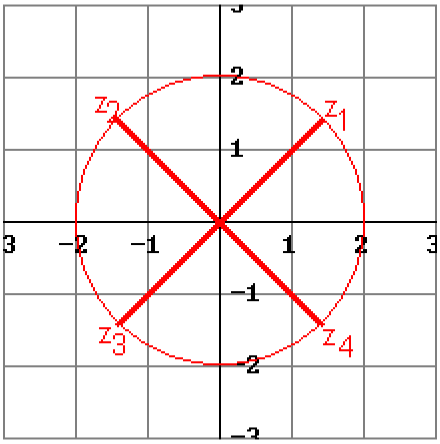
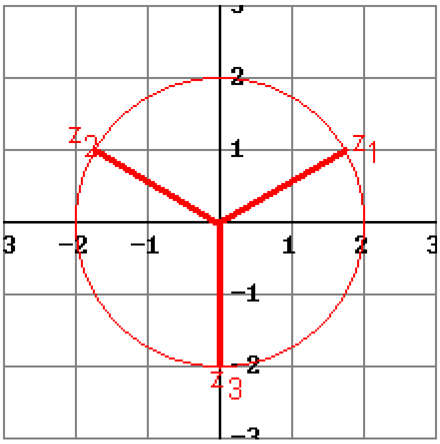
b) $\sqrt[4]{-16} = \sqrt[4]{16_{180^\circ}} = \left(\sqrt[4]{16}\right)_{\frac{180+360k}{4}} = 2_{45^\circ+90k^\circ} = \begin{cases} k=0 \Rightarrow z_1 = 2_{45^\circ} = 2(\cos 45^\circ + i\,\mathrm{sen}45^\circ) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}+\sqrt{2}i \\ k=1 \Rightarrow z_2 = 2_{135^\circ} = 2(\cos 135^\circ + i\,\mathrm{sen}135^\circ) = 2\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -\sqrt{2}+\sqrt{2} \\ k=2 \Rightarrow z_3 = 2_{225^\circ} = 2(\cos 225^\circ + i\,\mathrm{sen}225^\circ) = 2\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -\sqrt{2}-\sqrt{2} \\ k=3 \Rightarrow z_4 = 2_{315^\circ} = 2(\cos 315^\circ + i\,\mathrm{sen}315^\circ) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}-\sqrt{2} \end{cases}$




c) $\sqrt[3]{8i} = \sqrt[3]{8_{90^\circ}} = \left(\sqrt[3]{8}\right)_{\frac{90+360k}{3}} = 2_{30^\circ+120k^\circ} = \begin{cases} k=0 \Rightarrow z_1 = 2_{30^\circ} = 2(\cos 30^\circ + i\,\mathrm{sen}30^\circ) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3}+i \\ k=1 \Rightarrow z_2 = 2_{150^\circ} = 2(\cos 150^\circ + i\,\mathrm{sen}150^\circ) = 2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3}+i \\ k=2 \Rightarrow z_3 = 2_{270^\circ} = 2(\cos 270^\circ + i\,\mathrm{sen}270^\circ) = 2(-i) = -2i \end{cases}$




**19 Calcula pasando a forma polar** :

**a)** $\left(1+i\sqrt{3}\right)^5$, pasamos primero la base a forma polar:

$$1+i\sqrt{3}=\left\{\begin{array}{c} r=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=2 \\ \alpha=\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{1}=60^o \end{array}\right\}=2_{60^o}$$ , y ahora hallamos la potencia:

$$\left(1+i\sqrt{3}\right)^5=\left(2_{60^o}\right)^5=\left(2^5\right)_{60^o\cdot 5}=32_{300^o}=32(\cos 300^o+i\,\mathrm{sen}300^o)=32\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=16-16\sqrt{3}\,i$$

**b)** $\left(-1-i\sqrt{3}\right)^6\left(\sqrt{3}-i\right)$, pasamos a forma polar ambos números :

$$-1-i\sqrt{3}=\left\{\begin{array}{c} r=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=2 \\ \alpha=\operatorname{arctg}\dfrac{-\sqrt{3}}{-1}=240^o,\ \text{ya que } 180^o<\alpha<270^o \end{array}\right\}=2_{240^o}$$

$$\sqrt{3}-i=\left\{\begin{array}{c} r=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=2 \\ \alpha=\operatorname{arctg}\dfrac{-1}{\sqrt{3}}=330^o,\ \text{ya que } 270^o<\alpha<360^o \end{array}\right\}=2_{330^o}$$

