❸❹ Representa gráficamente los resultados que obtengas al hallar $\sqrt[3]{-2-2i}$ y calcula el lado del triángulo formado al unir esos tres puntos.

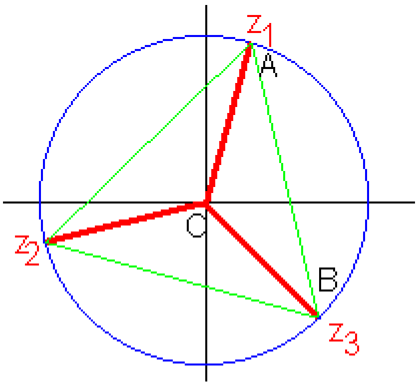
---oo0oo---

Para hallar las raíces primero pasamos el número a forma polar :

$$-2-2i=\left\{\begin{array}{c} r=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2} \\ \alpha=\operatorname{arctg}\dfrac{-2}{-2}=225^o \text{ pues } 180^o<\alpha<270^o \end{array}\right\}=2\sqrt{2}_{225^o}$$

Y ahora hallamos la raíz :

$$\sqrt[3]{\sqrt{8}_{225^o}}=\left(\sqrt[3]{\sqrt{8}}\right)_{\frac{225^o+360k^o}{3}}=\left(\sqrt[6]{2^3}\right)_{75^o+120k^o}=\left\{\begin{array}{l} k=0\Rightarrow z_1=\sqrt{2}_{75^o} \\ k=1\Rightarrow z_2=\sqrt{2}_{195^o} \\ k=2\Rightarrow z_3=\sqrt{2}_{315^o} \end{array}\right.$$



Para hallar la longitud de los lados aplicamos el teorema del coseno al triángulo AOB, de Características :

$$\text{Lados } \overline{OA}=\overline{OB}=\sqrt{2} \text{ y el ángulo comprendido } \alpha=120^o$$

$$\overline{AB}=\sqrt{\overline{OA}^2+\overline{OB}^2-2\overline{OA}\cdot\overline{OB}\cdot\cos\alpha}=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2-2\sqrt{2}\sqrt{2}\cos 120^o}=\sqrt{2+2-4\left(-\frac{1}{2}\right)}=\sqrt{6}$$

❸❺ Los afijos de las raíces cúbicas de 8i son los vértices de un triángulo equilátero. Compruébalo. ¿Determinan el mismo triángulo los afijos de $\sqrt[3]{-8i}$, $\sqrt[3]{8}$ o $\sqrt[3]{-8}$?

Representa gráficamente esos cuatro triángulos que has obtenido.

---oo0oo---

Hallemos las cuatro raíces cúbicas :

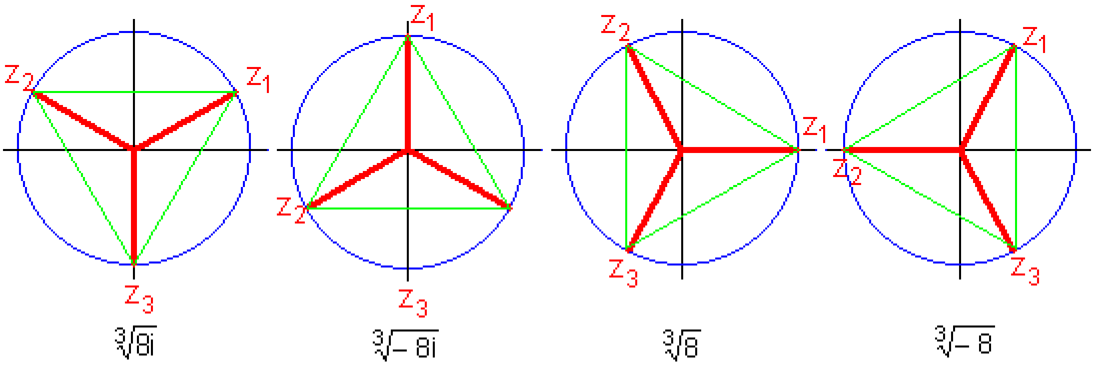
$$\sqrt[3]{8i}=\sqrt[3]{8_{90^o}}=\left(\sqrt[3]{8}\right)_{\frac{90+360k}{3}}=2_{30^o+120k^o}=\begin{cases}k=0\Rightarrow z_1=2_{30^o}\\k=1\Rightarrow z_2=2_{150^o}\\k=2\Rightarrow z_3=2_{270^o}\end{cases}$$

