❺❸ Si z = r_α , ¿qué relación tienen con z los números $r_{\alpha+180^o}$ y $r_{360^o-\alpha}$?

---oo0oo---

❁ z = $r_{\alpha+180^o}$ = r [cos(α+ 180º) + i sen (α + 180º)] = r (-cosα –isenα) = -[r(cosα +isenα)] = -(r_α) = -z, luego son opuestos.

❁ z = $r_{360^o-\alpha}$ = r [cos(360º- α) + i sen (360º- α)] = r (cosα –isenα) = $\bar{z}$ luego son conjugados.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❺❹ Comprueba que siendo, z = a + bi, w = c + di , **:**

a) $\overline{z+w}=\bar{z}+\bar{w};\left\{\begin{array}{c} z+w=a+bi+c+di=(a+c)+(b+d)i \Rightarrow \overline{z+w}=(a+c)-(b+d)i \\ \bar{z}+\bar{w}=a-bi+c-di=(a+c)-(b+d)i, \text{q.e.d.}\end{array}\right\}$

b)
$$\left\{\begin{array}{c} z\cdot w=(a+bi)(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2=(ac-bd)+(ad+bc)i \Rightarrow \overline{zw}=(ac-bd)-(ad+bc)i \\ \bar{z}\cdot\bar{w}=(a-bi)(c-di)=ac-adi-bci+bdi^2=(ac-bd)-(ad+bc)i=\overline{z\cdot w}\ \text{q.e.d.}\end{array}\right\}$$

c) $kz=k(a+bi)=ka+kbi \Rightarrow \overline{kz}=ka-kbi=k(a-bi)=k\cdot\bar{z}\ \forall k\in\Re$ q.e.d.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❺❺ Demuestra que $\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{|z|}$

---oo0oo---

Sea z = r_α, entonces :

$$\frac{1}{z}=\frac{1_{0^o}}{r_\alpha}=\left(\frac{1}{r}\right)_{0^o-\alpha}=\left(\frac{1}{r}\right)_{-\alpha} \Rightarrow \left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{r}=\frac{1}{|z|}\ \text{q.e.d.}$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❺❻ El producto de dos números complejos imaginarios, ¿ puede ser real ? Acláralo con un ejemplo.

---oo0oo---

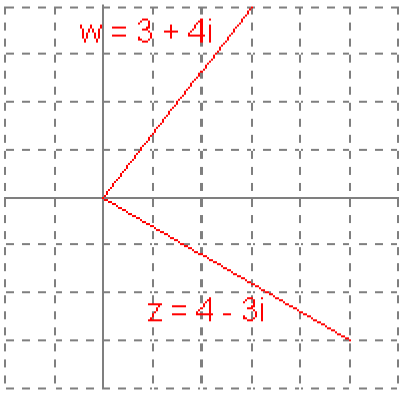
Sí, si son ambos imaginarios puros, por ejemplo z = -2i y w = 3i, su producto es z·w = (-2i)(3i)= -6i^2 = 6 que es real.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❺❼ Representa el número complejo z = 4 – 3i. Multiplícalo por i y comprueba que el resultado que obtienes es el mismo que si aplicas a z un giro de 90º.

---oo0oo---

$z = 4 - 3i$, $w = iz = 4i - 3i^2 = 3 + 4i$ ya que si $z = r_\alpha \Rightarrow w = i\cdot z = 1_{90^o}\cdot r_\alpha = r_{\alpha+90^o}$, lo que se puede visualizar gráficamente representando z y w :



◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❺❽ Halla el número complejo z que se obtiene al transformar el complejo 2 + 3i mediante un giro de 30º con centro en el origen.

---oo0oo---

Un giro de 30º centrado en el origen consiste en multiplicarle por el número $w = 1_{30^o}$:

$$2+3i = \left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13} \\ \alpha = \text{arctg}\dfrac{3}{2} = 56018'35'' \end{array} \right\} = \sqrt{13}_{56^o18'35''} \text{ y } 1_{30^o} = \cos 30^o + i\,\text{sen}30^o = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

Podemos hacer el producto :

◎ En forma binómica : $(2+3i)(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i) = \sqrt{3} + i + \frac{3\sqrt{3}}{2}i - \frac{3}{2} \approx 0'23 + 3'60i$

◎ O en forma polar : $\sqrt{13}_{56^o18'35''}\cdot 1_{30^o} = \sqrt{13}_{86^o18'35''} = \sqrt{13}(\cos 86^o18'35'' + i\,\text{sen}86^o18'35'')$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❺❾ ¿ Qué relación existe entre el argumento de un complejo y el de su opuesto ?