Ahora realizamos las operaciones en polares :

$$\left(-1-i\sqrt{3}\right)^6\left(\sqrt{3}-i\right)=\left(2_{240^o}\right)^6(2_{330^o})=\left(2^6{}_{240^o\cdot 6}\right)(2_{330^o})=(64_{1440^o})(2_{330^o})=(64\cdot 2)_{1440^o+330^o}=128_{1770^o}=128_{330^o}$$

Y pasando a forma binómica :

$$128_{330^o}=128(\cos 330^o+i\,\mathrm{sen}330^o)=128\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)=64\sqrt{3}-64i$$

**c)** $\sqrt[4]{-2+2\sqrt{3}i}$ , pasmos el radican do a forma polar :

$$-2+2\sqrt{3}i=\left\{\begin{array}{c} r=\sqrt{(-2)^2+(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{16}=4 \\ \alpha=\operatorname{arctg}\dfrac{2\sqrt{3}}{-2}=\operatorname{arctg}-\sqrt{3}=120^o,\ \text{ya que } 90^o<\alpha<180^o \end{array}\right\}=4_{120^o}$$

y ahora hallamos las raíces :

$$\sqrt[4]{-2+2\sqrt{3}i}=\sqrt[4]{4_{120^o}}=\left(\sqrt[4]{4}\right)_{\frac{120+360k}{4}}=\sqrt{2}_{30^o+90k^o}=\left\{\begin{array}{l} k=0\Rightarrow z_1=\sqrt{2}_{30^o}=\sqrt{2}(\cos 30^o+i\,\mathrm{sen}30^o)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)=\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i \\ k=1\Rightarrow z_2=\sqrt{2}_{120^o}=\sqrt{2}(\cos 120^o+i\,\mathrm{sen}120^o)=\sqrt{2}\left(\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i \\ k=2\Rightarrow z_3=\sqrt{2}_{210^o}=\sqrt{2}(\cos 210^o+i\,\mathrm{sen}210^o)=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)=-\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i \\ k=3\Rightarrow z_4=\sqrt{2}_{300^o}=\sqrt{2}(\cos 300^o+i\,\mathrm{sen}300^o)=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}i}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}i \end{array}\right.$$

**d)** $$\frac{8}{(1-i)^5}=\left\{\begin{array}{c}8=8_{0^\circ}\\ 1-i=\left\{\begin{array}{c}r=\sqrt{(1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}\\ \alpha=\operatorname{arctg}\frac{-1}{1}=315^\circ,\ \text{ya que } 270^\circ<\alpha<360^\circ\end{array}\right\}=\sqrt{2}_{315^\circ}\end{array}\right\}=\frac{8_{0^\circ}}{(\sqrt{2}_{315^\circ})^5}$$

$$\frac{8_{0^\circ}}{\left(\sqrt{2}_{315^\circ}\right)^5}=\frac{8_{0^\circ}}{\sqrt{2^5}_{315^\circ\cdot 5}}=\frac{8_{0^\circ}}{4\sqrt{2}_{1575^\circ}}=\frac{8_{0^\circ}}{4\sqrt{2}_{360^\circ\cdot 4+135^\circ}}=\frac{8_{0^\circ}}{4\sqrt{2}_{135^\circ}}=\left(\frac{8}{4\sqrt{2}}\right)_{-135^\circ}=\sqrt{2}_{225^\circ}=\sqrt{2}(\cos 225^\circ+i\operatorname{sen}225^\circ)=-1-i$$