$$\sqrt[3]{-8i}=\sqrt[3]{8_{270^o}}=\left(\sqrt[3]{8}\right)_{\frac{270+360k}{3}}=2_{90^o+120k^o}=\begin{cases}k=0\Rightarrow z_1=2_{90^o}\\k=1\Rightarrow z_2=2_{210^o}\\k=2\Rightarrow z_3=2_{330^o}\end{cases}$$

$$\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{8_{0^o}}=\left(\sqrt[3]{8}\right)_{\frac{0+360k}{3}}=2_{120k^o}=\begin{cases}k=0\Rightarrow z_1=2_{0^o}\\k=1\Rightarrow z_2=2_{120^o}\\k=2\Rightarrow z_3=2_{240^o}\end{cases}$$

$$\sqrt[3]{-8}=\sqrt[3]{8_{180^o}}=\left(\sqrt[3]{8}\right)_{\frac{180+360k}{3}}=2_{60^o+120k^o}=\begin{cases}k=0\Rightarrow z_1=2_{60^o}\\k=1\Rightarrow z_2=2_{180^o}\\k=2\Rightarrow z_3=2_{300^o}\end{cases}$$

Observamos que en los cuatro casos, las tres raíces tienen el mismo módulo y están separadas ángulos de 120º luego formarán triángulos equiláteros :

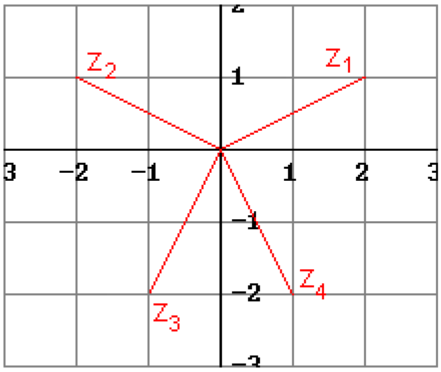


◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❸❻ ¿Pueden ser $z_1 = 2 + i$, $z_2 = -2 + i$, $z_3 = -1 - 2i$ y $z_4 = 1 - 2i$, las raíces de un número complejo? Justifica tu respuesta.

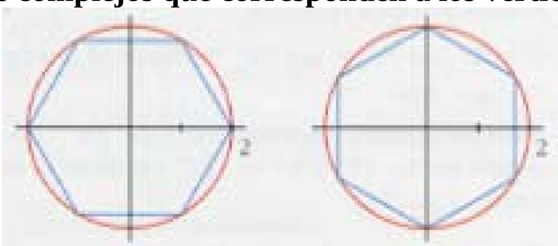
---oo0oo---

Como son cuatro serían raíces cuartas y para que sean raíces cuartas de un número han de estar separadas ángulos de 360º/4 = 90º , la forma más rápida de comprobarlo es representándolos y vemos que no forman ángulos de 90º (si cupiera alguna duda, lo adecuado sería hallar los módulos, que sí son iguales y los argumentos de los cuatro números y comprobar que los ángulos no se diferencian en 90º, lo que, en este caso no es necesario pues es evidente en el dibujo) :



◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❸❼ **Halla los números complejos que corresponden a los vértices de estos hexágonos:**



