❹ **Calcula:**

a) i^{37} ; b) i^{126} ; c) i^{87} ; d) i^{64} ; e) i^{-216} .

---oo0oo---

a) $i^{37} = i^{4\cdot 9+1} = i^{4\cdot 9}\cdot i = (i^4)^9\cdot i = 1^9\cdot i = \mathbf{i}$.

b) $i^{126} = i^{31\cdot 4+2} = (i^4)^{31}\cdot i^2 = 1^{31}\cdot i^2 = i^2 = \mathbf{-1}$

c) $i^{87} = i^{4\cdot 41+3} = (i^4)^{41}\cdot i^3 = 1^{41}\cdot i^3 = i^3 = \mathbf{-i}$.

d) $i^{64} = i^{4\cdot 16} = (i^4)^{16} = 1^{16} = \mathbf{1}$

e) $i^{-216} = \frac{1}{i^{216}} = \frac{1}{i^{4\cdot 54}} = \frac{1}{(i^4)^{54}} = \frac{1}{1^{54}} = \frac{1}{1} = \mathbf{1}$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❺ **Dado el número complejo** $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$**, prueba que :**

a) $1 + z + z^2 = 0$

$$1+z+z^2 = 1+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = 1-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i+\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{3}{4}i^2\right) = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i = 0$$

b)

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i} = \frac{1}{\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}} = \frac{2\left(-1-\sqrt{3}i\right)}{(-1+\sqrt{3}i)(-1-\sqrt{3}i)} = \frac{-2-2\sqrt{3}i}{(-1)^2-(\sqrt{3})^2 i^2} = \frac{-2-2\sqrt{3}i}{1+3} = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i = z^2$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❻ **Calcula *m* y *n* para que se verifique la igualdad: (2 + *m*i) + (*n* + 5i) = 7 – *2i***

---oo0oo---

(2 + mi) + (n + 5i) = 7 – 2i, realizamos la suma del primer miembro : (2 + n) + (m + 5)i = 7 – 2i e igualamos parte real 2+n = 7; **n = 7 – 2 = 5**, y parte imaginaria m+5 = - 2, **m = - 7**.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❼ **Determina *k* para que el cociente** $\frac{k+i}{1+i}$ **sea igual a 2 – i.**

---oo0oo---

Hagamos primero el cociente :

$$\frac{k+i}{1+i}=\frac{(k+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{(k+1)+(1-k)i}{2}=\frac{k+1}{2}+\frac{1-k}{2}i$$, e igualamos la parte real e imaginaria de ambos números :

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{k+1}{2}=2;k+1=4;k=3\\ \frac{1-k}{2}=-1;1-k=-2;k=3\end{array}\right\}$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❽ **Calcula *a* y *b* de modo que se verifique *(a + bi)*^{2} = 3 + 4i.**

---oo0oo---

Desarrollamos el cuadrado:

$(a + bi)^2 = a^2 + (bi)^2 + 2abi = a^2 - b^2 + 2abi = 3 + 4i$ y ahora igualamos para tener un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas de segundo grado :

$$\left.\begin{array}{r}a^2-b^2=3\\ 2ab=4\end{array}\right\}\text{despejamos b de la 2ª y sustituimos en la 1ª}\rightarrow b=\frac{4}{2a}=\frac{2}{a};a^2-\left(\frac{2}{a}\right)^2=3$$

$$a^2-\frac{4}{a^2}=3;a^4-3a^2-4=0\Rightarrow a^2=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\frac{3\pm5}{2}=\left\langle\begin{array}{l}4\Rightarrow a=\pm\sqrt{4}=\pm2;b=\pm1\\ -1\Rightarrow a=\pm\sqrt{1}\notin\Re\end{array}\right.$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❾ **Dados los complejos 2 – *ai* y 3 – *bi*, halla *a* y *b* para que su producto sea igual a 8 + *4*i.**

---oo0oo---

Hacemos el producto del primer miembro:

$6 - 2bi - 3ai + abi^2 = 8 + 4i; 6 - 2bi - 3ai - ab = 8 + 4i$

Separamos parte real y parte imaginaria :

