❺ **Sean los números complejos $z_1 = 4_{60^\circ}$ y $z_2 = 3_{210^\circ}$.**
a) Expresa z_1 y z_2 en forma binómica.
b) Halla $z_1 \cdot z_2$ y z_2/z_1 y pasa los resultados a forma polar.
c) Compara los módulos y los argumentos de $z_1 \cdot z_2$ y z_2/z_1 con los de z_1 y z_2 e intenta encontrar relaciones entre ellos.

---oo0oo---

a) $z_1 = 4_{60^\circ} = 4\,(\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ) = 4\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2+2\sqrt{3}\,i$

$z_2 = 3_{210^\circ} = 3\,(\cos 210^\circ + i \operatorname{sen} 210^\circ) = 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i$

b) $z_1 \cdot z_2 = \left(2+2\sqrt{3}i\right)\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i\right) = -3\sqrt{3}-3i-9i-3\sqrt{3}i^2 = -12i = 12_{270^\circ}$

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{-\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i}{2+2\sqrt{3}i} = \frac{\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i\right)\cdot\left(2-2\sqrt{3}i\right)}{\left(2+2\sqrt{3}i\right)\left(2-2\sqrt{3}i\right)} = \frac{-3\sqrt{3}+9i-3i-3\sqrt{3}}{2^2-\left(2\sqrt{3}i\right)^2} = \frac{-6\sqrt{3}+6i}{16} = \frac{-3\sqrt{3}}{8}+\frac{3}{8}i$$

y en forma polar :

$$\frac{-3\sqrt{3}}{8}+\frac{3}{8}i \left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{\left(-3\sqrt{3}/8\right)^2+(3/8)^2} = \sqrt{\frac{27}{64}+\frac{9}{64}} = \sqrt{\frac{36}{64}} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \\ \alpha = \operatorname{arctg}\frac{3/8}{-3\sqrt{3}/8} = \operatorname{arctg} -\frac{\sqrt{3}}{3} = 150^\circ \end{array} \right\} = \left(\frac{3}{4}\right)_{150^\circ}$$

c) $z_1 \cdot z_2 = 4_{60^\circ} \cdot 3_{210^\circ} = (4 \cdot 3)_{60^\circ+210^\circ} = 12_{270^\circ}$ (producto de módulos y suma de argumentos)

$\frac{z_2}{z_1} = \frac{3_{210}}{4_{60}} = \left(\frac{3}{4}\right)_{210^\circ-60^\circ} = \left(\frac{3}{4}\right)_{150^\circ}$, es decir se dividen los módulos y se restan los argumentos.

Ejercicios propuestos (❶❸❾)

❶ **Efectúa estas operaciones y da el resultado en forma polar y en forma binómica:**

a) $1_{150^\circ} \cdot 5_{30^\circ}$, b) $6_{45^\circ} : 3_{15^\circ}$, c) $2_{10^\circ} \cdot 1_{40^\circ} \cdot 3_{70^\circ}$, d) $5_{(2\pi/3)\,rad} : 1_{60^\circ}$, e) $\left(1+\sqrt{3}i\right)^5$

---oo0oo---

a) $1_{150^\circ} \cdot 5_{30^\circ} = (1 \cdot 5)_{150^\circ+30^\circ} = 5_{180^\circ} = 5\,(\cos 180^\circ + i \operatorname{sen} 180^\circ) = 5\,(-1+i\cdot 0) = -5$

b) $6_{45^\circ} : 3_{15^\circ} = (6:3)_{45^\circ-15^\circ} = 2_{30^\circ} = 2(\cos 30^\circ + i\,\text{sen}\,30^\circ) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} + i$

c) $2_{10^\circ} \cdot 1_{40^\circ} \cdot 3_{70^\circ} = (2\cdot 1\cdot 3)_{10^\circ+40^\circ+70^\circ} = 6_{120^\circ} = 6\,(\cos 120 + i\,\text{sen}\,120) = -3 + 3\sqrt{3}\,i$

