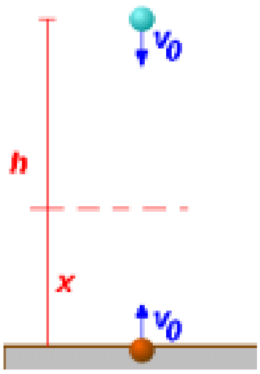
PROBLEMAS

14 Se lanza un objeto verticalmente hacia arriba, con velocidad inicial v_0. Al mismo tiempo, se lanza verticalmente hacia abajo, desde una altura h, otro objeto con velocidad inicial v_0. Encuentra el algoritmo que proporciona la altura, medida desde el suelo, a la que los dos objetos se encuentren.

Sea :

t = tiempo que tardan ambos objetos en encontrase.
x = altura, medida desde el suelo, a la que se encuentran.



El espacio (x) que recorre el objeto que sube, hasta el punto de encuentro viene dado por la expresión :

$$x = v_0 \cdot t - \tfrac{1}{2} g \cdot t^2$$

El objeto que cae recorre una altura (h - x) que viene dada por :

$$h - x = v_0 \cdot t + \tfrac{1}{2} g \cdot t^2$$

Sustituyendo la primera en la segunda y despejando el tiempo tenemos :

$$h - (v_0 \cdot t - \tfrac{1}{2} g \cdot t^2) = v_0 \cdot t + \tfrac{1}{2} g \cdot t^2;\ h - v_0 \cdot t + \tfrac{1}{2} g \cdot t^2 = v_0 \cdot t + \tfrac{1}{2} g \cdot t^2;\ h = 2v_0 \cdot t \rightarrow t = \tfrac{h}{2v_0}$$

Si sustituimos el tiempo en la primera expresión, tendremos la altura pedida :

$$x = v_0 \cdot \left(\tfrac{h}{2v_0}\right) - \tfrac{1}{2} g \cdot \left(\tfrac{h}{2v_0}\right)^2 = \tfrac{h}{8v_0^2}(4v_0 - gh)$$

15 En el ejercicio anterior, ¿importa la masa de los objetos? ¿Y su tamaño y su forma?

En el caso ideal no influyen ni la masa ni el tamaño ni la forma, pues sólo depende de **g** aceleración de la gravedad) y de **h** (altura desde la que cae) y de $\mathbf{v_0}$ (velocidades iniciales de ambos objetos). En la realidad el tamaño y la forma hacen que influya de diferente forma la resistencia del aire que se opone al movimiento.

16 Los motores de un avión lo impulsan a 900 km / h en dirección norte. A la altura a la que vuela sopla un viento en dirección suroeste que lo empuja con una velocidad de arrastre de 240 km /h .

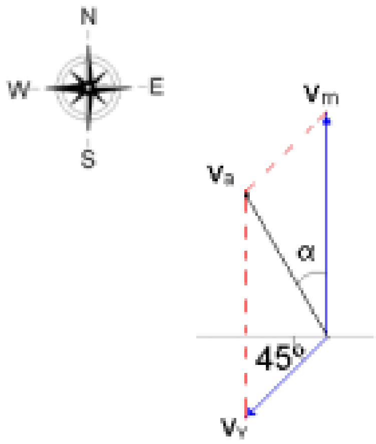
a) Calcula la velocidad con que se mueve el avión respecto al suelo, así como la rapidez del movimiento.

b) ¿En qué dirección se mueve el avión respecto al suelo?

c) Representa en un esquema la trayectoria del vuelo y el vector velocidad que representa el movimiento del avión respecto al suelo.

d) Si el piloto quiere llegar a un aeropuerto situado en dirección norte, a 1000 km del punto donde se encuentra, ¿cuál debe ser el rumbo que fija en el avión? ¿Cuánto tardará el avión en llegar al aeropuerto? Supón que la velocidad del viento se mantiene constante.

a) La velocidad del avión será la composición o resultante de la suma vectorial de las velocidades relativas.