---oo0oo---

① Tomamos un número que sea evidente y vamos sumando 360º/6 = 60º que es el ángulo que forman :

$$\begin{cases} z_1 = 2_{0^o} = 2(\cos 0^o + i\,\mathrm{sen} 0^o) = 2 \\ z_2 = 2_{0^o+60^o} = 2_{60^o} = 2(\cos 60^o + i\,\mathrm{sen} 60^o) = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 + \sqrt{3}i \\ z_3 = 2_{60^o+60^o} = 2_{120^o} = 2(\cos 120^o + i\,\mathrm{sen} 120^o) = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1 + \sqrt{3} \\ z_4 = 2_{120^o+60^o} = 2_{180^o} = 2(\cos 180^o + i\,\mathrm{sen} 180^o) = 2(-1 + 0i) = -2 \\ z_5 = 2_{180^o+60^o} = 2_{240^o} = 2(\cos 240^o + i\,\mathrm{sen} 240^o) = 2\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1 - \sqrt{3} \\ z_6 = 2_{240^o+60^o} = 2_{300^o} = 2(\cos 300^o + i\,\mathrm{sen} 300^o) = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 - \sqrt{3} \end{cases}$$

② Tomamos el número que coincide con la parte positiva del eje vertical, que es el 2º número y vale 2_{90^o} :

$$\begin{cases} z_2 = 2_{90^o} = 2(\cos 90^o + i\,\mathrm{sen} 90^o) = 2(0 + i) = 2i \\ z_1 = 2_{90^o-60^o} = 2_{30^o} = 2(\cos 30^o + i\,\mathrm{sen} 30^o) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = \sqrt{3} + i \\ z_3 = 2_{90^o+60^o} = 2_{150^o} = 2(\cos 150^o + i\,\mathrm{sen} 150^o) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = -\sqrt{3} + i \\ z_4 = 2_{150^o+60^o} = 2_{210^o} = 2(\cos 210^o + i\,\mathrm{sen} 210^o) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = -\sqrt{3} - i \\ z_5 = 2_{210^o+60^o} = 2_{270^o} = 2(\cos 270^o + i\,\mathrm{sen} 270^o) = 2(0 - i) = -2i \\ z_6 = 2_{270^o+60^o} = 2_{330^o} = 2(\cos 330^o + i\,\mathrm{sen} 330^o) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = \sqrt{3} - i \end{cases}$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❸❽ **¿Pueden ser las raíces de un número complejo z, los números 2_{28^o}, 2_{100^o}, 2_{172^o}, 2_{244^o} y 2_{316^o} ?**

---oo0oo---

Tienen igual módulo, luego sólo hay que comprobar que difieren en 72º :
28° + 72° = 100°; 100° + 72° = 172° ;172° + 72° = 244°; 244° + 72° = 316°
Sí son las raíces quintas de un número complejo. Lo hallamos elevando a la quinta cualquiera de ellas:

$$z = (2_{28^o})^5 = 32_{140^o}$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❸❾ **El complejo 3_{40^o} es vértice de un pentágono regular. Halla los otros vértices y el número complejo cuyas raíces quintas son esos vértices.**

---oo0oo---

Al formar un pentágono regular, el resto de los vértices se obtienen multiplicando el anterior por 1_{72^o} o lo que es lo mismo, sumando 72º al argumento del anterior :

$$z_1 = 3_{40^o},\ z_2 = 3_{40^o+72} = 3_{112^o},\ z_3 = 3_{112^o+72} = 3_{184^o},\ z_4 = 3_{184^o+72} = 3_{256^o},\ z_5 = 3_{256^o+72} = 3_{328^o}$$

Como son raíces quintas de un cierto número complejo, para hallarlo elevamos uno de ellos a la quinta potencia :

$$z = (z_1)^5 = (3_{40^o})^5 = (3^5)_{40^o\cdot 5} = 243_{200^o}$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❹⓿ **Una de las raíces cúbicas de un número complejo z es 1 + i. Halla z y las otras raíces cúbicas.**

---oo0oo---

Hallemos z :

$$\sqrt[3]{z} = 1+i \Rightarrow z = (1+i)^3 = 1^3 + 3i + 3i^2 + i^3 = 1+3i-3-i = -2+2i$$