d) $5_{2\pi/3} : 1_{60^\circ} = 5_{120^\circ} : 1_{60^\circ} = (5:1)_{120^\circ-60^\circ} = 5_{60^\circ} = 5(\cos 60^\circ + i\,\text{sen}\,60^\circ) = \frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}i$

e) $\left(1-\sqrt{3}\,i\right)^5$, primero lo convertimos a forma polar:

$$\left(1-\sqrt{3}\,i\right)\begin{cases} r = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2 \\ \alpha = \text{arctg}\dfrac{-\sqrt{3}}{1} = 300^\circ \end{cases} = 2_{300^\circ} \text{ y ahora hacemos la potencia :}$$

$$\left(2_{300^\circ}\right)^5 = 2^5_{300\cdot 5} = 32_{1500^\circ} = 32_{360\cdot 4+60} = 32_{60^\circ} = 32(\cos 60^\circ + i\,\text{sen}\,60^\circ) = 32\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 16 + 16\sqrt{3}\,i$$

❷ **Dados los complejos $z_1 = 5_{45^\circ}$, $z_2 = 2_{15^\circ}$, $z_3 = 4i$, obtén en forma polar:**

a) $z_1 \cdot z_3 = 5_{45^\circ} \cdot 4_{90^\circ} = (5\cdot 4)_{45^\circ+90^\circ} = 20_{135^\circ}$, ya que $z_3 = 4i = 4_{90^\circ}$

b) $\frac{z_1}{z_2^2} = \frac{5_{45^\circ}}{\left(2_{15^\circ}\right)^2} = \frac{5_{45^\circ}}{\left(2^2\right)_{15^\circ\cdot 2}} = \frac{5_{45^\circ}}{4_{30^\circ}} = \left(\frac{5}{4}\right)_{45^\circ-30^\circ} = \left(\frac{5}{4}\right)_{15^\circ}$

c)

$$\frac{z_1^3}{z_2 \cdot z_3^2} = \frac{\left(5_{45^\circ}\right)^3}{2_{15^\circ}\cdot\left(4_{90^\circ}\right)^2} = \frac{\left(5^3\right)_{45\cdot 3}}{2_{15}\cdot\left(4^2\right)_{90\cdot 2}} = \frac{125_{135^\circ}}{2_{15^\circ}\cdot 16_{180^\circ}} = \frac{125_{135^\circ}}{32_{195^\circ}} = \left(\frac{125}{32}\right)_{135^\circ-195^\circ} = \left(\frac{125}{32}\right)_{-60^\circ} = \left(\frac{125}{32}\right)_{300^\circ}$$

d) $\frac{z_1 \cdot z_2^3}{z_3} = \frac{5_{45^\circ}\cdot\left(2_{15^\circ}\right)^3}{4_{90^\circ}} = \frac{5_{45^\circ}\cdot 8_{45^\circ}}{4_{90^\circ}} = \frac{5\cdot 8_{45^\circ+45^\circ}}{4_{90^\circ}} = \frac{40_{90^\circ}}{4_{90^\circ}} = \left(\frac{40}{4}\right)_{90^\circ-90^\circ} = 10_{0^\circ}$

❸ **Expresa cos3α y sen 3α en función de sen α y cos α utilizando la fórmula de Moivre. Ten en cuenta que $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$.**

---oo0oo---

Vamos a realizar $(1_\alpha)^3$ de dos formas :

❁ En forma binómica :

$(1_\alpha)^3 = 1\ (\cos\alpha + i\ \text{sen}\alpha\ )^3 = \cos^3\alpha + i\ 3\cos^2\alpha\ \text{sen}\alpha + 3i^2\cos\alpha\ \text{sen}^2\alpha + i^3\ \text{sen}^3\alpha = \cos^3\alpha + 3\cos^2\alpha\ \text{sen}\alpha\ i - 3\cos\alpha\ \text{sen}^2\alpha - i\text{sen}^3\alpha = (\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\ \text{sen}^2\alpha\ ) + (3\cos^2\alpha\ \text{sen}\alpha - \text{sen}^3\alpha)i$

❁ En forma polar y después pasado a binómica :

$(1_\alpha)^3 = (1^3)_{3\alpha} = 1_{3\alpha} = \cos 3\alpha + i\ \text{sen}\ 3\alpha$