$(6 - ab) + (-2b - 3a)\, i = 8 + 4i$

Igualamos las parte real e imaginaria de ambos miembros para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas de 2º grado :

$$\left.\begin{array}{r}6-ab=8\\ -2b-3a=4\end{array}\right\};b=-2-\frac{3}{2}a\Rightarrow 6-a(-2-\frac{3}{2}a)=8;6+2a+\frac{3}{2}a^2=8\Rightarrow 3a^2+4a-4=0$$

ecuación de segundo grado que resolvemos:

$$3a^2+4a-4=0 \Rightarrow a=\frac{-4\pm\sqrt{16+48}}{6}=\frac{-4\pm\sqrt{64}}{6}=\frac{-4\pm 8}{6}=\begin{cases}\frac{4}{6}=\frac{2}{3}\Rightarrow b=-2-\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}=-3\\ \frac{-12}{6}=-2\Rightarrow b=-2-\frac{3}{2}(-2)=1\end{cases}$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❿ **Calcula el valor de *a* y *b* para que se verifique** $a-3i=\frac{2+bi}{5-3i}$

---oo0oo---

El denominador del primer miembro lo pasamos multiplicando al primero, hacemos el producto e igualamos las parte real e imaginaria de ambos números para hallar las dos incógnitas :

$$a-3i=\frac{2+bi}{5-3i};(a-3i)(5-3i)=2+bi;5a-3ai-15i+9i^2=(5a-9)+(-3a-15)i=2+bi$$

$$\Rightarrow\begin{cases}5a-9=2\Rightarrow a=11/5\\ b=-3a-15=-\frac{33}{5}-15=-\frac{108}{5}\end{cases}$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❶❶ **Halla el valor de *b* para que el producto (3 – 6i) (4 + *b*i) sea:**

a) Un número imaginario puro.
b) Un número real.

---oo0oo---

(3 – 6i) (4 + bi) = 12 + 3bi – 24i + 6b = (12 + 6b) + (3b – 24)i

a) 12 + 6b = 0 ⇨ **b = –2**

b) 3b – 24 = 0 ⇨ **b = 8**

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❶❷ **Determina *a* para que *(a* – 2i) 2 sea un número imaginario puro.**

---oo0oo---

Realizamos el cuadrado :

$(a-2i)^2 = a^2 + 4i^2 - 4ai = (a^2 - 4) - 4ai$

Para que sea imaginario puro, ha de ser :

$$a^2 - 4 = 0 \Rightarrow a = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

❶❸ **Calcula *x* para que el resultado del producto *(x* + 2 + *i*x) *(x* – i) sea un número real .**

---oo0oo---

☸ Hacemos el producto:

$(x + 2 + ix)(x - i) = x^2 - xi + 2x - 2i + x^2i - xi^2 = x^2 - xi + 2x - 2i + x^2i + x = (x^2 + 3x) + (x^2 - x - 2)\,i$

☸ Para que sea número real la parte imaginaria ha de ser nula, resolvemos la ecuación :

$$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{1+3}{2} = 2 \\ \frac{1-3}{2} = -1 \end{cases}$$

Números complejos en forma polar

❶❹ **Representa los siguientes números complejos, sus opuestos y sus conjuga-dos, y exprésalos en forma polar:**

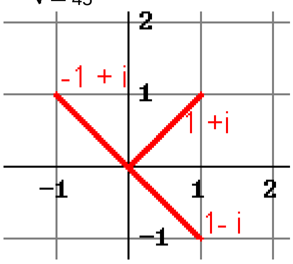
---oo0oo---

Para obtener el conjugado y el opuesto en forma polar se resta el argumento de 360º y se suma al argumento 180º, respectivamente.

a) $1 - i \begin{cases} r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \\ \alpha = \text{arc tg}\frac{-1}{1} = 315^\circ, \text{ ya que } 270^\circ < \alpha < 360^\circ \end{cases} = \sqrt{2}_{315^\circ}$

Opuesto = -1 + i = $\sqrt{2}_{315^\circ + 180^\circ} = \sqrt{2}_{495^\circ} = \sqrt{2}_{360^\circ + 135^\circ} = \sqrt{2}_{135^\circ}$