**e)**

$$\sqrt[6]{-64}=\sqrt[6]{64_{180^\circ}}=\left(\sqrt[6]{64}\right)_{\frac{180+360k}{6}}=2_{30^\circ+60k^\circ}=\left\{\begin{array}{l}k=0\Rightarrow z_1=2_{30^\circ}=2(\cos 30^\circ+i\operatorname{sen}30^\circ)=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)=\sqrt{3}+i\\ k=1\Rightarrow z_2=2_{90^\circ}=2(\cos 90^\circ+i\operatorname{sen}90^\circ)=2(i)=2i\\ k=2\Rightarrow z_3=2_{150^\circ}=2(\cos 150^\circ+i\operatorname{sen}150^\circ)=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)=-\sqrt{3}+i\\ k=3\Rightarrow z_4=2_{210^\circ}=2(\cos 210^\circ+i\operatorname{sen}210^\circ)=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)=-\sqrt{3}-i\\ k=4\Rightarrow z_5=2_{270^\circ}=2(\cos 270^\circ+i\operatorname{sen}270^\circ)=2(-i)=-2i\\ k=5\Rightarrow z_6=2_{330^\circ}=2(\cos 330^\circ+i\operatorname{sen}330^\circ)=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)=\sqrt{3}-i\end{array}\right.$$

**f)** $\sqrt{-1-i}$, pasamos el radicando a forma polar :

$$-1-i=\left\{\begin{array}{c}r=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}\\ \alpha=\operatorname{arctg}\frac{-1}{-1}=225^\circ,\ \text{ya que } 180^\circ<\alpha<270^\circ\end{array}\right\}=\sqrt{2}_{225^\circ}$$

$$\sqrt{-1-i}=\sqrt{\sqrt{2}_{225^\circ}}=\sqrt[4]{2}_{\frac{225+360k}{2}}=\sqrt[4]{2}_{112'5^\circ+180k^\circ}=\left\{\begin{array}{l}k=0\Rightarrow \sqrt[4]{2}_{112'5^\circ}=\sqrt[4]{2}(\cos 112'5^\circ+i\operatorname{sen}112'5^\circ)=-0'46+1'1i\\ k=1\Rightarrow \sqrt[4]{2}_{292'5^\circ}=\sqrt[4]{2}(\cos 292'5^\circ+i\operatorname{sen}292'5^\circ)=0'46-1'1i\end{array}\right\}$$

**g)** $$\sqrt[3]{-i}=\sqrt[3]{1_{270^\circ}}=\left(\sqrt[3]{1}\right)_{\frac{270+360k}{3}}=1_{90^\circ+120k^\circ}=\left\{\begin{array}{l}k=0\Rightarrow z_1=1_{90^\circ}=\cos 90^\circ+i\operatorname{sen}90^\circ=i\\ k=1\Rightarrow z_2=1_{210^\circ}=\cos 210^\circ+i\operatorname{sen}210^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\\ k=2\Rightarrow z_3=1_{330^\circ}=\cos 330^\circ+i\operatorname{sen}330^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\end{array}\right\}$$

**h)** $\sqrt{\frac{2-2i}{-3+3i}}$, antes de realizar la división, pasamos los números a forma polar, después realizamos la división y por último hallamos las dos raíces :

$$\left\{\begin{array}{l} 2-2i=\left\{\begin{array}{c} r=\sqrt{2^2+(-2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2} \\ \alpha=\operatorname{arctg}\dfrac{-2}{2}=315^o\text{, ya que }270^o<\alpha<360^o \end{array}\right\}=2\sqrt{2}_{315^o} \\ -3+3i=\left\{\begin{array}{c} r=\sqrt{(-3)^2+3^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2} \\ \alpha=\operatorname{arctg}\dfrac{3}{-3}=135^o\text{, ya que }90^o<\alpha<180^o \end{array}\right\}=3\sqrt{2}_{135^o} \end{array}\right\}\Rightarrow\sqrt{\frac{2-2i}{-3+3i}}=\sqrt{\frac{2\sqrt{2}_{315^o}}{3\sqrt{2}_{135^o}}}=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)_{315-135}}=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)_{180^o}}$$

$$\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)_{180^o}}=\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)_{\frac{180+360k}{2}}=\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)_{90^o+180k^o}=\left\{\begin{array}{l} k=0\Rightarrow z_1=\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)_{90^o}=\sqrt{\frac{2}{3}}(\cos 90^o+i\,\text{sen}90^o)=\sqrt{\frac{2}{3}}i \\ k=1\Rightarrow z_1=\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)_{270^o}=\sqrt{\frac{2}{3}}(\cos 270^o+i\,\text{sen}270^o)=-\sqrt{\frac{2}{3}}i \end{array}\right\}$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