Como los números complejos resultantes han de ser iguales, igualando la parte real (fondo azul) :

$$\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\ \text{sen}^2\alpha$$

y la parte imaginaria (fondo amarillo) :

$$\text{sen}\ 3\alpha = 3\cos^2\alpha\ \text{sen}\alpha - \text{sen}^3\alpha)$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

Ejercicios propuestos (📖 ❶❹❶)

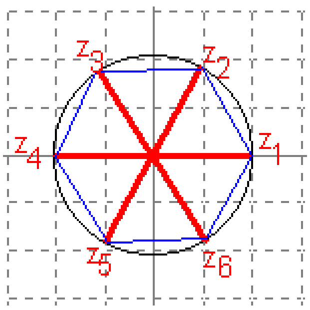
❶ **Halla las seis raíces sextas de 1. Represéntalas y exprésalas en forma binómica.**

---oo0oo---

$1 = 1 + 0i = 1_{0°+360k}$, luego :

$$\sqrt[6]{1_{0°+360k}} = \left(\sqrt[6]{1}\right)_{\frac{0+360k}{6}} = 1_{60k}\begin{cases} k=0 \Rightarrow z_1 = 1_{0°} = \cos 0° + i\text{sen}0° = 1+0i \\ k=1 \Rightarrow z_2 = 1_{60°} = \cos 60° + i\text{sen}60° = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ k=2 \Rightarrow z_3 = 1_{120°} = \cos 120° + i\text{sen}120° = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ k=3 \Rightarrow z_4 = 1_{180} = \cos 180° + i\text{sen}180° = -1+0i \\ k=4 \Rightarrow z_5 = 1_{240°} = \cos 240° + i\text{sen}240° = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ k=5 \Rightarrow z_6 = 1_{300°} = \cos 300° + i\text{sen}300° = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$$

Las raíces se hallan en los vértices de un hexágono regular de radio 1, en los ángulos anteriores :



◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

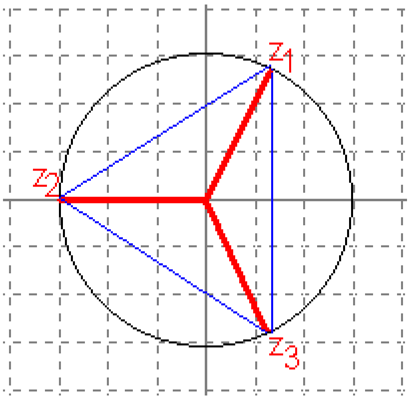
❷ **Resuelve la ecuación $z^3 + 27 = 0$. Representa sus soluciones.**

---oo0oo---

$z^3+27=0; z=\sqrt[3]{-27}=\sqrt[3]{27_{180^\circ}}=\left(\sqrt[3]{27}\right)_{\frac{180^\circ+360k}{3}}=3_{60+120k}$ y dando a k los valores 0,1 y 2:

$$\begin{cases} k=0 \Rightarrow z_1=3_{60^\circ}=3(\cos 60^\circ + i\,\mathrm{sen}\,60^\circ)=3\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i \\ k=1 \Rightarrow z_2=3_{180^\circ}=3(\cos 180^\circ + i\,\mathrm{sen}\,180^\circ)=3(-1+0i)=-3 \\ k=2 \Rightarrow z_3=3_{300^\circ}=3(\cos 300^\circ + i\,\mathrm{sen}\,300^\circ)=3\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$$

Ahora las tres soluciones están dirigidas a los vértices de un triángulo equilátero de radio 3 y ángulos 60º, 180º y 300º (a 120 º) :



