=-\sqrt{3}$$

c) $$\frac{\cos 60^\circ-\cos 40^\circ}{\text{sen}60^\circ-\text{sen}40^\circ}=\frac{-2\text{sen}\left(\frac{60^\circ+40^\circ}{2}\right)\cdot\text{sen}\left(\frac{60^\circ-40^\circ}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{60^\circ+40^\circ}{2}\right)\cdot\text{sen}\left(\frac{60^\circ-40^\circ}{2}\right)}=-\frac{\text{sen}50^\circ\cdot\text{sen}10^\circ}{\cos 50^\circ\cdot\text{sen}10^\circ}=-\frac{\text{sen}50^\circ}{\cos 50^\circ}=-\text{tg}50^\circ.$$

❂❂❂❂✽✽❃✽✽❂❂❂❂

①⑨ Demuestra que $\frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{\text{sen}(x+y)+\text{sen}(x-y)}=\text{tg}y$

❂❂❂❂✽✽❃✽✽❂❂❂❂

$$\frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{\text{sen}(x+y)+\text{sen}(x-y)}=\frac{-2\text{sen}\frac{(x-y)+(x+y)}{2}\cdot\text{sen}\frac{(x-y)-(x+y)}{2}}{2\text{sen}\frac{(x-y)+(x+y)}{2}\cdot\cos\frac{(x-y)-(x+y)}{2}}=-\frac{\text{sen}x\cdot\text{sen}(-y)}{\text{sen}x\cdot\cos(-y)}=-\frac{-\text{sen}y}{\cos y}=\frac{\text{sen}y}{\cos y}=\text{tg}y$$ Q.E.D.

❂❂❂❂✽✽❃✽✽❂❂❂❂

⑳ Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{4}+2x\right)=\begin{cases} \frac{\pi}{3}+2\pi k \Rightarrow 2x=\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+2\pi k=\frac{\pi}{12}+2\pi k \Rightarrow x=\frac{\pi}{24}+\pi k \\ \frac{2\pi}{3}+2\pi k \Rightarrow 2x=\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+2\pi k=\frac{5\pi}{12}+2\pi k \Rightarrow x=\frac{5\pi}{24}+\pi k \end{cases}.$

ya que el ángulo cuyo seno es $\frac{\sqrt{3}}{2}$ mide 60º = π/3 rad en el primer cuadrante y 120º = 2π/3 rad en el segundo.

b) $\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\begin{cases} \frac{2\pi}{3}+2\pi k \Rightarrow 3x=\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)+2\pi k=\frac{11\pi}{12}+2\pi k \Rightarrow x=\frac{11\pi}{24}+\pi k \\ \frac{4\pi}{3}+2\pi k \Rightarrow 3x=\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)+2\pi k=\frac{19\pi}{12}+2\pi k \Rightarrow x=\frac{19\pi}{24}+\pi k \end{cases}$

ya que el ángulo cuyo coseno es -1/2 mide 120º = 2π/3 rad en el 2º cuadrante y 240º = 2π/3 rad en el tercero.

c) $\text{tg}\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3} \Leftrightarrow \left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\begin{cases} \frac{2\pi}{3}+\pi k \Rightarrow 2x=\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)+\pi k=\frac{\pi}{3}+\pi k \Rightarrow x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}k \\ \frac{5\pi}{3}+\pi k \Rightarrow 2x=\left(\frac{5\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)+\pi k=\frac{4\pi}{3}+\pi k \Rightarrow x=\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{2}k \end{cases}$

ya que el ángulo cuya tangente es $-\sqrt{3}$ mide 120º = 2π/3 rad en el 2º cuadrante y 300º = 5π/3 rad en el 4º.

d) $\cos\left(\frac{1}{2}(x+\pi)\right)=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}(x+\pi)\right)=\begin{cases} \frac{\pi}{6}+2\pi k \Rightarrow \frac{1}{2}x=\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}\right)+2\pi k=-\frac{2\pi}{3}+2\pi k \Rightarrow x=-\frac{4\pi}{3}+4\pi k=\frac{2\pi}{3}+4\pi k \\ \frac{11\pi}{6}+2\pi k \Rightarrow \frac{1}{2}x=\left(\frac{11\pi}{6}-\frac{\pi}{2}\right)+2\pi k=\frac{8\pi}{3}+2\pi k \Rightarrow x=\frac{16\pi}{3}+4\pi k=\frac{4\pi}{3}+4\pi k \end{cases}$

ya que el ángulo cuyo coseno es $\frac{\sqrt{3}}{2}$ mide 30º = π/6 rad en el primer cuadrante y 330º = 11π/6 rad en el 4º.