Para hallar las otras dos raíces, podemos hallar las raíces o pasar la conocida a forma polar y sumar 360º/3 =120º :

$$1+i = \left\{\begin{array}{l} r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \\ \alpha = \text{rctg}1 = 45^o \end{array}\right\} = \sqrt{2}_{45^o} \Rightarrow z_2 = \sqrt{2}_{45^o+120^o} = \sqrt{2}_{165^o}; z_3 = \sqrt{2}_{165^o+120^o} = \sqrt{2}_{285^o}$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

Ecuaciones en C

❹❶ **Resuelve las siguientes ecuaciones y expresa las soluciones en forma binómica:**

a) $x^2 + 4 = 0$
b) $x^2 + x + 4 = 0$
b) $x^2 + 3x + 7 = 0$
d) $x^2 - x + 1 = 0$

---oo0oo---

a) $x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = -4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-4} = \pm\sqrt{4}\sqrt{-1} = \pm 2i$

b) $x^2 + x + 4 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot 4}}{2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-15}}{2} = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{15}}{2} = \dfrac{-1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{15}}{2}i$

c) $x^2 + 3x + 7 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4\cdot 7}}{2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{-19}}{2} = \dfrac{-3 \pm i\sqrt{19}}{2} = -\dfrac{3}{2} \pm \dfrac{\sqrt{19}}{2}i$

d) $x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

❹❷ **Resuelve las ecuaciones:**

a) $x^5 + 32 = 0$
b) $ix^3 - 27 = 0$

---oo0oo---

a) $x^5 + 32 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{32_{180^\circ}} = \left(\sqrt[5]{32}\right)_{\frac{180+360k}{5}} = 2_{36^\circ+72k^\circ} = \begin{cases} k = 0, x_1 = 2_{36^\circ} \\ k = 1, x_2 = 2_{108^\circ} \\ k = 2, x_3 = 2_{180^\circ} \\ k = 3, x_4 = 2_{252^\circ} \\ k = 4, x_5 = 2_{324^\circ} \end{cases}$

c) $ix^3 - 27 = 0$, multiplicando por i : $i^2x^3 - 27i = 0$, $-x^3 - 27i = 0$, $x^3 + 27i = 0$, $x^3 = -27i = 27_{270^\circ}$, luego hemos de hallar las raíces cúbicas de 27_{270° :

$$x = \sqrt[3]{27_{270^\circ}} = \left(\sqrt[3]{27}\right)_{\frac{270+360k}{3}} = 3_{90^\circ+120k^\circ} = \begin{cases} k = 0 \Rightarrow x_1 = 3_{90^\circ} = 3(\cos 90^\circ + i\,\text{sen}\,90^\circ) = 3i \\ k = 1 \Rightarrow x_2 = 3_{210^\circ} = 3(\cos 210^\circ + i\,\text{sen}\,210^\circ) = -\dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3i}{2} \\ k = 2 \Rightarrow x_3 = 3_{330^\circ} = 3(\cos 330^\circ + i\,\text{sen}\,330^\circ) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}i \end{cases}$$

❹❸ Resuelve las siguientes ecuaciones en C :

a) $z^2 + 4 = 0$
b) $z^2 - 2z + 5 = 0$
c) $2z^2 + 10 = 0.$

---oo0oo---

a) $z^2+4=0 \Rightarrow z=\pm\sqrt{-4}=\pm i\sqrt{4}=\pm 2i$

b) $z^2-2z+5=0 \Rightarrow z=\dfrac{2\pm\sqrt{4-20}}{2}=\dfrac{2\pm\sqrt{-16}}{2}=\dfrac{2\pm 4i}{2}=1\pm 2i$

c) $2z^2+10=0 \Rightarrow z^2=-5 \Rightarrow z=\pm\sqrt{-5}=\pm\sqrt{5}\,i$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❹❹ Obtén las cuatro soluciones de las siguientes ecuaciones:

a) $z^4 - 1 = 0$
b) $z^4 + 16 = 0$
c) $z^4 - 8z = 0$

---oo0oo---

a) $$z^4-1=0 \Rightarrow z=\sqrt[4]{1}=\sqrt[4]{1_{0^o}}=1_{\frac{0^o+360k^o}{4}}=1_{90k}=\begin{cases} k=0 \Rightarrow z_1=1_{0^o}=\cos 0^o+i\,\text{sen}\,0^o=1 \\ k=1 \Rightarrow z_2=1_{90^o}=\cos 90^o+i\,\text{sen}\,90^o=i \\ k=2 \Rightarrow z_3=1_{180^o}=\cos 180^o+i\,\text{sen}\,180^o=-1 \\ k=3 \Rightarrow z_4=1_{270^o}=\cos 270^o+i\,\text{sen}\,270^o=-i \end{cases}$$

b)

$$z^4+16=0 \Rightarrow z=\sqrt[4]{-16}=\sqrt[4]{16_{180^o}}=2_{\frac{180+360k}{4}}=2_{45^o+90k}=\begin{cases} k=0 \Rightarrow z_1=2_{45^o}=2(\cos 45^o+i\,\text{sen}\,45^o)=\sqrt{2}+i\sqrt{2} \\ k=1 \Rightarrow z_2=2_{135^o}=2(\cos 135^o+i\,\text{sen}\,135^o)=-\sqrt{2}+i\sqrt{2} \\ k=2 \Rightarrow z_3=2_{225^o}=2(\cos 225^o+i\,\text{sen}\,225^o)=-\sqrt{2}-i\sqrt{2} \\ k=3 \Rightarrow z_3=2_{315^o}=2(\cos 315^o+i\,\text{sen}\,315^o)=\sqrt{2}-i\sqrt{2} \end{cases}$$

c) $$z^4-8z=0 \Rightarrow z(z^3-8)=0 \Rightarrow \begin{cases} z_1=0 \\ z^3-8=0 \Rightarrow z=\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{8_{0^o}}=2_{120k^o}=\begin{Bmatrix} k=0, z_2=2_{0^o}=2 \\ k=1, z_3=2_{120^o}=-1+\sqrt{3}i \\ k=2, z_4=2_{240^o}=-1-\sqrt{3}i \end{Bmatrix} \end{cases}$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❹❺ Resuelve estas ecuaciones y expresa las soluciones en forma binómica:

a) $z^3 + 8i = 0$
b) $iz^4 + 4 = 0$

---oo0oo---

a) $z^3+8i=0 \Rightarrow z=\sqrt[3]{-8i}=\sqrt[3]{8_{270^o}}=2_{\frac{270+360k}{3}}=2_{90^o+120k^o}=\begin{cases} k=0 \rightarrow z_1=2_{90^o}=2(\cos 90^o + i\,\text{sen}90^o)=2i \\ k=1 \rightarrow z_2=2_{210^o}=2(\cos 210^o + i\,\text{sen}210^o)=-\sqrt{3}-i \\ k=2 \rightarrow z_3=2_{330^o}=2(\cos 330^o + i\,\text{sen}330^o)=\sqrt{3}-i \end{cases}$

b) $iz^4+4=0$, multiplicando por i: $-z^4+4i=0$ y cambiando de signo $z^4-4i=0$, es decir :

$$z^4=4i \Rightarrow z=\sqrt[4]{4i}=\sqrt[4]{4_{90^o}}=\left(\sqrt[4]{4}\right)_{\frac{90+360k}{4}}=\sqrt{2}_{22'5^o+90k^o}=\begin{cases} k=0 \rightarrow \sqrt{2}_{22'5^o}=\sqrt{2}(\cos 22'5^o + i\,\text{sen}22'5^o)=1'3+0'54i \\ k=1 \rightarrow \sqrt{2}_{112'5^o}=\sqrt{2}(\cos 112'5^o + i\,\text{sen}112'5^o)=-0'54+1'3i \\ k=2 \rightarrow \sqrt{2}_{202'5^o}=\sqrt{2}(\cos 202'5^o + i\,\text{sen}202'5^o)=-1'3-0'54i \\ k=3 \rightarrow \sqrt{2}_{292'5^o}=\sqrt{2}(\cos 292'5^o + i\,\text{sen}292'5^o)=0'54-1'3i \end{cases}$$