---oo0oo---

Según hemos comprobado en el ejercicio nº ❺❸ un número complejo y su opuesto difieren en 180º, $z = r_\alpha \Rightarrow -z = r_{\alpha+180^o}$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

⑥⓪ ¿ Qué condición debe cumplir un número complejo z = a + bi para que $\bar{z} = \frac{1}{z}$

---oo0oo---

$$\left\{\begin{matrix} \bar{z} = a - bi \\ \frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} i \end{matrix}\right\} \text{igualando } \bar{z} = \frac{1}{z} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} a = \frac{a}{a^2+b^2} \\ b = \frac{b}{a^2+b^2} \end{matrix}\right\}$$

Resolviendo cualesquiera de las dos ecuaciones anteriores :

$$a = \frac{a}{a^2+b^2} \Rightarrow \frac{a}{a} = 1 = a^2 + b^2 = |z| \text{ ó } b = \frac{b}{a^2+b^2} \Rightarrow \frac{b}{b} = 1 = a^2 + b^2 = |z|, \text{ es decir el módulo es unitario}$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

PARA PROFUNDIZAR (📖 ❶❹❾)

⑥❶ La suma de dos números complejos, z = a + bi, w = c + di, dividida por su diferencia, es un número imaginario puro. Prueba que los dos números z y w han de tener el mismo módulo

---oo0oo---

$$\frac{z+w}{z-w} = \frac{a+bi+c+di}{a+bi-c-di} = \frac{(a+c)+(b+d)i}{(a-c)+(b-d)i} = \frac{[(a+c)+(b+d)i]\cdot[(a-c)-(b-d)i]}{[(a-c)+(b-d)i]\cdot[(a-c)-(b-d)i]} =$$

$$= \frac{(a+c)(a-c)-(a+c)(b-d)i+(a-c)(b+d)i-(b+d)(b-d)i^2}{(a-c)^2-(b-d)^2 i^2} =$$

$$\frac{(a^2-c^2+b^2-d^2)}{(a-c)^2+(b-d)^2} + \frac{2ad-2cd}{(a-c)^2+(b-d)^2} i \Rightarrow \text{parte real} = 0; \frac{(a^2-c^2+b^2-d^2)}{(a-c)^2+(b-d)^2} = 0$$

Luego $a^2 - c^2 + b^2 - d^2 = 0$ y trasponiendo términos $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ es decir sus módulos serán iguales |z| = |w| q.e.d.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

⑥❷ Sea z ≠ 0 un complejo y $w = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$**. Prueba que los afijos de z, zw y zw^2 son los vértices de un triángulo equilátero.**

---oo0oo---

Expresemos todo en forma polar :

$z = r_\alpha$

$$w=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\left\{\begin{array}{l} r=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1 \\ \alpha=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}/2}{-1/2}=\operatorname{arctg}-\sqrt{3}=120^{\circ}\end{array}\right\}=1_{120^{\circ}}$$

Luego $z = = r_\alpha$, $z\cdot w = = r_\alpha \cdot 1_{120^{\circ}} = = r_{\alpha+120^{\circ}}$ y $z\cdot w^2 == r_\alpha \cdot(1_{120^{\circ}})^2 == r_\alpha \cdot 1_{240^{\circ}} = = r_{\alpha+240^{\circ}}$, como los tres números tiene el mismo módulo (r) y sus argumentos se diferencian en 120º, (α, α + 120º, α + 240º) formarán sus afijos un triángulo equilátero.

❻❸ Un pentágono regular con centro en el origen de coordenadas tiene uno de sus vértices en el punto $\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ Halla los otros vértices y la longitud de su lado.

---oo0oo---

El número en forma cartesiana le pasamos a binómica y forma polar :

$$z=\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}+\sqrt{2}i=\left\{\begin{array}{l} r=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{2+2}=2 \\ \alpha=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\operatorname{arctg}1=45^{\circ}\end{array}\right\}=2_{45^{\circ}}$$

Para hallar los otros cuatro vértices giramos este 360º/5 =72º que equivale a multiplicar por $1_{72^{\circ}}$, es decir sumamos 72º al argumento :

$$\left\{\begin{array}{l} z_2=2_{45^{\circ}+72^{\circ}}=2_{117^{\circ}}=2(\cos 117^{\circ}+i\operatorname{sen}117^{\circ})=-0'91-3'93i=(-0'91,3'93) \\ z_3=2_{117^{\circ}+72^{\circ}}=2_{189^{\circ}}=2(\cos 189^{\circ}+i\operatorname{sen}189^{\circ})=-1'98-0'31i=(-1'98,-0'31) \\ z_4=2_{189^{\circ}+72^{\circ}}=2_{261^{\circ}}=2(\cos 261^{\circ}+i\operatorname{sen}261^{\circ})=-0'31-0'99i=(-0'31,-0'99) \\ z_5=2_{261^{\circ}+72^{\circ}}=2_{333^{\circ}}=2(\cos 333^{\circ}+i\operatorname{sen}333^{\circ})=1'78-0'91i=(1'78,-0'91)\end{array}\right\}$$