❸ **Calcula:**

a) $\sqrt[3]{-i}$, el número –i en forma polar es $-i = 1_{270^\circ}$, luego :

$$\sqrt[3]{-i}=\sqrt[3]{1_{270^\circ}}=\left(\sqrt[3]{1}\right)_{\frac{270+360k}{3}}=1_{90+120k}\begin{cases} k=0 \Rightarrow z_1=1_{90^\circ}=\cos 90^\circ + i\,\mathrm{sen}\,90^\circ = 0+i=i \\ k=1 \Rightarrow z_2=1_{210^\circ}=\cos 210^\circ + i\,\mathrm{sen}\,210^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i \\ k=2 \Rightarrow z_3=1_{330^\circ}=\cos 330^\circ + i\,\mathrm{sen}\,330^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i \end{cases}$$

b) $\sqrt[3]{-8+8\sqrt{3}\,i}$, hallemos primero el módulo del radicando para ponerlo en forma polar :

$$-8+8\sqrt{3}\,i\left\{\begin{array}{l} r=\sqrt{(-8)^2+\left(8\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{64+64\cdot 3}=\sqrt{256}=16 \\ \alpha=\mathrm{arctg}\frac{8\sqrt{3}}{-8}=\mathrm{arctg}(-\sqrt{3})=120^\circ \end{array}\right\}=16_{120^\circ}$$

Ahora ya podemos hallar las raíces cuartas del número :

$$\sqrt[4]{16_{120^\circ}}=\left(\sqrt[4]{16}\right)_{\frac{120+360k}{4}}=2_{30^\circ+90k^\circ}\begin{cases}k=0\Rightarrow z_1=2_{30^\circ}=2(\cos 30^\circ+i\operatorname{sen}30^\circ)=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\sqrt{3}+i\\ k=1\Rightarrow z_2=2_{120^\circ}=2(\cos 120^\circ+i\operatorname{sen}120^\circ)=2\left(\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-1+\sqrt{3}i\\ k=2\Rightarrow z_3=2_{210^\circ}=2(\cos 210^\circ+i\operatorname{sen}210^\circ)=2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{-1}{2}i\right)=-\sqrt{3}-i\\ k=3\Rightarrow z_4=2_{300^\circ}=2(\cos 300^\circ+i\operatorname{sen}300^\circ)=2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=1-\sqrt{3}i\end{cases}$$

c) $\sqrt{-25}$, el número - 25 en forma polar es 25_{180°, luego sus raíces son :

$$\sqrt{-25}=\sqrt{25_{180^\circ}}=\sqrt{25}_{\frac{180+360k}{2}}=5_{90^\circ+180k^\circ}=\begin{cases}k=0\Rightarrow z_1=5_{90^\circ}=5(\cos 90^\circ+i\operatorname{sen}90^\circ)=5i\\ k=1\Rightarrow z_2=5_{270^\circ}=5(\cos 270^\circ+i\operatorname{sen}270^\circ)=-5i\end{cases}$$

d) $\sqrt[3]{\dfrac{-2+2i}{1+\sqrt{3}i}}$, antes de calcular la raíz cúbica vamos a hacer el cociente del radicando y expresar el resultado en forma polar :

$$\frac{-2+2i}{1+\sqrt{3}i}=\begin{cases}-2+2i=\begin{bmatrix}r=\sqrt{(-2)^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}\\ \alpha=\operatorname{arctg}\frac{2}{-2}=\operatorname{arctg}-1=135^\circ\end{bmatrix}=2\sqrt{2}_{135^\circ}\\ 1+\sqrt{3}i=\begin{bmatrix}r=\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{4}=\\ \alpha=\operatorname{arctg}\sqrt{3}=60^\circ\end{bmatrix}=2_{60^\circ}\end{cases}=\frac{2\sqrt{2}_{135^\circ}}{2_{60}}=\frac{2\sqrt{2}}{2}_{135^\circ-60^\circ}=\sqrt{2}_{75^\circ}$$

Ahora ya podemos hallar las raíces cúbicas:

$$\sqrt[3]{\frac{-2+2i}{1+\sqrt{3}i}}=\sqrt[3]{\sqrt{2}_{75^\circ}}=\left(\sqrt[3]{\sqrt{2}}\right)_{\frac{75+360k}{3}}=\sqrt[6]{2}_{25^\circ+120k^\circ}=\begin{cases}k=0\Rightarrow z_1=\sqrt[6]{2}_{25^\circ}\\ k=1\Rightarrow z_2=\sqrt[6]{2}_{145^\circ}\\ k=2\Rightarrow z_3=\sqrt[6]{2}_{265^\circ}\end{cases}$$