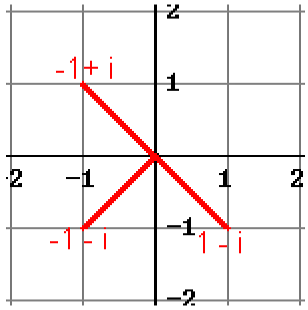
Conjugado = 1 + i = $\sqrt{2}_{360^\circ - 315^\circ} = \sqrt{2}_{45^\circ}$



b) $-1 + i \begin{cases} r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ \alpha = \text{arc tg}\frac{1}{-1} = 135^\circ, \text{ ya que } 90^\circ < \alpha < 180^\circ \end{cases} = \sqrt{2}_{135^\circ}$

↔*Opuesto* = 1 - i = $\sqrt{2}_{135^\circ+180^\circ} = \sqrt{2}_{315^\circ}$

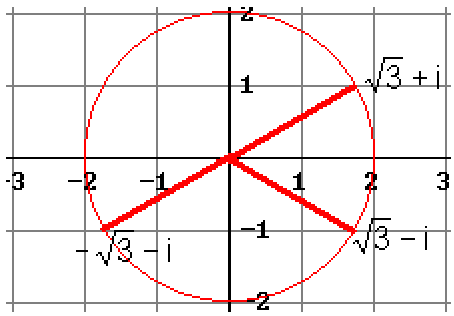
↱*Conjugado* = -1 - i = $\sqrt{2}_{360^\circ-135^\circ} = \sqrt{2}_{225^\circ}$



c) $\sqrt{3}+i \left\{ \begin{array}{c} r=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{4}=2 \\ \alpha = \text{arc tg}\dfrac{1}{\sqrt{3}} = 30^\circ, \text{ ya que } 0^\circ < \alpha < 90^\circ \end{array} \right\} = 2_{30^\circ}$

Opuesto = $-\sqrt{3}-i = 2_{30^\circ+180^\circ} = 2_{210^\circ}$

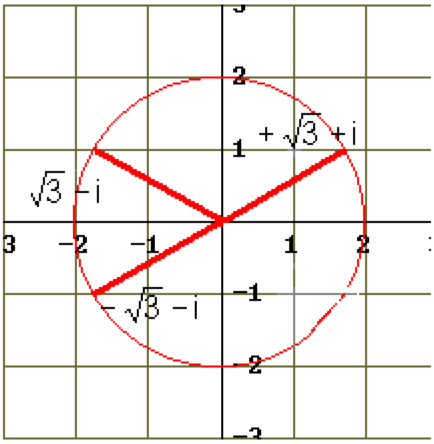
Conjugado = $\sqrt{3}-i = 2_{360^\circ-30^\circ} = 2_{330^\circ}$



d) $-\sqrt{3}-i \left\{ \begin{array}{c} r=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+(-1)^2}=\sqrt{4}=2 \\ \alpha = \text{arc tg}\dfrac{-1}{-\sqrt{3}} = 210^\circ, \text{ ya que } 180^\circ < \alpha < 270^\circ \end{array} \right\} = 2_{210^\circ}$

Opuesto = $\sqrt{3}i = 2_{210^\circ+180^\circ} = 2_{390^\circ} = 2_{360^\circ+30^\circ} = 2_{30^\circ}$

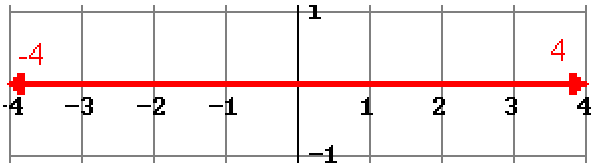
Conjugado = $-\sqrt{3}+i = 2_{360^\circ-210^\circ} = 2_{150^\circ}$



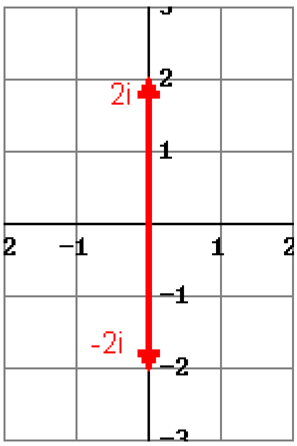
e) $-4\left\{\begin{array}{l} r=\sqrt{(-4)^2+0^2}=\sqrt{16}=4 \\ \alpha=\text{arc tg}\dfrac{0}{-4}=180^{\circ} \end{array}\right\}=4_{180^{\circ}}$