**❷⓿ Calcula *m* para que el número complejo 3 – *mi* tenga el mismo módulo que** $2\sqrt{5}+\sqrt{5}i$

---oo0oo---

⌖ Hallamos los módulos de ambos números complejos:

$$\left\{\begin{array}{c} 3-mi\to r=\sqrt{3^2+(-m)^2}=\sqrt{9+m^2} \\ 2\sqrt{5}+\sqrt{5}i\to r=\sqrt{\left(2\sqrt{5}\right)^2+\left(\sqrt{5}\right)^2}=\sqrt{4\cdot 5+5}=\sqrt{25}=5 \end{array}\right\}$$

⌖ Ahora igualamos ambos módulos y resolvemos la ecuación:

$$\sqrt{9+m^2}=5\Rightarrow\left(\sqrt{9+m^2}\right)^2=5^2\Rightarrow 9+m^2=25\Rightarrow m^2=16\Rightarrow m=\pm\sqrt{16}=\pm 4$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

**❷❶ Expresa en forma polar z, su opuesto –z, y su conjugado** $\bar{z}$ **en cada uno de estos casos:**

El opuesto se diferencia en 180º del original y para el conjugado hay que restar a 360º el argumento del original. Los módulos son iguales.

**a)**

$$z=1-\sqrt{3}i\left\{\begin{array}{c} r=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=2 \\ \alpha=\operatorname{arctg}-\sqrt{3}=300^o\text{, ya que }270^o<\alpha<360^o \end{array}\right\}=2_{300^o}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} -z=2_{300^o+180^o}=2_{480^o}=2_{360^o+120^o}=2_{120^o} \\ \bar{z}=2_{360^o-300^o}=2_{60^o} \end{array}\right\}$$

b)

$$z=-2-2i\Rightarrow\left\{\begin{array}{c} r=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2} \\ \alpha=\operatorname{arctg}1=225^o\text{, ya que }180^o<\alpha<270^o \end{array}\right\}=2\sqrt{2}_{225^o}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} -z=2\sqrt{2}_{225^o+180^o}=2\sqrt{2}_{405^o}=2\sqrt{2}_{360^o+45^o}=2\sqrt{2}_{45^o} \\ \bar{z}=2\sqrt{2}_{360^o-225^o}=2\sqrt{2}_{135^o} \end{array}\right\}$$

**c)**

$$z=-2\sqrt{3}+2i \Rightarrow i \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} r=\sqrt{(-2\sqrt{3})^2+2^2}=\sqrt{16}=4 \\ \alpha = \text{arctg}\dfrac{1}{-\sqrt{3}}=150^o\text{, ya que } 90^o<\alpha<180^o \end{array} \right\} = 4_{150^o} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -z=4_{150^o+180^o}=4_{330^o} \\ \bar{z}=4_{360^o-150^o}=4_{210^o} \end{array} \right\}$$

❷❷ **Representa los polígonos regulares que tienen por vértices los afijos de las siguientes raíces:**

$$\textbf{a)}\ \sqrt[5]{i}=\sqrt[5]{1_{90^o}}=\left(\sqrt[5]{1}\right)_{\frac{90+360k}{5}}=1_{18^o+72k^o}=\left\{ \begin{array}{l} k=0 \Rightarrow z_1=1_{18^o} \\ k=1 \Rightarrow z_2=1_{90^o} \\ k=2 \Rightarrow z_3=1_{162^o} \\ k=3 \Rightarrow z_4=1_{234^o} \\ k=4 \Rightarrow z_5=1_{306^o} \end{array} \right\}$$

$$\textbf{b)}\ \sqrt[6]{-1}=\sqrt[6]{1_{180^o}}=\left(\sqrt[6]{1}\right)_{\frac{180^o+360k^o}{6}}=1_{30^o+60k^o}=\left\{ \begin{array}{l} k=0 \Rightarrow z_1=1_{30^o} \\ k=1 \Rightarrow z_2=1_{90^o} \\ k=2 \Rightarrow z_3=1_{150^o} \\ k=3 \Rightarrow z_4=1_{210^o} \\ k=4 \Rightarrow z_5=1_{270^o} \\ k=5 \Rightarrow z_6=1_{330^o} \end{array} \right\}$$