❹ **Resuelve las ecuaciones:**
a) $x^4+1=0$
b) $x^6+64=0$

---oo0oo---

a) $x^4+1=0$; $x=\sqrt[4]{-1}$, como $-1=1_{180^\circ}$:

$$\sqrt[4]{1_{180^\circ}} = \left(\sqrt[4]{1}\right)_{\frac{180+360k}{4}} = 1_{45^\circ+90k^\circ} = \begin{cases} k=0 \Rightarrow s_1 = 1_{45^\circ} = \cos 45^\circ + i\operatorname{sen} 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i \\ k=1 \Rightarrow s_2 = 1_{135^\circ} = \cos 135^\circ + i\operatorname{sen} 135^\circ = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i \\ k=2 \Rightarrow s_3 = 1_{225^\circ} = \cos 225^\circ + i\operatorname{sen} 225^\circ = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i \\ k=3 \Rightarrow s_4 = 1_{315^\circ} = \cos 315^\circ + i\operatorname{sen} 315^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i \end{cases}$$

b) $x^6 + 64 = 0$; $x = \sqrt[6]{-64}$; $-64 = 64_{180^\circ}$, luego :

$$\sqrt[6]{64_{180^\circ}} = \left(\sqrt[6]{64}\right)_{\frac{180+360k}{6}} = 2_{30^\circ+60k^\circ} = \begin{cases} k=0 \Rightarrow s_1 = 2_{30^\circ} = 2(\cos 30^\circ + i\operatorname{sen} 30^\circ) = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} + i \\ k=1 \Rightarrow s_{12} = 2_{90^\circ} = 2(\cos 90^\circ + i\operatorname{sen} 90^\circ) = 2(0+i) = 2i \\ k=2 \Rightarrow s_3 = 2_{150^\circ} = 2(\cos 150^\circ + i\operatorname{sen} 150^\circ) = 2\left(\dfrac{-\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3} + i \\ k=3 \Rightarrow s_4 = 2_{210^\circ} = 2(\cos 210^\circ + i\operatorname{sen} 210^\circ) = 2\left(\dfrac{-\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3} - i \\ k=4 \Rightarrow s_5 = 2_{270^\circ} = 2(\cos 270^\circ + i\operatorname{sen} 270^\circ) = 2(0-i) = -2i \\ k=5 \Rightarrow s_6 = 2_{330^\circ} = 2(\cos 330^\circ + i\operatorname{sen} 330^\circ) = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} - i \end{cases}$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❺ Comprueba que si *z* y *w* son dos raíces sextas de 1, entonces también lo son los resultados de las siguientes operaciones: z · w, z/w, z^2 , z^3.

---oo0oo---

Si z y w son raíces sextas de 1 ⇨ $z^6 = 1$ y $w^6 = 1$
Veamos si también $(z \cdot w)^6 = 1$, $(z \cdot w)^6 = z^6 \cdot w^6 = 1 \cdot 1 = 1$, luego sí es raíz sexta de 1.
Ha de cumplirse $(z/w)^6 = 1$; $(z/w)^6 = z^6/w^6 = 1/1 = 1$, luego sí es raíz sexta de 1.
Veamos a qué es igual $(z^2)^6 = (z^6)^2 = 1^2 = 1$, luego sí es raíz sexta de 1.
Ahora veamos $(z^3)^6 = (z^6)^3 = 1^3 = 1$, sí es raíz sexta de 1.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❻ El número 4 + 3i es la raíz cuarta de un cierto número complejo, z. Halla las otras tres raíces cuartas de z.