Descomponemos cada uno de los vectores velocidad según unos ejes que hacemos coincidir con los puntos cardinales:

$$\vec{v_m} = v_{mx} \cdot \vec{i} + v_{my} \cdot \vec{j} = 900\,\vec{j}$$

$$\vec{v_v} = v_{vx}\,\vec{i} + v_{vy}\,\vec{j} = v_v \cos 225\,\vec{i} + v_v sen225\,\vec{j} = -169'71\,\vec{i} - 169'71\,\vec{j}$$

Para calcular el vector velocidad resultante sumamos las componentes según los ejes :

$$\vec{v_a} = v_{ax}\,\vec{i} + v_{ay}\,\vec{j} = -169'71\,\vec{i} + (900 - 169'71)\,\vec{j}$$

Es decir el vector velocidad resultante es : $\vec{v_a} = -169'71\,\vec{i} + 730'29\,\vec{j}$

La rapidez es el módulo del vector velocidad :

$$|\vec{v_a}| = v_a = \sqrt{v_{ax}^2 + v_{ay}^2} = \sqrt{(-169'71)^2 + 730'29^2} = \sqrt{550148'17} = 741'72 \text{ m/s}$$

b) Hallamos el ángulo que forma el vector v_a respecto del Norte :

$$\alpha = arc\ \mathrm{tg}\frac{v_{ax}}{v_{ay}} = arctg\frac{169'71}{730'29} = arctg 0'2324 = 13^0 4' 57''$$ respecto del Norte (ver figura)

c) La trayectoria es la línea recta que describe el vector resultante dibujado en la gráfica anterior.

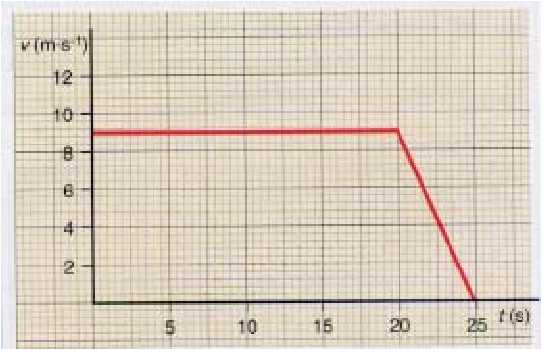
d) Tiene que poner rumbo a la derecha del Norte un ángulo α = 13º 4’ 57”

El tiempo que tarda en llegar al aeropuerto, en recorrer e = 1 000 km es :

$$t = \frac{e}{v_a} = \frac{1000 \text{ Km}}{741'72 \text{ km/hr}} = 1'348 \text{ hr} \simeq 1 \text{ hr } 20 \text{ min } 54 \text{ seg}$$

❋❋❋❁❁✪❁❁❋❋❋

17 Un coche se mueve con velocidad constante durante 20 segundos y después frena uniformemente hasta que se para, transcurriendo otros 5 segundos. El gráfico v-t del movimiento es el que se indica. Calcula:



a) La distancia total que recorre el móvil en 25 segundos, y la velocidad media con que se mueve a lo largo del recorrido.

b) La aceleración de frenado.

c) El instante en que el móvil ha recorrido 200 m y la velocidad con que se mueve en ese instante

◊◊◊▣▣◉▣▣◊◊◊

a) El coche lleva dos tipos de movimientos:

En el intervalo de 0 a 20 s (mru)

$$e_1 = v \cdot t = 9 \cdot 20 = 180 \text{ m}$$

Intervalo de 20 a 25 s (mrur)

v_0 = velocidad al principio del intervalo = 9 m/s (la del intervalo anterior)
v = velocidad a los 25 s = velocidad final = 0 m/s (se para)

$$a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{0-9}{5} = -\frac{9}{5} = -1'8 \text{ m/s}^2$$

$$e_2 = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} a \cdot t^2 = 9 \cdot 5 - \frac{1}{2} 1'8 \cdot 5^2 = 45 - 22'5 = 22'5 \text{ m}$$

Luego es espacio recorrido en los 25 s es :

$$e = e_1 + e_2 = 180 + 22'5 = 202'5 \text{ m}$$

La velocidad media es el cociente entre el espacio recorrido y el tiempo :

$$v_m = \frac{e}{t} = \frac{202'5}{25} = 8'1 \text{ m/s}$$

b) La aceleración de frenado la hemos calculado en el apartado anterior pues necesaria para hallar el espacio recorrido en este intervalo.

c) Con velocidad constante recorre 180 m, necesitamos pues hallar el tiempo necesario para recorrer, en frenada, un espacio de 200 - 180 = 20 m :