**c)** $\sqrt[4]{2\sqrt{3}+2i}$ , pasemos el radicando a forma polar :

$$2\sqrt{3}+2i=\left\{ \begin{array}{c} r=\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2+2^2}=\sqrt{16}= \\ \alpha=\text{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{3}}=30^o \end{array} \right\}=4_{30^o}$$

Y ahora hallamos las raíces :

$$\sqrt[4]{4_{30^o}} = \left(\sqrt[4]{4}\right)_{\frac{30^o+360k^o}{4}} = \sqrt{2}_{7'5^o+90^o} = \begin{cases} k=0 \Rightarrow z_1 = \sqrt{2}_{7^o30'} \\ k=1 \Rightarrow z_2 = \sqrt{2}_{97^o30'} \\ k=2 \Rightarrow z_3 = \sqrt{2}_{187^o30'} \\ k=3 \Rightarrow z_4 = \sqrt{2}_{277^o30'} \end{cases}$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

PARA RESOLVER (📖 ❶❹❼ )

❷❸ **Halla dos números complejos tales que su cociente sea 3, la suma de sus argumentos (π/3) , y la suma de sus módulos 8.**

---oo0oo---

Sean los dos números complejos a hallar : $r_\alpha$ y $s_\beta$, tenemos cuatro incógnitas ( los dos módulos y los dos argumentos) necesitamos al menos cuatro ecuaciones :

Cociente = 3, $\frac{r_\alpha}{s_\beta} = \left(\frac{r}{s}\right)_{\alpha-\beta} = 3 = 3_{0^o} \Rightarrow \begin{cases} \frac{r}{s} = 3 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases}$, dos ecuaciones.

Suma de sus argumentos = $\alpha + \beta = \pi/3 = 60^o$.

Suma de sus módulos = $r + s = 8$.

Resolvemos los dos sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas :

$$\begin{cases} \frac{r}{s} = 3 \\ r+s=8 \end{cases} \Rightarrow r = 3s;\ 3s+s=8 \Rightarrow s = \frac{8}{4} = 2 \Rightarrow r = 3 \cdot 2 = 6$$

$$\begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ \alpha + \beta = 60^o \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta \Rightarrow 2\alpha = 60^o \Rightarrow \alpha = \beta = 30^o$$

Los números pedidos son **$r_\alpha = 6_{30^o}$** y **$s_\beta = 2_{30^o}$**

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❷❹ **El producto de dos números complejos es *2i* y el cubo de uno de ellos dividido por el otro es 1/2. Hállalos.**

---oo0oo---

Sean los dos números complejos a hallar : $r_\alpha$ y $s_\beta$:

$$r_\alpha \cdot s_\beta = (r\cdot s)_{\alpha+\beta} = 2i = 2_{90^o} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} r\cdot s = 2 \\ \alpha+\beta = 90^o \end{array}\right\}$$

$$\frac{r_\alpha^3}{s_\beta} = \frac{r_{3\alpha}^3}{s_\beta} = \left(\frac{r^3}{s}\right)_{3\alpha-\beta} = \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)_{0^o} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \frac{r^3}{s} = \frac{1}{2} \\ 3\alpha-\beta = 0^o \end{array}\right\}$$

Resolvemos los dos sistemas :

$$\left\{\begin{array}{l} r\cdot s = 2 \\ \frac{r^3}{s} = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow r = \frac{2}{s} \text{ y sustituyendo en la 2ª } \frac{\frac{2^3}{s^3}}{s} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2^4}{s^4} = 1 \Rightarrow s = 2 \text{ y } r = \frac{2}{s} = 1$$

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha+\beta = 90^o \\ 3\alpha-\beta = 0^o \end{array}\right\} \Rightarrow 4\alpha = 90^o \Rightarrow \alpha = 90^o/4 = 22^o 30'; \beta = 90^o - 22'5^o = 67^o 30'$$

Los números complejos buscados son : $\mathbf{r_\alpha = 1_{22^o\,30'}}$ , $\mathbf{s_\beta = 2_{67^o\,30'}}$ .