---oo0oo---

Las raíces cuartas de cualquier complejo tienen el mismo módulo y se diferencian en 360kº/4 = 90kº en cada argumento, hallemos el módulo y argumento de la que conocemos :

$$4 + 3i = \begin{cases} r = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5 \\ \alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{3}{4} = 36^\circ\ 52'\ 11'' \end{cases} = 5_{36^\circ 52' 11''}$$

Luego las otras tres raíces cuartas de *z* serán:

$$5_{36^\circ 52' 11'' + 90^\circ} = 5_{126^\circ 52' 11''} = \underline{-3+4i}$$

$$5_{36^\circ 52' 11'' + 2\cdot 90^\circ} = 5_{216^\circ 52' 11''} = \underline{-4-3i}$$

$$5_{36^\circ 52' 11'' + 3\cdot 90^\circ} = 5_{306^\circ 52' 11''} = \underline{3-4i}$$

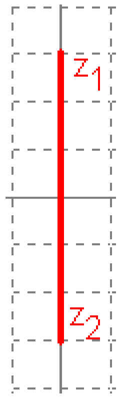
❼ Calcula las siguientes raíces y representa gráficamente sus soluciones:

---oo0oo---

a)

$$\sqrt{-9} = \sqrt{9_{180^\circ}} = \left(\sqrt{9}\right)_{\frac{180+360k}{2}} = 3_{90^\circ+180k^\circ} = \begin{cases} k=0 \Rightarrow z_1 = 3_{90^\circ} = 3(\cos 90^\circ + i\,\mathrm{sen} 90^\circ) = 3(0+i) = 3i \\ k=1 \Rightarrow z_2 = 3_{270^\circ} = 3(\cos 270^\circ + i\,\mathrm{sen} 270^\circ) = 3(0-i) = -3i \end{cases}$$

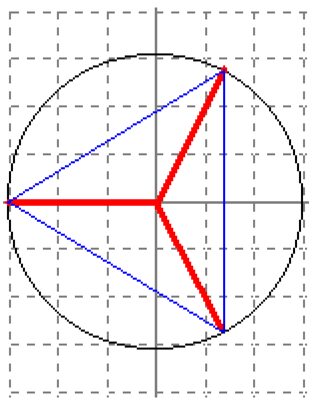
las dos raíces difieren en 180º (véase el valor 180kº que se suma al argumento), la representación serán afijos opuestos :



b)

$$\sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{27_{180^\circ}} = \left(\sqrt[3]{27}\right)_{\frac{180+360k}{3}} = 3_{60^\circ+120k^\circ} = \begin{cases} k=0 \to z_1 = 3_{60^\circ} = 3(\cos 60^\circ + i\,\mathrm{sen} 60^\circ) = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i \\ k=1 \to z_2 = 3_{180^\circ} = 3(\cos 180^\circ + i\,\mathrm{sen} 180^\circ) = -3 \\ k=2 \to z_3 = 3_{300^\circ} = 3(\cos 300^\circ + i\,\mathrm{sen} 300^\circ) = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$$

Estas tres raíces difieren en 120º, es decir se representan en los vértices de un triángulo equilátero de radio el módulo (3), a partir de la primera que forma un ángulo de 60º con el eje horizontal :



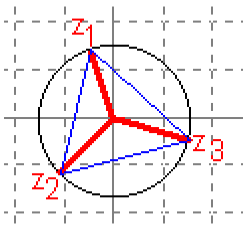
c) $\sqrt[3]{2-2i}$ **,** primero hemos de pasar el número 2 – 2i a forma polar :

$$2-2i=\left\{\begin{array}{c} r=\sqrt{2^2+(-2)^2}=\sqrt{8}=\sqrt{2^3}=2\sqrt{2} \\ \alpha=\text{arc tg}\dfrac{-2}{2}=\text{arc tg}-1=315^{\circ},\text{ ya que } 270^{\circ}<\alpha<360^{\circ} \end{array}\right\}=2\sqrt{2}_{315^{\circ}}$$

y ahora hallamos sus tres raíces cúbicas :

$$\sqrt[3]{\sqrt{8}_{315^{\circ}}}=\left(\sqrt[3]{\sqrt{8}}\right)_{\frac{315+360k}{3}}=\sqrt{2}_{105^{\circ}+120k^{\circ}}=\left\{\begin{array}{l} k=0\Rightarrow z_1=\sqrt{2}_{105^{\circ}}=\sqrt{2}(\cos 105^{\circ}+i\,\text{sen}105^{\circ})=-0'366+1'366i \\ k=1\Rightarrow z_2=\sqrt{2}_{225^{\circ}}=\sqrt{2}(\cos 225^{\circ}+i\,\text{sen}225^{\circ})=-1-i \\ k=2\Rightarrow z_3=\sqrt{2}_{345^{\circ}}=\sqrt{2}(\cos 345^{\circ}+i\,\text{sen}345^{\circ})=1'366-0'366i \end{array}\right\}$$