Opuesto = $4 = 4_{0^{\circ}}$

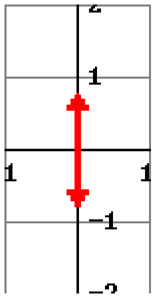
Conjugado = $-4 = 4_{180^{\circ}}$



f) $2i = 2_{90^{\circ}}$, Opuesto : $-2i = 2_{270^{\circ}}$; Conjugado : $-2i = 2_{270^{\circ}}$



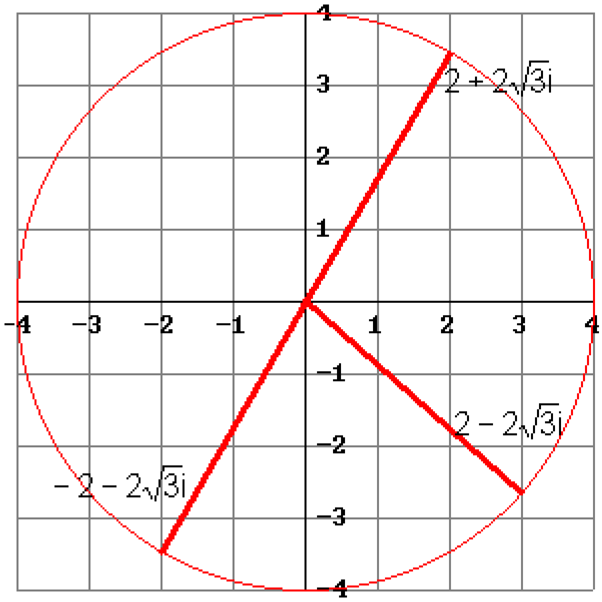
g) $(-3/4)\,i = (3/4)_{270^{\circ}}$, opuesto : $(3/4)_{90^{\circ}}$, conjugado: $(3/4)_{90^{\circ}}$.



h) $2+2\sqrt{3}i \left\{ \begin{array}{l} r=\sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{16}=4 \\ \alpha = \text{arc tg}\dfrac{2\sqrt{3}}{2}=\text{arctg}\sqrt{3}=60^o,\ \text{ya que } 0^o<\alpha<90^o \end{array} \right\} = 4_{60^o}$

Opuesto $= -2-2\sqrt{3}i = 4_{60^o+180^o} = 4_{240^o}$

Conjugado $= 2-2\sqrt{3}i = 4_{360^o-60^o} = 4_{300^o}$



❶❺ **Escribe en forma binómica los números :**

a) $2_{45^o} = 2\ (\cos 45^o + i \text{ sen } 45^o) = 2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i$

b) $3_{\frac{\pi}{6}} = 3(\cos 30^o + i\text{sen}30^o) = 3\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2}\right)=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3}{2}i$

c) $\sqrt{2}_{180^o} = \sqrt{2}(\cos 180^o + i\text{sen}180^o) = -\sqrt{2}$

d) $17_{0^\circ} = 17\,(\cos 0^\circ + i \text{ sen } 0^\circ) = 17$.

e) $1_{\pi/2} = \cos 90^\circ + i \text{ sen } 90^\circ = i$.

f) $5_{270^\circ} = 5\,(\cos 270^\circ + i\text{sen}270^\circ) = -5i$.

g) $1_{150^\circ} = \cos 150^\circ + i\text{sen}150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

h) $4_{100^\circ} = 4(\cos 100^\circ + i\text{sen}100^\circ) = 4(-0'1736 + 0'9848\,i) = -0'6946 + 3'9392i$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❶❻ **Calcula en forma polar** :

a) $(-1 - i)^5$, pasamos el número $-1 - i$ a forma polar :

$$-1-i \rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \\ \alpha = \text{arctg}\frac{-1}{-1} = 225^\circ, \text{ ya que } 180^\circ < \alpha < 270^\circ \end{cases} \Rightarrow \sqrt{2}_{225^\circ}$$

$$(-1-i)^5 = \left(\sqrt{2}_{225^\circ}\right)^5 = \left(\sqrt{2}\right)^5_{225^\circ \cdot 5} = 4\sqrt{2}_{1125^\circ} = 4\sqrt{2}_{360^\circ \cdot 3 + 45} = 4\sqrt{2}_{45^\circ}$$