❹❻ Escribe una ecuación de segundo grado que tenga por soluciones: $z_1 = 1+i$ y $z_2 = 2-3i$

---oo0oo---

En vez de cómo propone el libro vamos a usar la forma canónica de la ecuación de 2º grado : $x^2 - \mathbf{s}x + \mathbf{p} = 0$, en donde s = suma de soluciones = $z_1 + z_2$ y **p** = producto de soluciones = $z_1 \cdot z_2$:

s = $z_1 + z_2$ = 1+i + 2 - 3i = 3 –2i y **p** = $z_1 \cdot z_2$ = (1 + i)(2 - 3i) = **5 – i** , luego la ecuación es :

$$x^2 - sx + p = x^2 - (3-2i)x + (5-i) = 0$$

❹❼ Escribe una ecuación de segundo grado cuyas soluciones sean 2 – 3i y 2 + 3i.

---oo0oo---

Ecuación canónica : $x^2 - \mathbf{s}x + \mathbf{p} = 0$, hallemos **s** y **p** :

s = 2 – 3i + 2 + 3i = **4** y **p** = (2 – 3i) (2 + 3i) = $2^2 - (3i)^2 = 4 - 9i^2 = 4 + 9 =$ **13**

$$x^2 - sx + p = x^2 - 4x + 13 = 0$$

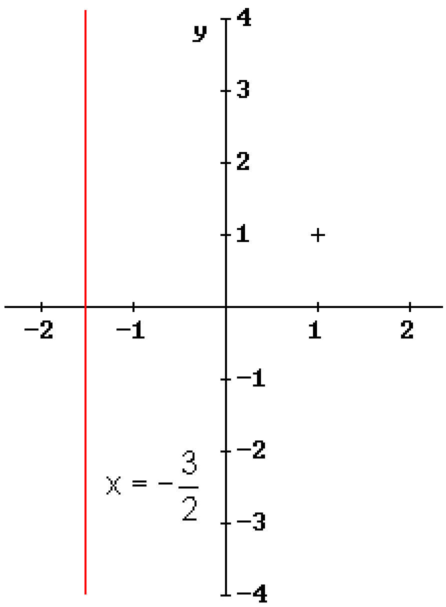
Interpretación gráfica de igualdades entre complejos

❹❽ Representa los números complejos z tales que $z + \bar{z} = -3$.

---oo0oo---

$$z = x + yi \;;\; \bar{z} = x - yi \text{ , luego } z+\bar{z} = x+yi+x-yi = 2x = -3 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

Recta que representada es:



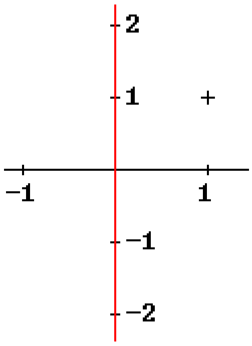
◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

49 Representa los números complejos que verifican: a) $\overline{z} = -z$ **, b)** $\left|z+\overline{z}\right| = 3$ **, c)** $\left|z-\overline{z}\right| = 4$

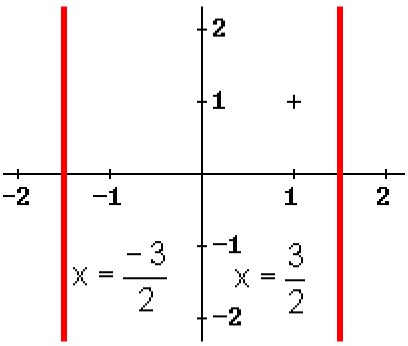
---oo0oo---

Sean z = x + yi , $\overline{z}$ = x-yi

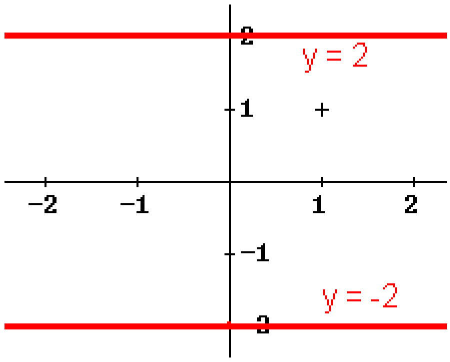
a) $\overline{z} = -z \Rightarrow x - yi = -x - yi \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$, el eje vertical o de ordenadas