También se dirigen a los vértices de un triángulo equilátero (es una raíz cúbica) pero de radio raíz de dos y empezando en 105º :



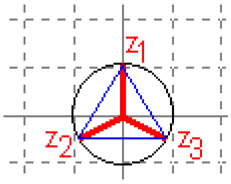
d) $\sqrt[3]{\dfrac{1-i}{1+i}}$, hemos de hacer primero la división y pasar el resultado a forma binómica :

$$\frac{1-i}{1+i}=\frac{\sqrt{2}_{315^{\circ}}}{\sqrt{2}_{45^{\circ}}}=1_{270^{\circ}}$$

y ahora hallamos las tres raíces cúbicas :

$$\sqrt[3]{1_{270^{\circ}}}=\left(\sqrt[3]{1}\right)_{\frac{270+360k}{3}}=1_{90^{\circ}+120k^{\circ}}=\left\{\begin{array}{l} k=0\Rightarrow z_1=1_{90^{\circ}}=\cos 90^{\circ}+i\,\text{sen}90^{\circ}=i \\ k=1\Rightarrow z_2=1_{210^{\circ}}=\cos 210^{\circ}+i\,\text{sen}210^{\circ}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i \\ k=2\Rightarrow z_3=1_{330^{\circ}}=\cos 330^{\circ}+i\,\text{sen}330^{\circ}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i \end{array}\right\}$$

De nuevo una raíz cúbica, forman ángulos de 120º con modulo 1, empezando en 90º :

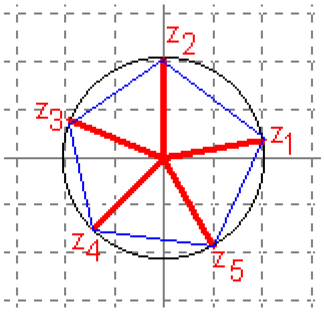


e) $\sqrt[5]{-\dfrac{32}{i}}$, hacemos el cociente y lo pasamos a polar :

$$-\frac{32}{i} = -\frac{32i}{i^2} = -\frac{32i}{-1} = 32i = 32_{90^\circ}$$, y ahora ya podemos calcular las raíces quintas :

$$\sqrt[5]{32_{90^\circ}} = \left(\sqrt[5]{32}\right)_{\frac{90+360k}{5}} = 2_{18^\circ+72k^\circ} = \begin{cases} k=0 \Rightarrow z_1 = 2_{18^\circ} = 2(\cos 18^\circ + i\mathrm{sen} 18^\circ) = 1'90 + 0'62i \\ k=1 \Rightarrow z_2 = 2_{90^\circ} = 2(\cos 90^\circ + i\mathrm{sen} 90^\circ) = 2i \\ k=2 \Rightarrow z_3 = 2_{162^\circ} = 2(\cos 162^\circ + i\mathrm{sen} 162^\circ) = -1'90 + 0'62i \\ k=3 \Rightarrow z_4 = 2_{234^\circ} = 2(\cos 234^\circ + i\mathrm{sen} 234^\circ) = -1'18 - 1'62i \\ k=4 \Rightarrow z_5 = 2_{306^\circ} = 2(\cos 306^\circ + i\mathrm{sen} 306^\circ) = 1'18 - 1'62i \end{cases}$$

Ahora las raíces difieren en 72º y se dirigen a los vértices de un pentágono regular de radio 2 :



◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR (📖 ❶❹❻)

Números complejos en forma binómica

❶ **Calcula:**

a) (3 + 2i) (2 – i) – (1 – i) (2 – 3i)

b) 3 + 2i (–1 + i) – (5 – 4i)

c) –2i – (4 – i)5i

d) (4 – 3i) (4 + 3i) – (4 – 3i)^2.