❷❺**El producto de dos números complejos es –8 y uno de ellos es el cuadrado del otro. Calcúlalos.**

---oo0oo---

Sean los dos números complejos a hallar : $z_1 = r_\alpha$ y $z_2 = s_\beta$, se ha de cumplir que $z_1 \cdot z_2 = (r_\alpha) \cdot (s_\beta) = -8 = 8_{180^o}$ y $z_1 = z_2^2$ , planteamos los sistemas :

$$(r_\alpha)\cdot(s_\beta) = -8 \Rightarrow r\cdot s_{\alpha+\beta} = 8_{180^o} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} r\cdot s = 8 \\ \alpha+\beta = 180^o \end{array}\right\} \text{además } (r_\alpha) = (s_\beta)^2 = (s^2)_{2\beta} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} r = s^2 \\ \alpha = 2\beta \end{array}\right\}$$

Luego resolviendo los sistemas :

$$\left.\begin{array}{r} r\cdot s = 8 \\ r = s^2 \end{array}\right\} \Rightarrow s^2 \cdot s = s^3 = 8 \Rightarrow s = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2; r = 2^2 = 4$$

$$\left.\begin{array}{r} \alpha+\beta = 180^o \\ \alpha = 2\beta \end{array}\right\} \Rightarrow 2\beta+\beta = 3\beta = 180^o \Rightarrow \beta = \frac{180^o}{3} = 60^o \text{ y } \alpha = 2\cdot 60^o = 120^o$$

Los números complejos buscados son : $\mathbf{r_\alpha = 4_{120^o}}$ , $\mathbf{s_\beta = 2_{60^o}}$ .

**❷❻ De dos números complejos sabemos que:**
**• Tienen el mismo módulo.**
**• Sus argumentos suman 17 π /6.**
**• El primero es conjugado del cuadrado del segundo.**
**¿Cuáles son esos números?**

---oo0oo---

Sean los dos números complejos a hallar : $z_1 = r_\alpha$ y $z_2 = s_\beta$, se nos dice :

♦ r = s, mismo módulo

♦ $\alpha + \beta = 17\pi/6$, ya que los argumentos suman esa cantidad.

♦ $r = s^2$ y $\alpha = 360º - 2\beta$ ya que el primero es conjugado del cuadrado del segundo

Los sistemas a resolver son ahora :

$$\left.\begin{array}{l} r = s \\ r = s^2 \end{array}\right\} \Rightarrow s^2 = s \Rightarrow s^2 - s = 0 \Rightarrow s(s-1) = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} s = 0 \text{ No válida} \\ s - 1 = 0 \Rightarrow s = 1 = r \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha + \beta = 510º \\ \alpha = 360º - 2\beta \end{array}\right\} \Rightarrow 360º - 2\beta + \beta = 510º \Rightarrow -\beta = 510º - 360º = 150º \Rightarrow \beta = -150º = 360º - 150º = 210º, \alpha = 300º$$

Los números complejos buscados son : $r_\alpha = 1_{300º}$ , $s_\beta = 1_{210º}$ .

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

**❷❼ Calcula cos 75º y sen 75º mediante el producto $1_{30º} \cdot 1_{45º}$ .**

---oo0oo---

Por un lado $1_{30º} \cdot 1_{45º} = 1_{30º+45º} = 1_{75º} = \cos 75º + i\,\text{sen}\,75º$

Por otro : $1_{30º} \cdot 1_{45º} = (\cos 30º + i\,\text{sen}\,30º)(\cos 45º + i\,\text{sen}\,45º) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) =$

$= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}i + \frac{\sqrt{2}}{4}i + \frac{\sqrt{2}}{4}i^2 = \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) + \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)i$, igualando en ambas expresiones las partes real e imaginaria obtenemos :

$$\cos 75º = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \text{ y } \text{sen}\,75º = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

**❷❽ Halla las razones trigonométricas de 15º conociendo las de 45º y las de 30º mediante el cociente $1_{45º} : 1_{30º}$ .**