e) sen 3x – sen30º = 0 ⇔ sen 3x = sen30º ⇔ sen 3x = ½ $\Rightarrow 3x=\begin{cases} 30^\circ+k\cdot 360^\circ \Rightarrow x=10^\circ+k\cdot 120^\circ \\ 150^\circ+k\cdot 360^\circ \Rightarrow x=50^\circ+k\cdot 120^\circ \end{cases}.$

f) $\cot g\left(\frac{x+45^\circ}{2}\right)=\sqrt{3} \Leftrightarrow \left(\frac{x+45^\circ}{2}\right)=\begin{cases} 30^\circ+k\cdot 180^\circ \Rightarrow x+45^\circ=60^\circ+k\cdot 360^\circ \Leftrightarrow x=15^\circ+k\cdot 360^\circ \\ 210^\circ+k\cdot 180^\circ \Rightarrow x+45^\circ=420^\circ+k\cdot 360^\circ \Leftrightarrow x=375^\circ+k\cdot 360^\circ \end{cases}.$

ya que el ángulo cuya cotangente es $\sqrt{3}$ mide 30º en el primer cuadrante y 210º en el 3º. Como la primera solución incluye la segunda, tomamos la primera.

㉑ Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) sen 2x = 2 cos x
b) sen x + sen 3x = cos x
c) sen 4x = sen 2x
d) cos 2x - cos 6x = sen 5x + sen 3x
e) sen 2x - cos x = 6 sena x
f) 2 sen x = tg x

a) sen2x = 2cosx ⇔ 2senx·cosx – 2cosx = 0 ⇔ 2cosx(senx – 1) = 0 $\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = 90°+k\cdot180° \\ \text{sen}x - 1 = 0 \Leftrightarrow \text{sen}x = 1 \end{cases}$, la solución de la segunda x = 90º + k·360º ya está incluida en la primera.

b) senx + sen3x = cosx $\Leftrightarrow 2\text{sen}\dfrac{x+3x}{2}\cdot\cos\dfrac{x-3x}{2} = \cos x \Leftrightarrow 2\text{sen}2x\cdot\cos(-x) = \cos x \Leftrightarrow 2\text{sen}2x\cdot\cos x - \cos x = 0$;

cosx(2sen2x – 1) = 0 $\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = 90°+k\cdot180° \\ 2\text{sen}2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \text{sen}2x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow 2x = \begin{cases} 30°+k\cdot360° \Rightarrow x = 15°+k\cdot180° \\ 150°+k\cdot360° \Rightarrow x = 75°+k\cdot180° \end{cases} \end{cases}$

c) sen4x = sen2x ⇔ 2sen2x·cos2x = sen2x ⇔ 2sen2x·cos2x - sen2x = 0 ⇔ sen2x(2cos2x -1) = 0, e igualando cada factor a cero:

$$\begin{cases} \text{sen}2x = 0 \Rightarrow 2x = 0°+k\cdot180° \Leftrightarrow x = 0°+k\cdot90° \\ 2\cos 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow 2x = \begin{cases} 60°+k\cdot360° \\ 120°+k\cdot360° \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} 30°+k\cdot180° \\ 60°+k\cdot180° \end{cases} \end{cases}$$

d) cos2x – cos6x = sen5x + sen3x $\overset{(1)}{\Leftrightarrow} -2\text{sen}\dfrac{2x+6x}{2}\cdot\text{sen}\dfrac{2x-6x}{2} = 2\text{sen}\dfrac{5x+3x}{2}\cdot\cos\dfrac{5x-3x}{2} \Leftrightarrow$ - sen4x·sen(-2x) = sen4x·cosx $\overset{(2)}{\Leftrightarrow}$ sen4x·sen2x – sen4x·cosx = 0 ⇔ sen4x(sen2x – cosx) = 0, ahora igualamos cada factor a cero:

$$\begin{cases} \text{sen}4x = 0 \Rightarrow 4x = 0°+k\cdot180° \Leftrightarrow x = 0°+k\cdot90° \\ \text{sen}2x - \cos x = 0 \Leftrightarrow 2\text{sen}x\cos x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x(2\text{sen}x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = 90°+k\cdot180° \\ 2\text{sen}x - 1 = 0 \Leftrightarrow \text{sen}x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \begin{cases} 30°+k\cdot360° \\ 150°+k\cdot360° \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

(1) Aplicamos las fórmulas de adición para convertir sumas (o diferencias) en productos.
(2) sen(-2x) = -sen2x y pasamos al primer miembro todo.

e) sen2x ·cosx = 6sen^{3}x ⇔ 2senx·cosx – 6sen^{3}x = 0 ⇔ 2senx(cosx – 3sen^{2}x) = 0, ahora ya podemos igualar cada factor a cero:

2senx = 0 ⇒ x = 0º + k·180º.

$\cos x - 3\text{sen}^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos x - 3(1-\cos^2 x) = 0 \Leftrightarrow 3\cos^2 x + \cos x - 3 = 0 \Rightarrow \cos x = \dfrac{-1\pm\sqrt{1+36}}{6} = \begin{cases} 0{,}847127 \\ -1{,}18046 \end{cases}$, la segunda solución no es válida ya que el coseno no puede ser menor que -1 y para que cosx = 0,847127; x = 32º 5' 58" +k·360º ó x = 327º 54' 2" + k·360º.

f) 2senx = tgx $2\text{sen}x - \text{tg}x = 0 \Leftrightarrow 2\text{sen}x - \dfrac{\text{sen}x}{\cos x} = 0 \Leftrightarrow \text{sen}x\left(2 - \dfrac{1}{\cos x}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}x = 0 \Rightarrow x = 0°+180°k \\ 2 - \dfrac{1}{\cos x} = 0 \Leftrightarrow \cos x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \end{cases}$

la segunda ecuación tiene por soluciones x = 60º + k·360º ó x = 300º + k·360º.

②② Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) sen x = 1 + 2 cos^2 x
b) sec x + tg x = 0
c) 6 cos2 (x/2) + cos x = 1
d) 6 cos^{2}x + 6 sen^{2}x = 5 + sen x
e) tg 2x tg x = 1
f) cos^{2}x = 3 sen^{2}x

a) senx = 1 + 2cos^{2}x ⇔ senx = 1 + 2(1 – sen^{2}x) ⇔ senx = 1 + 2 – 2sen^{2}x ⇔ 2sen^{2}x + senx – 3 = 0, ecuación de segundo grado en senx que resolvemos:

$\text{senx} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \frac{-1 \pm 5}{4} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{3}{2} \end{cases}$, la segunda no es válida ya que el seno no puede ser menor que -1 y de la primera obtenemos x = 90º + k·360º.

b) secx + tgx = 0 $\Leftrightarrow \frac{1}{\cos x} + \frac{\text{senx}}{\cos x} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\cos x}(1 + \text{senx}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\cos x} = 0 \Rightarrow \text{No válida} \\ 1 + \text{senx} = 0 \Leftrightarrow \text{senx} = -1 \Leftrightarrow x = 270º + k\cdot 360º \end{cases}$

c) $6\cos^2\frac{x}{2} + \cos x = 1 \Leftrightarrow 6\left(\frac{1+\cos x}{2}\right) + \cos x = 1 \Leftrightarrow 3 + 3\cos x + \cos x = 1 \Leftrightarrow 4\cos x = -2 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$
cuyas soluciones son x = 120º + k·360º ó x = 240º + k·360º.

d) 6cos^{2}x + 6sen^2 x = 5 + senx ⇔ 6(1 – sen^{2}x) + 6sen^2 x = 5 + senx ⇔ 6 – 6sen^{2}x + 6sen^2 x = 5 + senx ⇔ senx = 1 ⇒ x = 90º + k·360º.