---oo0oo---

a) (3 + 2i) (2 – i) – (1 – i) (2 – 3i) = 6 – 3i + 4i – 2i^2 – 2 + 3i + 2i – 3i^2 = 6 – 3i + 4i + 2 – 2 + 3i + 2i + 3 = **9 + 6i**

b) 3 + 2i (–1 + i) – (5 – 4i) = 3 – 2i + 2i^2 – 5 + 4i = 3 – 2i – 2 – 5 + 4i = **– 4 + 2i**

c) –2i – (4 – i)5i = –2i – 20i + 5i^2 = –22i – 5 = **–5 – 22i**

d) (4 – 3i) (4 + 3i) – (4 – 3i)^2 = 16 – (3i)^2 –(16 + 9i^2 - 24i) = 16 + 9 – 16 + 9 + 24i = **18 +24i**

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❷ Calcula en forma binómica:

---oo0oo---

a)

$$\frac{(3+3i)(4-2i)}{2-2i}=\frac{12-6i+12i-6i^2}{2-2i}=\frac{12+6i-6(-1)}{2-2i}=\frac{(18+6i)(2+2i)}{(2-2i)(2+2i)}=\frac{36+36i+12i+12i^2}{2^2-(2i)^2}=3+6i$$

b)

$$\frac{-2+3i}{(4+2i)(-1+i)}=\frac{-2+3i}{-6+2i}=\frac{(-2+3i)(-6-2i)}{(-6+2i)(-6-2i)}=\frac{12+4i-18i-6i^2}{(-6)^2-(2i)^2}=\frac{12-14i-6(-1)}{36-4(-1)}=\frac{18-14i}{40}=\frac{9}{20}-\frac{7}{20}i$$

c)

$$\frac{2+5i}{3-2i}(1-i)=\frac{7+3i}{3-2i}=\frac{(7+3i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}=\frac{15+23i}{9+4}=\frac{15}{13}+\frac{23}{13}i$$

d)

$$\frac{1+i}{2-i}+\frac{-3-2i}{1+3i}=\frac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}+\frac{(-3-2i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}=\frac{1+3i}{2^2+1}+\frac{-9+7i}{1+9}=\frac{1+3i}{5}+\frac{-9+7i}{10}=\frac{2+6i-9+7i}{10}=-\frac{7}{10}+\frac{13}{10}i$$

❸Estos números complejos son los resultados de las operaciones que los siguen. Opera y di cuál corresponde a cuál:

---oo0oo---

a)

$$(1-i)(4-2i)(1+3i)=(2-6i)(1+3i)=20$$

b)

$$\frac{1+2i}{2-i}(2+i)+\frac{1-2i}{2+i}(2-i)=\frac{(1+2i)(2+i)^2+(1-2i)(2-i)^2}{(2-i)(2+i)}=\frac{(1+2i)(3+4i)+(1-2i)(3-4i)}{2^2-i^2}=\frac{-5+10i-5-10i}{5}=-2$$

c)

$$\frac{2-i}{3-i}-\frac{1}{5}\left(\frac{1+8i}{1+3i}\right)=\frac{(2-i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}-\frac{1}{5}\left(\frac{(1+8i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}\right)=\frac{7-i}{10}-\frac{1}{5}\left(\frac{25+5i}{10}\right)=\frac{7-i}{10}-\frac{5+i}{10}=\frac{7-i-5-i}{10}=\frac{1}{5}-\frac{1}{5}i$$

d)

$$\frac{(2+i)^2+(1-i)^2}{1-\frac{3}{2}i}=\frac{4+4i+i^2+1-2i+i^2}{\frac{2-3i}{2}}=\frac{2(3+2i)}{(2-3i)}=\frac{2(3+2i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)}=\frac{2(13i)}{4-9i^2}=\frac{26i}{13}=2i$$

e)

$$\frac{2-2i}{i}+\frac{3-5i}{2-i}=\frac{(2-2i)i}{i^2}+\frac{(3-5i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{2i+2}{-1}+\frac{11-7i}{2^2-i^2}=-2i-2+\frac{11-7i}{5}=\frac{-10i-10+11-7i}{5}=\frac{1}{5}-\frac{17}{5}i$$