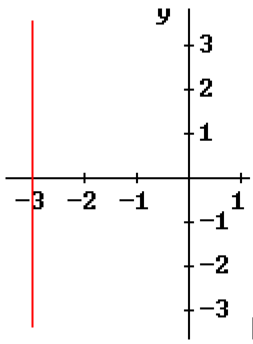
b) $|z+\overline{z}| = |x+yi+x-yi| = |2x| = 3 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \\ 2x = -3 \Rightarrow x = \frac{-3}{2} \end{array}\right\}$, dos rectas verticales

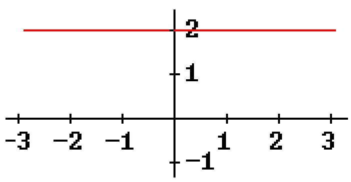


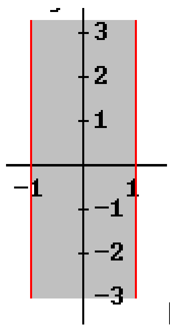
c) $|z-\bar{z}|=|x+yi-x+yi|=|2yi|=4 \Rightarrow |2y|=4 \Rightarrow \left\{\begin{matrix} y=2 \\ y=-2 \end{matrix}\right\}$, dos rectas horizontales.

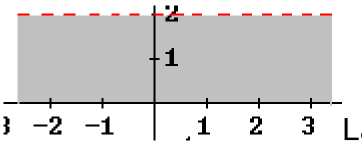


50 Escribe las condiciones que deben cumplir los números complejos cuya representación gráfica es la siguiente:

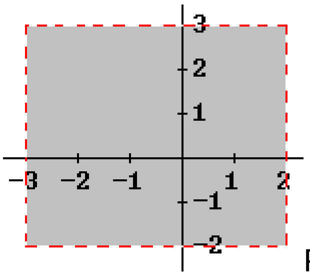
a)  La parte real del número ha de ser igual a –3 , Re(z) = - 3

b)  La parte imaginaria ha de ser igual a 2, Im(z) = 2

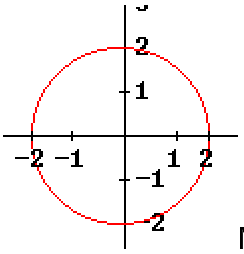
c)  La parte real comprendida entre -1 y 1, $-1 \leq Re(z) \leq 1$

d) 

La parte imaginaria comprendida entre 0 y 2 , $0 \le \mathrm{Im}(z) < 2$

d) 

Parte imaginaria comprendida entre .2 y 3 y la parte real entre –3 y 2 : $\begin{cases} -3 < \mathrm{Re}(z) < 2 \\ -2 < \mathrm{Im}(z) < 3 \end{cases}$.

f) 

Módulo del número = 2, $|z| = 2$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

CUESTIONES TEÓRICAS (📖 ❶❹❾)

❺❶ ¿Se puede decir que un número complejo es real si su argumento es 0?

---oo0oo---

No, también son reales los números negativos cuyo argumento es 180º.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❺❷ Prueba que $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$

---oo0oo---

Sea z = a + bi.

$$\left\{ \begin{array}{c} |z| = \sqrt{a^2+b^2} \\ \sqrt{z\cdot\bar{z}} = \sqrt{(a+bi)(a-bi)} = \sqrt{a^2-b^2i^2} = \sqrt{a^2+b^2} = |z| \end{array} \right\}$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