b) $\sqrt[3]{1-\sqrt{3}i}$, pasamos el radicando a forma polar :

$$1-\sqrt{3}i = \begin{cases} r = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2 \\ \alpha = \text{arctg}\frac{-\sqrt{3}}{1} = 300^\circ, \text{ ya que } 270^\circ < \alpha < 360^\circ \end{cases} = 2_{300^\circ}$$

$$\sqrt[3]{1-\sqrt{3}i} = \sqrt[3]{2_{300}} = \left(\sqrt[3]{2}\right)_{\frac{300+360k}{3}} = \sqrt[3]{2}_{100^\circ + 120k^\circ} = \begin{cases} k=0 \Rightarrow z_1 = \sqrt[3]{2}_{100^\circ} \\ k=1 \Rightarrow z_2 = \sqrt[3]{2}_{220^\circ} \\ k=2 \Rightarrow z_3 = \sqrt[3]{2}_{340^\circ} \end{cases}$$

c) $$\sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{64_{0^\circ}} = \left(\sqrt[6]{64}\right)_{\frac{0+360k}{6}} = 2_{60k^\circ} = \begin{cases} k=0 \Rightarrow z_1 = 2_{0^\circ} \\ k=1 \Rightarrow z_2 = 2_{60^\circ} \\ k=2 \Rightarrow z_3 = 2_{120^\circ} \\ k=3 \Rightarrow z_4 = 2_{180^\circ} \\ k=4 \Rightarrow z_5 = 2_{240^\circ} \\ k=5 \Rightarrow z_6 = 2_{300^\circ} \end{cases}$$

d) $$\sqrt[3]{8i} = \sqrt[3]{8_{90^\circ}} = \left(\sqrt[3]{8}\right)_{\frac{90+360k}{3}} = 2_{30^\circ + 120k^\circ} = \begin{cases} k=0 \Rightarrow z_1 = 2_{30^\circ} \\ k=1 \Rightarrow z_2 = 2_{150^\circ} \\ k=2 \Rightarrow z_3 = 2_{270^\circ} \end{cases}$$

e) $\left(-2\sqrt{3}+2i\right)^6$, pasamos la base a forma polar :

$$\left(-2\sqrt{3}+2i\right)=\left\{\begin{array}{c} r=\sqrt{\left(-2\sqrt{3}\right)^2+2^2}=\sqrt{16}=4 \\ \alpha=\text{arctg}\dfrac{2}{-2\sqrt{3}}=\text{arctg}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}=150^o,\ \text{ya que } 90^o<\alpha<180^o \end{array}\right\}=4_{150^o}$$

$$\left(-2\sqrt{3}+2i\right)^6=\left(4_{150^o}\right)^6=4^6_{150\cdot 6}=4096_{900^o}=4096_{2\cdot 360^o+180^o}=4096_{180^o}$$

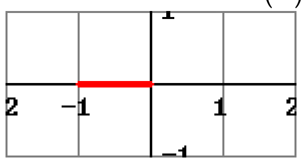
f) $(3-4i)^3$, pasamos la base a forma polar :

$$3-4i=\left\{\begin{array}{c} r=\sqrt{3^2+(-4)^2}=\sqrt{25}=5 \\ \alpha=\text{arctg}\dfrac{-4}{3}=306^o52',\ \text{ya que } 270^o<\alpha<360^o \end{array}\right\}=5_{306^o52'}$$

$$(3-4i)^3=\left(5_{306^o\,52'}\right)^3=\left(5^3\right)_{306^o\,52'\cdot 3}=125_{920^o\,36'}=125_{200^o\,36'}$$