e) tg2x·tgx = 1 $\Leftrightarrow \frac{2\text{tgx}}{1-\text{tg}^2x}\cdot\text{tgx} = 1 \Leftrightarrow 2\text{tg}^2x = 1 - \text{tg}^2x \Leftrightarrow 3\text{tg}^2x = 1 \Leftrightarrow \text{tgx} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, de tener en cuenta los dos signos tenemos: $\begin{cases} \text{tgx} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = 150º + k\cdot 180º \\ \text{tgx} = +\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = 30º + k\cdot 180º \end{cases}$.

f) cos^{2}x = 3sen^{2}x $\Leftrightarrow \frac{\text{sen}^2x}{\cos^2x} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \text{tg}^2x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \text{tgx} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ cuyas soluciones ya hemos hallado en el ejercicio anterior: $\begin{cases} \text{tgx} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = 150º + k\cdot 180º \\ \text{tgx} = +\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = 30º + k\cdot 180º \end{cases}$.

✪✪✪✲✲❁✲✲✪✪✪

②③ Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) senx + $\sqrt{3}$ cosx = 2 **b)** senx + cosx = $\sqrt{2}$ **c)** sen x + cos x = 5/2

✪✪✪✲✲❁✲✲✪✪✪

En estas ecuaciones hay que aplicar los teoremas de adición.

a) $\text{senx} + \sqrt{3}\cos x = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\text{senx} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos x = 1 \Leftrightarrow \text{senx}\cdot\cos 60º + \cos x\cdot\text{sen}60º = 1 \Leftrightarrow \text{sen}(x + 60º) = 1$ ⇒ x + 60º = 90º + k·360º ⇔ x = 30º + k·360º .

b) $\text{senx} + \cos x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\text{senx} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x = 1 \Leftrightarrow \text{senx}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \cos x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 1 \Leftrightarrow \text{sen}(x + 45º) = 1$ ⇒ x + 45º = 90º + k·360º ⇔ x = 45º + k·360º .

c) $\operatorname{sen}x+\cos x=\frac{5}{2}\Leftrightarrow \operatorname{sen}x+\sqrt{1-\operatorname{sen}^2x}=\frac{5}{2}\Leftrightarrow 2\sqrt{1-\operatorname{sen}^2x}=(5-2\operatorname{sen}x)\Leftrightarrow\left(2\sqrt{1-\operatorname{sen}^2x}\right)^2=(5-2\operatorname{sen}x)^2\Leftrightarrow$ $4(1-\operatorname{sen}^2x)=25-20\operatorname{sen}x+4\operatorname{sen}^2x\Leftrightarrow 8\operatorname{sen}^2x-20\operatorname{sen}x+21=0$, ecuación de 2º grado en senx que resolvemos:

$\operatorname{sen}x=\frac{20\pm\sqrt{400-672}}{16}$ que no tiene soluciones reales.

❂❂❂✽✽❀✽✽❂❂❂

②④ Resuelve los siguientes sistemas:

a) $$\left.\begin{array}{l}x+\operatorname{sen}^2y=2\\x+\cos^2y=1\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{reducción}}\left.\begin{array}{r}-x-\operatorname{sen}^2y=-2\\x+\cos^2y=1\\\hline\cos^2y-\operatorname{sen}^2y=-1\end{array}\right\}\Rightarrow\cos^2y-\operatorname{sen}^2y=-1\Leftrightarrow\cos 2y=-1\Rightarrow 2y=180º+k\cdot 360º\Leftrightarrow$$

y = 90º + k·360º, sustituyendo en la primera x + sen^2(90º + k·360º) = 2 ⇔ x + 1 = 2 ⇔ x = 1.

