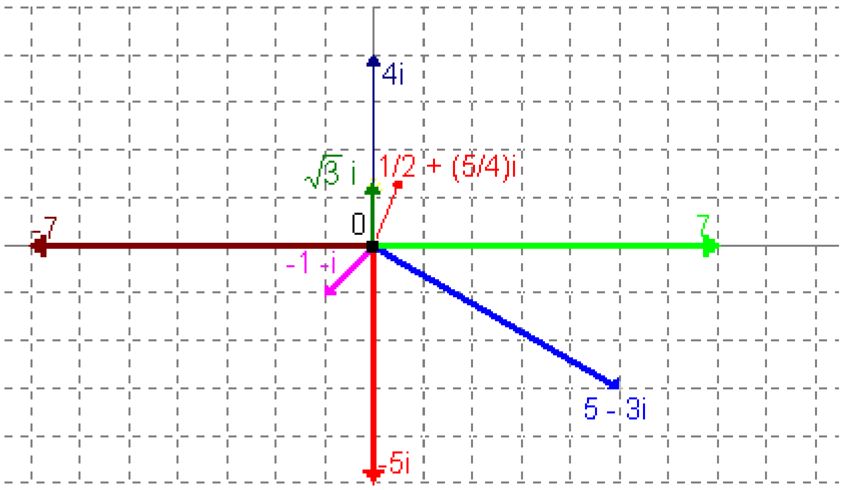
Ejercicios propuestos (📖 ❶❸❸)

❶ Representa gráficamente los siguientes números complejos y di cuáles son reales, cuáles imaginarios y, de estos, cuáles son imaginarios puros:

$$5-3i;\ 1/2+(5/4)i;\ -5i;\ 7;\ \sqrt{3}\,i;\ 0;\ -1-i;\ -7;\ 4i$$

---oo0oo---



◎**Imaginarios :** 5 – 3i, ½ + (5/4) i, -1 – i , $\sqrt{3}$ i, - 5i, 4i.

◎ **Imaginarios puros** : $\sqrt{3}$ i, - 5i, 4i

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❷ Obtén las soluciones de las siguientes ecuaciones y represéntalas:

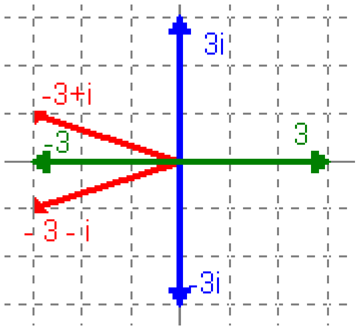
a) $x^2 + 6x + 10 = 0$
b) $3x^2 + 27 = 0$
c) $3x^2 - 27 = 0$

---oo0oo---

a) $x^2+6x+10=0 \rightarrow x=\dfrac{-6\pm\sqrt{36-40}}{2}=\dfrac{-6\pm\sqrt{-4}}{2}=\dfrac{-6\pm\sqrt{4}\sqrt{-1}}{2}=\dfrac{-6\pm 2i}{2}=-3\pm i$

b) $3x^2+27=0 \rightarrow x=\pm\sqrt{-\dfrac{27}{3}}=\pm\sqrt{-9}=\pm\sqrt{9}\sqrt{-1}=\pm 3i$

c) $3x^2-27=0 \rightarrow x=\pm\sqrt{\dfrac{27}{3}}=\pm\sqrt{9}=\pm 3$

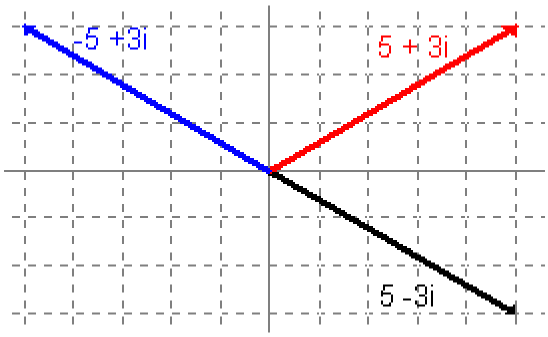


❸ Representa gráficamente el opuesto y el conjugado de:

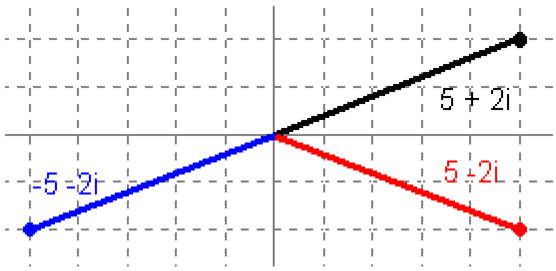
a) 3 – 5i
b) 5 + 2i
c) –1 – 2i
d) –2 + 3i
e) 5
f) 0
g) 2i
h) –5i

---oo0oo---

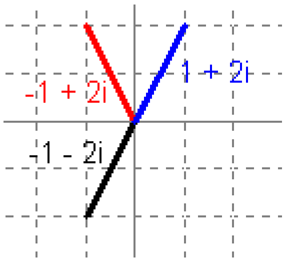
a) 3- 5i, opuesto : -3 +5i, conjugado : - 3 + 5i.



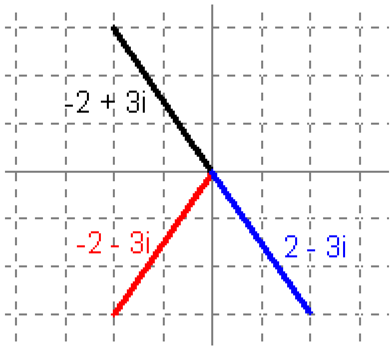
b) 5 + 2i, opuesto : - 5 – 2i, conjugado : 5 – 2i.



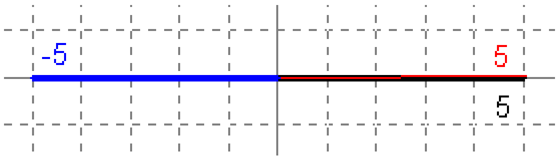
c) – 1 – 2i, opuesto : 1 + 2i, conjugado : -1 + 2i .



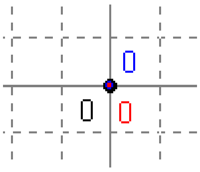
d) –2 + 3i, opuesto : 2 – 3i, conjugado : -2 –3i



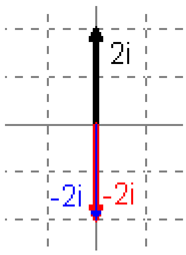
e) 5, opuesto : -5, conjugado : 5



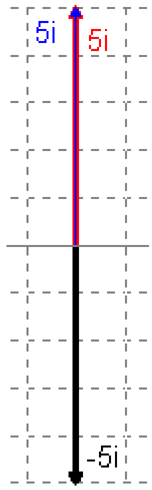
f) 0, conjugado : 0, opuesto : 0.



g) 2i, opuesto : -2i, conjugado –2i



h) –5i, opuesto : 5i, conjugado : 5i



4. Sabemos que $i^2 = -1$. Calcula i^3, i^4, i^5, i^6, i^{20}, i^{21}, i^{22}, i^{23}. Da un criterio para simplificar potencias de i de exponente natural.

---oo0oo---

Estudiemos cómo evoluciona la serie de las potencias de i :

$i^o = \mathbf{1}$
$i^1 = \mathbf{i}$
$i^2 = \mathbf{-1}$
$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = \mathbf{-i}$
$i^4 = i^3 \cdot i = - i \cdot i = - i^2 = \mathbf{1}$
$i^5 = i^4 \cdot i = \mathbf{i}$
$i^6 = i^5 \cdot i = i \cdot i = i^2 = \mathbf{-1}$
$i^7 = i^6 \cdot i = -1 \cdot i = \mathbf{-i}$
$i^8 = i^7 \cdot i = -i \cdot i = - i^2 = 1$

Vemos que se repite cada cuatro, es decir es congruente, módulo cuatro, luego :

i^n

CRITERIO: Dividimos el exponente entre 4 y lo escribimos como sigue:

$i^n = i^{4c+r} = i^{4c} \cdot i^r = (i^4)^c \cdot i^r = 1^c \cdot i^r = 1 \cdot i^r = i^r$

Por tanto, $i^n = i^r$, donde r es el resto de dividir n entre 4.