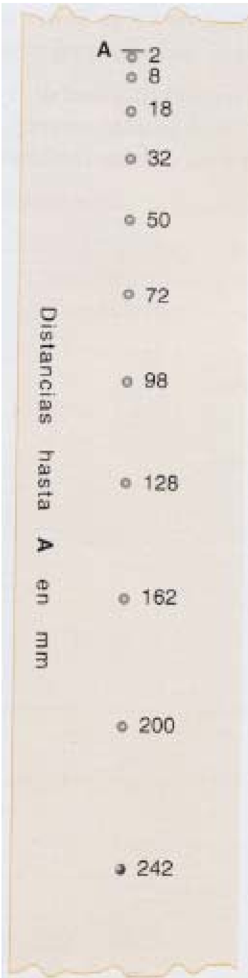
$$20 = 9 \cdot t - \frac{1}{2} 1'8 \cdot t^2 \Leftrightarrow -0'9t^2 + 9t - 20 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 4 \cdot 20 \cdot 0'9}}{-2 \cdot 0'9} = \frac{-9 \pm 3}{-1'8} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{-12}{-1'8} = 6'\hat{6} s \\ \frac{-6}{-1'8} = 3'\hat{3}\ s \end{array} \right\}$$

Luego el tiempo necesario son 3’3... s, ya que 6’6 ... no es posible pues se detiene a los 5 segundos. La velocidad que lleva en es e instante es :

$$v = v_0 - a \cdot t = 9 - 1'8 \cdot 3'3... = 9 - 6 = 3 \text{ m/s}.$$

❋❋❋❁❁✪❁❁❋❋❋

18 Dejamos caer verticalmente un trozo de plomo de 100 g de masa sin velocidad inicial. La posición que ocupa respecto al punto de lanzamiento, A, es la que se indica en el gráfico. Estas posiciones se corresponden con intervalos de tiempo sucesivos de 0,02 s. Calcula:



a) La velocidad con que se mueve el plomo transcurridos 0,2 s desde que se dejó caer.

b) La velocidad media del recorrido hasta ese instante.

c) El valor de la aceleración de la gravedad que corresponde al movimiento.

d) La velocidad con que llega al suelo si la altura desde la que se deja caer es de 1 ,5 m.

e) Si sustituimos el plomo por otro cuerpo de 250 g, ¿cómo varían los resultados del ejercicio?

◊◊◊▣▣◉▣▣◊◊◊

a) El espacio o altura que ha recorrido en caída al cabo de 0’1 s es 50 mm = 0’05 m, como la velocidad inicial es nula, podemos hallar el valor de la aceleración de la gravedad en ese punto :

$$h = v_0 \cdot t + \tfrac{1}{2} g \cdot t^2 \rightarrow 0'05 = \tfrac{1}{2} g \cdot 0'1^2 \Leftrightarrow g = \frac{0'05 \cdot 2}{0'1^2} = 10 \text{ m/s}^2$$

Ahora ya podemos hallar la velocidad a los 0’2 s de caída :

$$v = v_0 + g \cdot t = 0 + 10 \cdot 0'2 = 2 \text{ m/s}$$

b) para calcular la velocidad media hemos de conocer primero el espacio recorrido en esos 0’2 s :

$$e = v_0 \cdot t + \tfrac{1}{2} g \cdot t^2 = \tfrac{1}{2} 10 \cdot 0'2^2 = 0'2 \text{ m}$$

La velocidad media es :

$$v_m = \frac{e}{t} = \frac{0'2}{0'2} = 1 \text{ m/s}$$

c) El valor de la gravedad ya la hemos hallado en el apartado a) es g = 10 m / s^2

d) Para saber la velocidad al tocar el suelo hemos de conocer el tiempo que tarda en recorrer los 1’5 m de altura (llegar al suelo) :

$$h = v_0 \cdot t + \tfrac{1}{2} g \cdot t^2 \rightarrow 1'5 = \tfrac{1}{2} \cdot 10 \cdot t^2 \Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1'5}{10}} = \sqrt{0'3} = 0'548 \text{ s}$$

La velocidad al llegar al suelo es :

$$v = v_0 + g \cdot t = 10 \cdot 0'548 = 5'48 \text{ m/s.}$$

e) Como la masa no influye en ninguna de las magnitudes halladas los cálculos no varían.

❋❋❋❁❁✪❁❁❋❋❋

19 Lanzamos un objeto hacia arriba con una velocidad inicial de 100 m/s. Transcurridos 10 segundos, dejamos caer, sin velocidad inicial, un segundo objeto que se encuentra inicialmente a 200 m de altura.

a) ¿A qué altura del suelo se cruzan?

b) ¿Qué velocidad posee cada objeto en ese instante?

c) ¿En qué sentido se mueve cada uno?

◊◊◊▣▣⦿▣▣◊◊◊

a) Magnitudes del primer objeto (mrud):

Velocidad inicial = v_{01} = 100 m/s.
Espacio recorrido hasta el punto de encuentro = x
Tiempo que transcurre hasta el encuentro = t.