b) $$\left.\begin{array}{l}\operatorname{sen}x\cdot\cos y=\frac{3}{4}\\\cos x\cdot\operatorname{sen}y=\frac{1}{4}\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{sumando}\\\text{restando}\end{array}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}\operatorname{sen}x\cdot\cos y+\cos x\cdot\operatorname{sen}y=1\\\operatorname{sen}x\cdot\cos y-\cos x\cdot\operatorname{sen}y=\frac{1}{2}\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}\operatorname{sen}(x+y)=1\\\operatorname{sen}(x-y)=\frac{1}{2}\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}x+y=90º\\x-y=\begin{cases}30º\\150º\end{cases}\end{array}\right\}$$ luego tenemos dos sistemas posibles (considerando sólo una vuelta a la circunferencia):

$$\begin{cases}\left.\begin{array}{l}x+y=90º\\x-y=30º\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{sumando}}2x=120º\Leftrightarrow x=60º\Rightarrow y=30º\\\left.\begin{array}{l}x+y=90º\\x-y=150º\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{sumando}}2x=240º\Leftrightarrow x=120º\Rightarrow y=330º\end{cases}$$

c) $\left.\begin{array}{l}\cos x+\cos y=1\\\cos(x+y)=1\end{array}\right\}$ de la segunda se deduce que x + y = 0º, luego y = -x que sustituida en la primera nos da: cosx + cos(-x) = 1⇔ cosx + cosx = 1⇔ 2cosx = 1 ⇔ cosx = ½ ⇒ x = 60º + k·360º ó x = 120º + k·360º, la y, por tanto, es y = - x = -60º = 300º + k·360º ó y = -120º = 240º + k·360º

d) $\left.\begin{array}{l}x+y=\frac{\pi}{2}\\\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}y=\frac{\sqrt{6}}{2}\end{array}\right\}$ de la primera se deduce y = π/2 – x que sustituido en la segunda arroja senx + sen(π/2 – x) = $\frac{\sqrt{6}}{2}$ que convertimos en producto mediante la fórmula de adición:

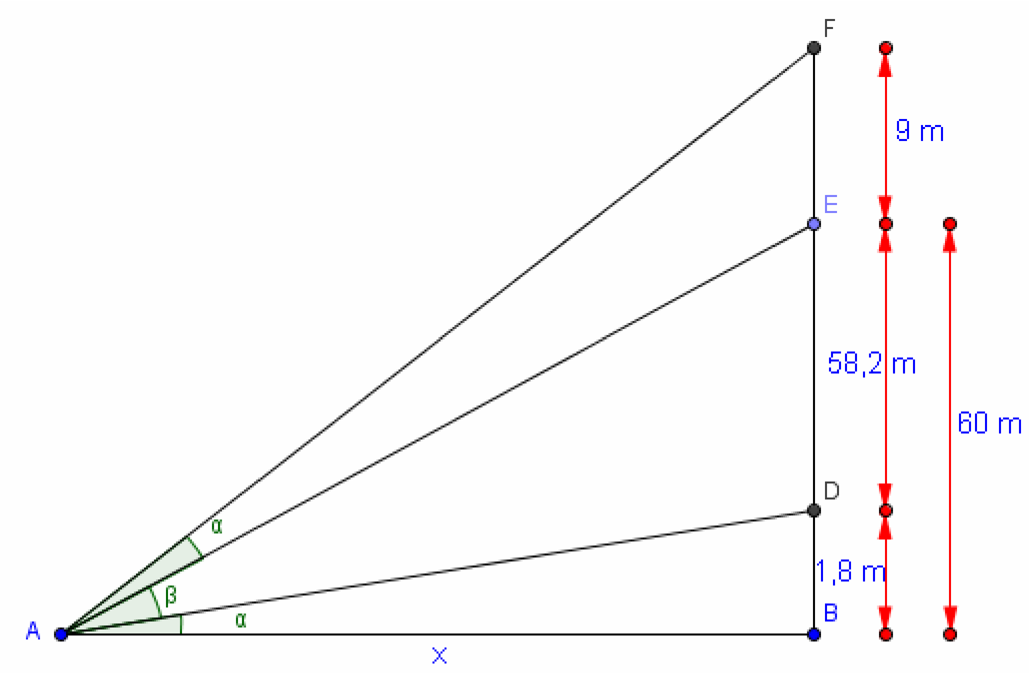
$$\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}B=2\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}\Rightarrow\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=2\operatorname{sen}\frac{x+\frac{\pi}{2}-x}{2}\cdot\cos\frac{x-\frac{\pi}{2}+x}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}\Leftrightarrow\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cdot\cos(x-\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{6}}{4}\Leftrightarrow\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{4}=\begin{cases}30º=\frac{\pi}{6}\\330º=\frac{11\pi}{6}\end{cases}\Rightarrow x=\begin{cases}\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{12}\\\frac{11\pi}{6}+\frac{\pi}{4}=\frac{25\pi}{12}=\frac{\pi}{12}\end{cases}$$ luego los valores

de y son: $\begin{cases}y=\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{12}\\y=\frac{\pi}{2}-\frac{25\pi}{12}=-\frac{19\pi}{12}=\frac{5\pi}{12}\end{cases}$, da valores cambiados: para x = 5π/12, y = π/12 y viceversa.