Para hallar la longitud del lado, aplicamos el teorema del coseno a uno de los 5 triángulos formados sabiendo que dos lados miden 2 (el módulo) y el ángulo comprendido es de 72º :

$$l=\sqrt{2^2+2^2-2\cdot 2\cdot 2\cos 72^{\circ}}=\sqrt{4+4-8\cos 72^{\circ}}=\sqrt{5'527864}=2'35$$

❻❹ Si el producto de dos números complejos es –8 y dividiendo el cubo de uno de ellos entre el otro obtenemos de resultado 2, ¿ cuánto valen el módulo y el argumento de cada uno?

---oo0oo---

Sean $z = r_\alpha$ y $w = s_\beta$, se ha de cumplir :

$$\left\{\begin{array}{l} z\cdot w=-8 \Rightarrow (r_\alpha)(s_\beta)=(rs)_{\alpha+\beta}=8_{180^o} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} r\cdot s=8 \\ \alpha+\beta=180^o \end{array}\right\} \\ \dfrac{z^3}{w}=2 \Rightarrow \dfrac{(r_\alpha)^3}{s_\beta}=\dfrac{(r^3)_{3\alpha}}{s_\beta}=\left(\dfrac{r^3}{s}\right)_{3\alpha-\beta}=2_{0^o} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \dfrac{r^3}{s}=2 \\ 3\alpha-\beta=0^o \end{array}\right\} \end{array}\right\}$$

Resolvemos los sistemas formados por las ecuaciones de los módulos y los argumentos:

$$\left\{\begin{array}{l} r\cdot s=8 \\ \dfrac{r^3}{s}=2 \end{array}\right. \Rightarrow s=\frac{8}{r} \Rightarrow \text{sustituyendo en la } 2^a\ \frac{r^3}{8/r}=2 \Rightarrow r^4=16 \Rightarrow r=\sqrt[4]{16}=2 \Rightarrow s=\frac{8}{2}=4$$

$$\left\{\begin{array}{c} \alpha+\beta=180^o \\ 3\alpha-\beta=0^o \end{array}\right\} \Rightarrow 3\alpha=\beta \Rightarrow 4\alpha=180^o \Rightarrow \alpha=\frac{180^o}{4}=45^o \Rightarrow \beta=3\cdot 45^o=135^o$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

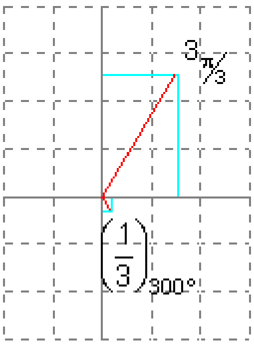
65 Calcula el inverso de los números complejos siguientes y representa gráficamente el resultado:

a) $3_{\pi/3}$, b) 2i , c) – 1 + i

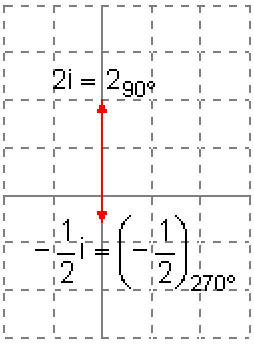
¿ Qué relación existe entre el módulo y el argumento de un número complejo y de su inverso?

---oo0oo---

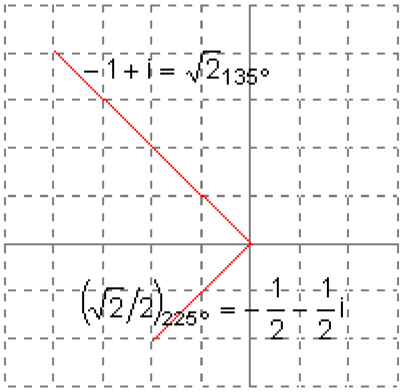
$$\text{a) } 3_{\pi/3} \Rightarrow \frac{1}{3_{60^o}}=\frac{1_{0^o}}{3_{60^o}}=\left(\frac{1}{3}\right)_{-60^o}=\left(\frac{1}{3}\right)_{300^o} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 3_{60^o}=3(\cos 60^o + i\,\mathrm{sen}\,60^o)=1'5+2'60i \\ \left(\dfrac{1}{3}\right)_{300^o}=\left(\dfrac{1}{3}\right)(\cos 300^o + i\,\mathrm{sen}\,300^o)=0'17-0'29i \end{array}\right\}$$



$$\text{b) } 2i=2_{90^o} \Rightarrow \frac{1}{2i}=-\frac{1}{2}i=\left(-\frac{1}{2}\right)_{270^o}$$



c) $-1+i = \sqrt{2}_{135º} \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2}_{135º}} = \dfrac{1_{0º}}{\sqrt{2}_{135º}} = \left(\sqrt{2}/2\right)_{-135º} = \left(\sqrt{2}/2\right)_{225º} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$