Aplicando el criterio:

$i^{20} = i^{4 \cdot 5+0} = i^0 = 1$

$i^{21} = i^{4 \cdot 5+1} = i^1 = i$

$i^{22} = i^{4 \cdot 5+2} = i^2 = -1$

$i^{23} = i^{4\cdot 5+3} = i^{3} = -i.$

◈◈◈◘◘◉◘◘◈◈◈

EJERCICIOS PROPUESTOS (❶❸❺)

1. **Efectúa las siguientes operaciones y simplifica el resultado:**

a) $(6 - 5i) + (2 - i) - 2(-5 + 6i)$
b) $(2 - 3i) - (5 + 4i) + (1/2)(6 - 4i)$
c) $(3 + 2i)(4 - 2i)$
d) $(2 + 3i)(5 - 6i)$
e) $(-i + 1)(3 - 2i)(1 + 3i)$
f) $\dfrac{2+4i}{4-2i}$
g) $\dfrac{1-4i}{3+i}$
h) $\dfrac{4+4i}{-3+5i}$
i) $\dfrac{5+i}{-2-i}$
j) $\dfrac{1+5i}{3+4i}$
k) $\dfrac{4-2i}{i}$
l) $6-3\left(5+\dfrac{2}{5}i\right)$
m) $\dfrac{3i(-4i+2)}{-2+3i}$
n) $\dfrac{(-3i)^2(1-2i)}{2+2i}$

---oo0oo---

a) $(6 - 5i) + (2 - i) - 2(-5 + 6i) = 6 - 5i + 2 - i + 10 - 12i = \mathbf{18 - 18i}$
b) $(2 - 3i) - (5 + 4i) + (1/2)(6 - 4i) = 2 - 3i - 5 - 4i + 3 - 2i = \mathbf{-9i}$
c) $(3 + 2i)(4 - 2i) = 12 - 6i + 8i - 4i^2 = 12 + 2i + 4 = \mathbf{16 + 2i}$
d) $(2 + 3i)(5 - 6i) = 10 - 12i + 15i - 18i^2 = 10 + 3i + 18 = \mathbf{28 + 3i}$
e) $(-i + 1)(3 - 2i)(1 + 3i) = (-3i + 2i^2 + 3 - 2i)(1 + 3i) = (3 - 2 - 5i)(1 + 3i) = (1 - 5i)(1 + 3i) = 1 + 3i - 5i - 15i^2 = 1 + 15 - 2i = \mathbf{16 - 2i}$

f) $\dfrac{2+4i}{4-2i}=\dfrac{(2+4i)(4+2i)}{(4-2i)(4+2i)}=\dfrac{8+4i+16i+8i^2}{4^2-(2i)^2}=\dfrac{8+20i+8\cdot(-1)}{16-4\cdot(-1)}=\dfrac{8+20i-8}{16+4}=\dfrac{20i}{20}=\mathbf{i}$

g) $\dfrac{1-4i}{3+i}=\dfrac{(1-4i)\cdot(3-i)}{(3+i)\cdot(3-i)}=\dfrac{3-i-12i+4i^2}{3^2-i^2}=\dfrac{3-13i+4\cdot(-1)}{9-(-1)}=\dfrac{3-13i-4}{9+1}=\dfrac{-1-13i}{10}$ **=(-1/10)-(13/10)i**

h) $\dfrac{4+4i}{-3+5i}=\dfrac{(4+4i)\cdot(-3-5i)}{(-3+5i)\cdot(-3-5i)}=\dfrac{-12-20i-12i-20i^2}{(-3)^2-(5i)^2}=\dfrac{-12-32i-20\cdot(-1)}{9-25(-1)}=\dfrac{8-32i}{34}=\dfrac{4}{17}-\dfrac{16}{17}i$

i) $\frac{5+i}{-2-i}=\frac{(5+i)\cdot(-2+i)}{(-2-i)\cdot(-2+i)}=\frac{-10+5i-2i+i^2}{(-2)^2-i^2}=\frac{-10+3i-1}{4-(-1)}=\frac{-11+3i}{5}=-\frac{11}{5}+\frac{3}{5}i$

j) $\frac{1+5i}{3+4i}=\frac{(1+5i)\cdot(3-4i)}{(3+4i)\cdot(3-4i)}=\frac{3-4i+15i-20i^2}{3^2-(4i)^2}=\frac{3+11i-20(-1)}{9-16(-1)}=\frac{3+11i+20}{9+16}=\frac{23}{25}+\frac{11}{25}i$