❂❂❂✽✽❀✽✽❂❂❂

②⑤ En una de las orillas de un río hay un pedestal de 60 m de altura sobre el que se apoya una estatua de 9 m de alzada. Halla la anchura x del río, sabiendo que desde un punto A, situado en la orilla opuesta al pedestal, se ve la estatua bajo el mismo ángulo que se vería a un hombre de 1,80 m situado delante del pedestal.



$$\begin{cases} tg\alpha = \dfrac{1{,}8}{x} \\ tg(\alpha+\beta) = \dfrac{60}{x} \\ tg(2\alpha+\beta) = \dfrac{69}{x} \end{cases}$$ resolviendo el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas tenemos x = 32,17 m.

②⑥ Sabiendo que tg (A/2) = $-\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ y que A es un ángulo cuyo seno es menor que su coseno, halla cos 3A - cos A.

En el ejercicio ⑧ hallamos cos3A = 4cos^{3}A – 3cosA, en función del cos A.

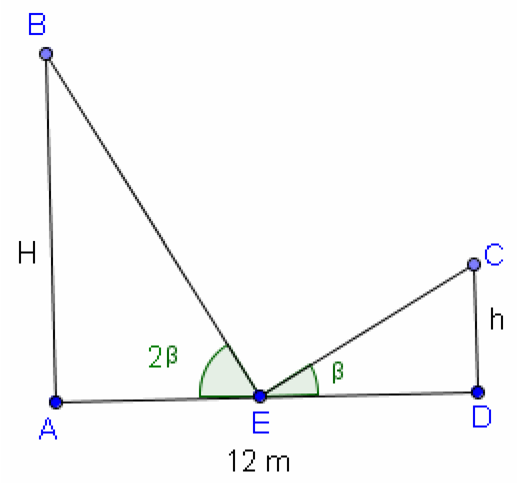
A partir de la tangente del ángulo mitad hallamos el valor de cosA:

$$tg\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}} = -\sqrt{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow \left(\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}\right)^2 = \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{1-\cos A}{1+\cos A} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2-2\cos A = 3+3\cos A \Leftrightarrow 5\cos A = -1$$

$\Leftrightarrow \cos A = -\dfrac{1}{5}$, ahora podemos hallar el valor de la expresión pedida:

$$\cos 3A - \cos A = 4\cos^3 A - 3\cos A - \cos A = 4\cos^3 A - 4\cos A = 4\left(\left(-\frac{1}{5}\right)^3 + \frac{1}{5}\right) = 4\left(-\frac{1}{125} + \frac{1}{5}\right) = \frac{96}{125}.$$

②⑦ Una calle mide 12 m de ancha. Desde el punto medio de la misma se observan los aleros de sendos edificios de alturas H y h bajo ángulos 2β y β , respectivamente.
En el caso de que los ángulos sean de 60° y 30°, calcula H y h. Encuentra la relación general que liga a las alturas H y h, y comprueba que las alturas calculadas anteriormente verifican la relación general.