Vemos que en todos los casos los módulos son inversos y los argumentos suman 360º es decir :

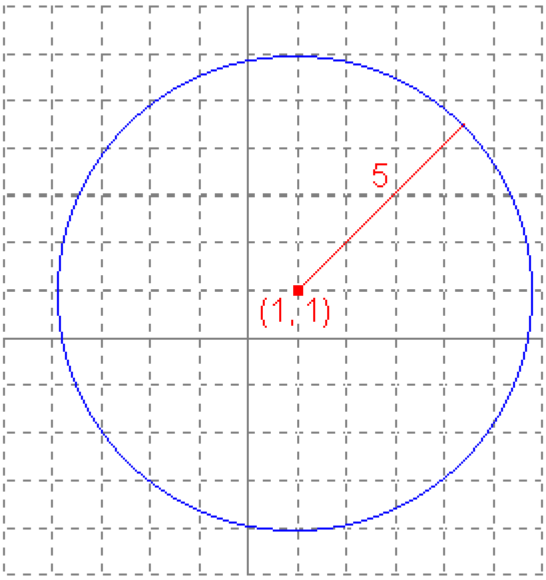
$$z = r_\alpha \Rightarrow \frac{1}{z} = \left(\frac{1}{r}\right)_{360º-\alpha}$$

❻❻ **Representa gráficamente las igualdades siguientes. ¿Qué figura se determina en cada caso?**

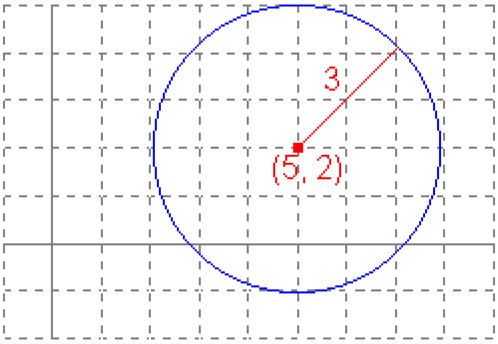
a) | z – (1+i) | = 5 b) | z – (5 +2i) | = 3

---oo0oo---

a) Todos los números z tal que el módulo de la diferencia respecto del (1 + i) es igual a 5, es decir los que se encuentran en una circunferencia de centro en el punto (1, 1) y radio 5 :



b) Todos los números z tal que el módulo de la diferencia respecto del (5 +2i) es igual a 3, es decir los que se encuentran en una circunferencia de centro en el punto (5, 2) y radio 3 :



◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❻❼ Escribe la condición que verifican todos los números complejos cuyos afijos estén en la circunferencia de centro (1, 1) y radio 3.

---oo0oo---

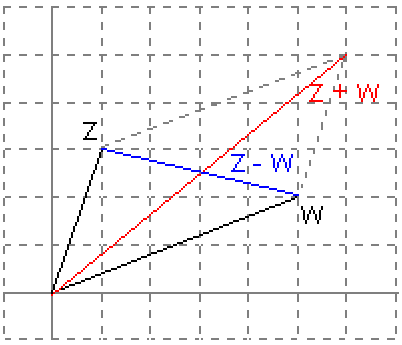
Distan 3 unidades de un punto de coordenadas (1, 1), en el plano complejo equivalen a los números z tal que | z –(1+ i) | =3

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

PARA PENSAR UN POCO MÁS (📖 ❶❹❾)

❻❽ Demuestra, utilizando números complejos, que en un paralelogramo cualquiera la suma de los cuadrados de las diagonales es igual al doble de la suma de los cuadrados de los lados.

---oo0oo---



Las diagonales miden | z + w | la mayor y | z – w| la menor, luego :

$|z+w|^2 + |z-w|^2 = (z+w)\cdot\overline{(z+w)} + (z-w)\cdot\overline{(z-w)} = (z+w)\cdot(\overline{z}+\overline{w}) + (z-w)\cdot(\overline{z}-\overline{w}) = z\cdot\overline{z} + z\cdot\overline{w} + w\cdot\overline{z} +$

$+ w\cdot\overline{w} + z\cdot\overline{z} - z\cdot\overline{w} - w\cdot\overline{z} + w\cdot\overline{w} = 2z\cdot\overline{z} + 2w\cdot\overline{w} = 2\left(z\cdot\overline{z} + w\cdot\overline{w}\right) = 2\left(|\,z\,|^2 + |\,w\,|^2\right)$ q.e.d.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