k) $\frac{4-2i}{i}=\frac{(4-2i)\cdot i}{i^2}=\frac{4i-2i^2}{-1}=-2-4i$

l) $6-3\left(5+\frac{2}{5}i\right)=6-15-\frac{6}{5}i=-9-\frac{6}{5}i$

m) $\frac{3i(-4i+2)}{-2+3i}=\frac{(-12i^2+6i)\cdot(-2-3i)}{(-2+3i)\cdot(-2-3i)}=\frac{-24-36i-12i-18i^2}{(-2)^2-(3i)^2}=\frac{-24-48i-18(-1)}{4-9(-1)}=\frac{-6}{13}-\frac{48}{13}i$

n) $\frac{(-3i)^2(1-2i)}{2+2i}=\frac{-9(1-2i)\cdot(2-2i)}{(2+2i)\cdot(2-2i)}=\frac{(-9+18i)(2-2i)}{2^2-(2i)^2}=\frac{-18+18i+36i+36}{4-4(-1)}=\frac{18+54i}{16}=\frac{9}{8}+\frac{27}{8}i$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❷ Obtén polinomios cuyas raíces sean:

a) $2+\sqrt{3}i$ y $2-\sqrt{3}i$

b) $-3i$ y $3i$

c) $1+2i$ y $3-4i$

(Observa que solo cuando las dos raíces son conjugadas, el polinomio tiene coeficientes reales.)

---oo0oo---

Si las raíces de un polinomio son r_1 y r_2, el polinomio se halla : $(x-r_1)\cdot(x-r_2)$.

a)

$$[x-(2+\sqrt{3}i)]\cdot[x-(2-\sqrt{3}i)]=[(x-2)-\sqrt{3}i]\cdot[(x-2)+\sqrt{3}i]=(x-2)^2-(\sqrt{3}i)^2=x^2-4x+4+3=$$

$= \mathbf{x^2-4x+7}$.

b) $(x-(-3i))\cdot(x-3i)=x^2-9i^2=x^2+9$

c) $(x-(1+2i))\cdot(x-(3-4i))=[x^2-x(3-4i)-x(1+2i)+(1+2i)\cdot(3-4i)]=x^2-(4-2i)x+(3-4i+6i-8i^2=x^2-(4-2i)x+(3+2i+8)=\mathbf{x^2-(4-2i)x+(11+2i)}$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❸ ¿Cuánto debe valer *x*, real, para que $(25-xi)^2$ sea imaginario puro?

---oo0oo---

Primero hacemos la operación de elevar al cuadrado y en número complejo resultante igualamos la parte real a cero (imaginario puro) :

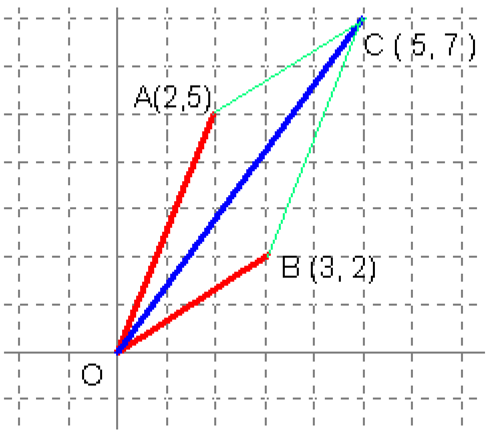
$(25 - xi)^2 = 625 - 50xi + (xi)^2 = (625 - x^2) - 50xi$. Para que sea imaginario puro:
$625 - x^2 = 0$; $x = \pm\sqrt{625} = \pm 25$

Hay dos soluciones: $x_1 = -25$, $x_2 = 25$

❹ **Representa gráficamente $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 2 + 5i$, $z_1 + z_2$. Comprueba que $z_1 + z_2$ es una diagonal del paralelogramo de lados z_1 y z_2.**

---oo0oo---

Hallemos la suma $z_1 + z_2 = (3 + 2i) + (2 + 5i) = 5 + 7i$ y ahora representamos los tres números complejos :



Par comprobar que es un paralelogramo (en el dibujo lo parece) hemos de comprobar que los lados OA y BC tienen la misma pendiente (son paralelos) y OB y AC también tienen la misma pendiente.