AE = ED = x = 6 m

$$\begin{cases} tg\beta = tg30^\circ = \dfrac{h}{6m} \Leftrightarrow h = 6m\cdot tg30^\circ \cong 3{,}46m \\ tg2\beta = tg60^\circ = \dfrac{H}{6m} \Leftrightarrow H = 6m\cdot tg60^\circ \cong 10{,}39m \end{cases}$$

En general:

$$\begin{cases} tg\beta = \dfrac{h}{6} \\ tg2\beta = \dfrac{H}{6} = \dfrac{2tg\beta}{1-tg^2\beta} = \dfrac{2\cdot\frac{h}{6}}{1-\left(\frac{h}{6}\right)^2} = \dfrac{12h}{36-h^2} \Rightarrow \dfrac{H}{6} = \dfrac{12h}{36-h^2} \Leftrightarrow H = \dfrac{72h}{36-h^2} = \dfrac{2h}{1-\left(\frac{h}{6}\right)^2} \end{cases}$$

Comprobemos la relación anterior:

$$H = \frac{72h}{36-h^2} = \frac{72\cdot 6\cdot tg30^\circ}{36-(6tg30^\circ)^2} \cong 10{,}39$$

②⑧ Siendo A, B, C los ángulos de un triángulo, demuestra que:

$$tg\,A + tg\,B + tg\,C = tg\,A \cdot tg\,B \cdot tg\,C$$

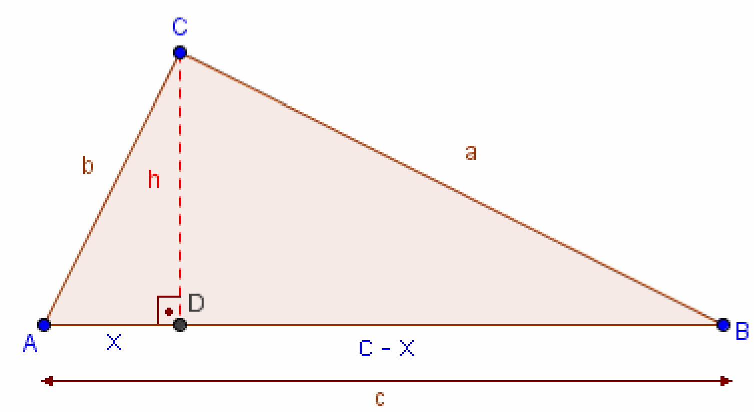
Nota: ayúdate del desarrollo de tg (A + B + C), y recuerda que A + B + C = 180°.

A + B + C = 180º ⇔ A + B = 180º - C ⇔ tg(A+B) = tg(180º-C) ⇔ $\dfrac{tgA + tgB}{1 - tgA\cdot tgB} = -tgC$ ⇔ tgA + tgB = -tgC(1 – tgA·tgB) ⇔ tgA + tgB = -tgC + tgA·tgB·tgC ⇔ **tgA + tgB +tgC = tgA·tgB·tgC** Q.E.D.

②⑨ En los manuales de agrimensura aparece la siguiente fórmula para calcular el área de un triángulo, siempre que se conozcan los elementos que en ella aparecen:

$$S = \frac{1}{2} \cdot c^2 \cdot \frac{tgA \cdot tgB}{tgA + tgB}$$

Ayudándote de la altura correspondiente al vertice C, demuestra la fórmula anterior.



En el triángulo rectángulo ADC tenemos:

$$tgA = \frac{h}{x}$$

En el triángulo rectángulo CDB tenemos:

$$tgB = \frac{h}{c - x}$$

Si despejemos h del sistema formado por las dos expresiones anteriores:

$$tgA = \frac{h}{x} \Leftrightarrow x = \frac{h}{tgA}$$

$$tgB = \frac{h}{c - x} \Leftrightarrow c - x = \frac{h}{tgB} \Leftrightarrow x = c - \frac{h}{tgB}$$

Igualando x: $\frac{h}{tgA} = c - \frac{h}{tgB} \Leftrightarrow \frac{h}{tgA} + \frac{h}{tgB} = c \Leftrightarrow h\left(\frac{1}{tgA} + \frac{1}{tgB}\right) = c \Rightarrow h = \frac{c}{\frac{1}{tgA} + \frac{1}{tgB}} = \frac{c}{\frac{tgB + tgA}{tgA \cdot tgB}} = c\frac{tgA \cdot tgB}{tgB + tgA}$

El área del triángulo es S = $\frac{1}{2} c \cdot h = \frac{1}{2} c \cdot c \cdot \frac{tgA \cdot tgB}{tgB + tgA} = \frac{1}{2} c^2 \frac{tgA \cdot tgB}{tgB + tgA}$ Q.E.D.

En donde hemos sustituido h por la expresión obtenida más arriba.