---oo0oo---

Ejercicio análogo al anterior, en el hallamos por un lado el cociente el forma polar:

$$1_{45º}: 1_{30º} = 1_{45º-30º} = 1_{15º} = \cos 15º + i \operatorname{sen} 15º$$

y del otro el cociente en forma binómica :

$$\frac{1_{45º}}{1_{30º}} = \frac{\cos 45º + i\operatorname{sen}45º}{\cos 30º + i\operatorname{sen}30º} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}} = \frac{\sqrt{2}(1+i)/\cancel{2}}{\sqrt{3}+i/\cancel{2}} = \frac{\sqrt{2}(1+i)}{\sqrt{3}+i} = \frac{\sqrt{2}(1+i)\left(\sqrt{3}-i\right)}{\left(\sqrt{3}+i\right)\left(\sqrt{3}-i\right)} = \frac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{4} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i$$

e igualando ambas expresiones:

$$\cos 15º = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \text{ y } \operatorname{sen} 15º = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

❁ Obsérvese que al ser 15º y 75º ángulos complementarios : cos75º = sen15º y sen75º = cos15º.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

**❷❾ ¿Para qué valores de *x* es imaginario puro el cociente $\frac{x+2+xi}{x+i}$.?**

---oo0oo---

Hagamos el cociente :

$$\frac{(x+2)+xi}{x+i} = \frac{((x+2)+xi)(x-i)}{(x+i)(x-i)} = \frac{(x+2)x-(x+2)i+x^2 i+x}{x^2+1} = \frac{x^2+3x}{x^2+1} + \frac{x^2-x-2}{x^2+1}i$$

Para que el cociente anterior sea imaginario puro, la parte real ha de ser nula :

$$\frac{x^2+3x}{x^2+1} = 0 \Rightarrow x^2+3x = 0 \Rightarrow x(x+3) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x=0 \\ x+3=0 \Rightarrow x=-3 \end{array} \right\}$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

**❸⓿ Halla, en función de x, el módulo de *z* = $\frac{1+xi}{1-xi}$ . Demuestra que |z| = 1 para cualquier valor de *x*.**

---oo0oo---

$$|z| = \frac{|1+xi|}{|1-xi|} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+(-x)^2}} = 1$$

❸❶ **Calcula x para que el número complejo que obtenemos al dividir $\frac{x+2i}{4-3i}$ esté representado en la bisectriz del primer cuadrante.**

---oo0oo---

Hagamos la división e igualemos la parte real a la imaginaria :

$$\frac{x+2i}{4-3i} = \frac{(x+2i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)} = \frac{4x+6i^2+3xi+8i}{4^2-3^2i^2} = \frac{4x-6+(3x+8)i}{16+9} = \frac{4x-6}{25} + \frac{3x+8}{25}i$$

$$\frac{4x-6}{25} = \frac{3x+8}{25} \Rightarrow 4x-6 = 3x+8 \Rightarrow 4x-3x = 8+6 \Rightarrow x = 14$$

❸❷ **La suma de dos números complejos conjugados es 8 y la suma de sus módulos es 10. ¿Cuáles son esos números?**

---oo0oo---

Sean los números z = a + bi y su conjugado $\bar{z}$ = a – bi, según el enunciado :

a + bi + a – bi = 2a = 8 ⇨ a = 8/2 = 4

Además :

$$|z| + |\bar{z}| = \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{a^2+b^2} = 2\sqrt{a^2+b^2} = 10 \Rightarrow \sqrt{a^2+b^2} = 5; \sqrt{4^2+b^2} = 5 \Rightarrow 16+b^2 = 25$$

$$b^2 = 25-16 = 9 \Rightarrow b = \pm\sqrt{9} = \pm 3, \text{por tanto } z = a+bi = 4+3i \text{ y } \bar{z} = 4-3i$$

❸❸ **La suma de dos números complejos es 3 + i. La parte real del primero es 2, y el cociente de este entre el segundo es un número real. Hállalos.**

---oo0oo---

Sean z = a + bi y s = c + di, según el enunciado :

z + s = a + bi + c + di = (a+c) + ( b+d)i = 3 + i , a = 2, como a + c = 3, 2 + c = 3, c = 1

$$\frac{z}{s} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac+bd+bci-adi}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i \in \Re \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b+d=1 \\ b-2d=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} d = \frac{1}{3} \\ b = \frac{2}{3} \end{array}\right\}$$

Luego **z = 2 + (2/3)i** y **s = 1 + ( 1/3) i**