Dados dos puntos del plano P (x_1 , y_1) y Q (x_2 , y_2), la pendiente de la recta que les une (m), se halla mediante la fórmula :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

- Pendiente del lado OA :

$$m_{\overline{OA}} = \frac{y_A - y_O}{x_A - x_O} = \frac{5-0}{2-0} = \frac{5}{2}$$

- Pendiente de BC :

$$m_{\overline{BC}} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{7-2}{5-3} = \frac{5}{2} = m_{\overline{OA}}$$

- Pendiente del lado OB :

$$m_{\overline{OB}} = \frac{y_B - y_O}{x_B - x_O} = \frac{2-0}{3-0} = \frac{2}{3}$$

❁ Pendiente del lado AC :

$$m_{\overline{AC}} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{7-5}{5-2} = \frac{2}{3} = m_{\overline{OB}}$$

Otra forma de demostrarlo :

Para que dos rectas sean paralelas sus vectores directores han de ser de componentes proporcionales (condición de paralelismo) :

OA = A – O = (2,5) – (0,0) = (**2, 5**); **BC** = C – B = (5, 7) - (3, 2) = (**2, 5**) = **OA**, luego son paralelos.

OB = B – O = (3, 2) – (0, 0) = (**3, 2**); **AC** = C – A = (5, 7) – (2, 5) = (**3, 2**) = **OB,** también son paralelos**, l**uego **es un paralelogramo**

EJERCICIOS PROPUESTOS (❶❸❼)

❶ **Escribe en forma polar los siguientes números complejos :**

a) $1+\sqrt{3}i$, **b)** $\sqrt{3}+i$, **c)** –1 + i, **d)** 5 – 12i, **e)** 3i, **f)** –5

---oo0oo---

a) $1+\sqrt{3}i \left\{ \begin{array}{c} \text{Módulo} = r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1+\left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2 \\ \text{Argumento} = \alpha = \text{arctg}\dfrac{b}{a} = \text{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{1} = \text{arctg}\sqrt{3} = 60^\circ \end{array} \right\} = 2_{60^\circ}$

b) $\sqrt{3}+i \left\{ \begin{array}{c} r = \sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2} = \sqrt{4} = 2 \\ \alpha = \text{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{3}} = 30^\circ \end{array} \right\} = 2_{30^\circ}$

c) $-1+i \left\{ \begin{array}{c} r = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2} \\ \alpha = \text{ac tg}\dfrac{1}{-1} = 135^\circ \end{array} \right\} = \sqrt{2}_{135^\circ}$

d) $5-12i \left\{ \begin{array}{c} r = \sqrt{5^2+(-12)^2} = \sqrt{169} = 14 \\ \alpha = \text{arctg}\dfrac{-12}{5} = 292^\circ 37' \end{array} \right\} = 14_{292^\circ 37'}$

e) $3i \left\{ \begin{array}{c} r = \sqrt{3^3} = 3 \\ \alpha = \text{arctg}\dfrac{3}{0} = 90^\circ \end{array} \right\} = 3_{90^\circ}$

f) $-5\left\{\begin{array}{c} r=5 \\ \alpha=\operatorname{arctg}\dfrac{0}{-5}=180 \end{array}\right\}=5_{180^\circ}$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❷ **Escribe en forma binómica los siguientes números complejos:**

a) $5_{\pi/6\ rad}$, b) 2_{135° , c) 2_{495° , d) 3_{240° , e) 5_{180° , f) 4_{90°

---oo0oo---

a) $5_{\pi/6} = 5_{30^\circ} = 5(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ) = 5\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+(1/2)\,i\right)= \dfrac{5\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$

b) $2_{135^\circ} = 2(\cos 135^\circ + i \operatorname{sen} 135^\circ) = 2\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)=-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$

c) $2_{495^\circ} = 2_{360^\circ+135^\circ} = 2_{135^\circ} = -\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i$

d) $3_{240^\circ} = 3(\cos 240^\circ + i \operatorname{sen} 240^\circ) = 3\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-\dfrac{3}{2}-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$

e) $5_{180^\circ} = 5(\cos 180^\circ + i \operatorname{sen} 180^\circ) = 5(-1 + 0) = -5$

f) $4_{90^\circ} = 4(\cos 90^\circ + i \operatorname{sen} 90^\circ) = 4(0 + 1i) = 4i$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❸ **Expresa en forma polar el opuesto y el conjugado del número complejo $z = r_\alpha$.**

---oo0oo---

◉ Opuesto de z : $-z = r_{180^\circ+\alpha}$

◉ Conjugado de z : $\bar{z} = r_{360^\circ-\alpha}$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❹ **Escribe en forma binómica y en forma polar el complejo:** $z = 8\,(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ)$

---oo0oo---

$$z = 8_{30^\circ} = 8(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ) = 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=4\sqrt{3}+4i$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