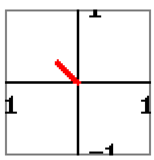
❶❼ **Calcula y representa gráficamente el resultado**:

a) $$\frac{i^7-i^{-7}}{2i}=\frac{i^7-\frac{1}{i^7}}{2i}=\frac{\frac{i^{14}-1}{i^7}}{2i}=\frac{i^{14}-1}{2i^8}=\frac{i^{4\cdot 3+2}-1}{2i^{4\cdot 2}}=\frac{\left(i^4\right)^3\cdot i^2-1}{2\left(i^4\right)^2}=\frac{1^3\cdot(-1)-1}{2\cdot 1^2}=\frac{-2}{2}=-1$$



b) $$\left(\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}\right)^3=\left\{\begin{array}{l} 1-i=\left[\begin{array}{l} r=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2} \\ \alpha=\text{arctg}\dfrac{-1}{1}=315^o \end{array}\right]=\sqrt{2}_{315^o} \\ \sqrt{3}+i=\left[\begin{array}{l} r=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}=2 \\ \alpha=\text{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{3}}=30^o \end{array}\right]=2_{30^o} \end{array}\right\}=\left(\frac{\sqrt{2}_{315^o}}{2_{30^o}}\right)^3=\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)_{315^o-30^o}\right)^3=$$

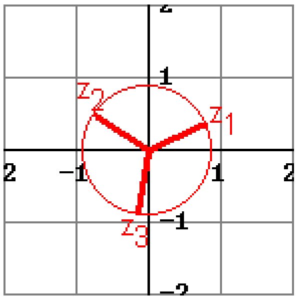
$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3_{285\cdot 3}=\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)_{855^o}=\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)_{360^o\cdot 2+135^o}=\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)_{135^o}=\frac{\sqrt{2}}{4}(\cos 135^o+i\,\text{sen}135^o)=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i$$



c)

$$\sqrt[3]{\frac{1+i}{2-i}}=\left\{\begin{array}{l} 1+i=\left[\begin{array}{l} r=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2} \\ \alpha=\text{arctg}1=45^o \end{array}\right]=\sqrt{2}_{45^o} \\ 2-i=\left[\begin{array}{l} r=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5} \\ \alpha=\text{arctg}\frac{-1}{2}=333^o26'5'' \end{array}\right]=\sqrt{5}_{333^o26'5''} \end{array}\right\}=\sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}_{45^o}}{\sqrt{5}_{333^o26'5''}}}=\sqrt[3]{\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)_{45-333^o26'5''}}=\sqrt[3]{\sqrt{\frac{2}{5}}}_{71^o33'54''}$$

$$\sqrt[6]{\frac{2}{5}}_{\frac{71^o33'54''+360k}{3}}=\sqrt[6]{\frac{2}{5}}_{23^o51'18''+120k^o}=\left\{\begin{array}{l} k=0\Rightarrow z_1=\sqrt[6]{\frac{2}{5}}_{23^o51'18''}=\sqrt[6]{\frac{2}{5}}(\cos 23^o51'18''+i\text{sen}23^o51'18'')=0'7851+0'3468i \\ k=1\Rightarrow z_2=\sqrt[6]{\frac{2}{5}}_{143^o51'18''}=\sqrt[6]{\frac{2}{5}}(\cos 143^o51'18''+i\text{sen}143^o51'18'')=-0'69+0'51i \\ k=2\Rightarrow z_3=\sqrt[6]{\frac{2}{5}}_{263^o51'18''}=\sqrt[6]{\frac{2}{5}}(\cos 263^o51'18''+i\text{sen}263^o51'18'')=-0'09-0'85i \end{array}\right\}$$



18 Calcula y representa las soluciones :

a)

$$\sqrt[3]{4-4\sqrt{3}i}=\left\{4-4\sqrt{3}i=\left[\begin{array}{c} r=\sqrt{4^2+\left(-4\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{64}=8 \\ \alpha=\text{arctg}\frac{-4\sqrt{3}}{4}=\text{arctg}-\sqrt{3}=300^o \end{array}\right]=8_{300^o}\right\}=\sqrt[3]{8_{300^o}}=\left(\sqrt[3]{8}\right)_{\frac{300+360k}{3}}=2_{100+120k}$$

$$2_{100^o+120k^o}=\left\{\begin{array}{l} k=0\Rightarrow z_1=2_{100^o}=2(\cos 100^o+i\text{sen}100^o)=-0'347+1'97i \\ k=1\Rightarrow z_2=2_{220^o}=2(\cos 220^o+i\text{sen}220^o)=-1'53-1'29i \\ k=2\Rightarrow z_3=2_{340^o}=2(\cos 340^o+i\text{sen}340^o)=1'879-0'68i \end{array}\right\}$$