Magnitudes del segundo objeto (mrua):

Velocidad inicial = v_{02} = 0 m/s
Altura desde la que se suelta = h = 200 m
Tiempo que transcurre hasta el punto de encuentro = t - 10 (se le suelta 10 s después que el primero).

Veamos primero el tiempo que tarda el primero en llegar al punto más alto de su trayectoria :

$$v = v_{01} - g \cdot t \ ;\ 0 = 100 - gt;\ t = 100/g = 100/\ 9'8 = 10'20 \text{ s}$$

y se halla, en ese momento, a una altura :

$$h_1 = v_{01} \cdot t - \tfrac{1}{2} g \cdot t^2 = 100 \cdot 10'2 - \tfrac{1}{2} \cdot 9'8 \cdot 10'2^2 = 510'2 \text{ m}$$

Cuando se suelta el segundo el primero lleva 0'2 cayendo desde 510'2 m de altura y llega de nuevo al suelo al cabo de otros 10 s, mientras que el segundo tarda en llegar al suelo (recorrer los 200 m desde los que se suelta) :

$$h = v_{02} \cdot t + \tfrac{1}{2} g \cdot t^2 \rightarrow t = \sqrt{\tfrac{2h}{g}} = \sqrt{\tfrac{2 \cdot 200}{9'8}} = 6'38 \text{ s}$$

luego NO SE ENCUENTRAN en su movimiento, salvo cuando el primero pasa por los **200 m de altura**, en que el segundo aún no se ha soltado.

b) El segundo está parado y para saber la velocidad del primero hemos de calcular primero que tiempo tarda en ascender 200 m y después hallar la velocidad en ese instante :

$$200 = 100 \cdot t - \tfrac{1}{2} 9'8 \cdot t^2 \Leftrightarrow -4'9t^2 + 100t - 200 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-100 \pm \sqrt{100^2 - 4 \cdot 4'9 \cdot 200}}{-9'8} = 2'24 \text{ s}$$

pues el otro resultado es absurdo ya que es mayor de los tarda en llegar al punto más alto.

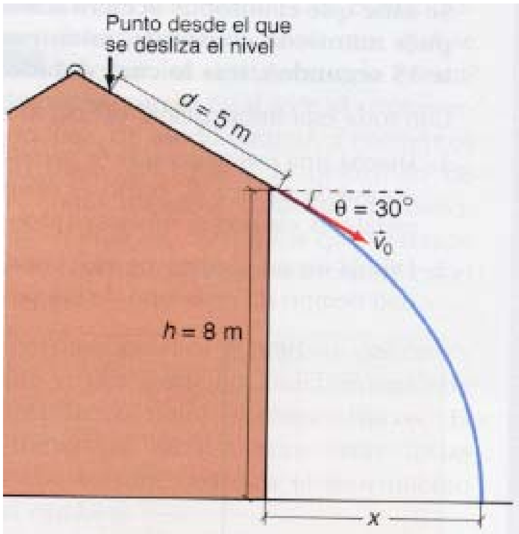
La velocidad en ese instante es :

$$v_1 = v_{01} - g \cdot t = 100 - 9'8 \cdot 2'24 = 78 \text{ m/s.}$$

c) El primero hacia arriba y el segundo en ninguno pues aun está parado.

❋❋❋❁❁✪❁❁❋❋❋

20 Un albañil está trabajando en el tejado de una casa cuando, fortuitamente, le resbala el nivel, que cae deslizándose por el tejado con una aceleración constante e igual a 5 m/ s^2.



Con estos datos, calcula:

a) La velocidad, expresada en forma vectorial, con que sale despedido el nivel del tejado, si recorre sobre él una distancia de 5 m.

b) El módulo de dicha velocidad.
c) La distancia a la que cae de la casa.

El extremo del tejado se encuentra a 8 m de altura y sobresale de la pared de la casa 25 cm.

◊◊◊▣▣◉▣▣◊◊◊

a) Si nos fijamos primero en el tramo de tejado :

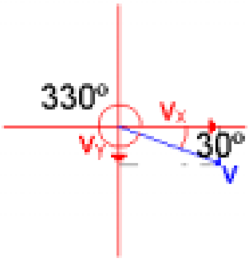
Tipo de movimiento : Rectilíneo y uniformemente acelerado.
Espacio recorrido : d = 5 m
Aceleración del movimiento : a = 5 m/s^2.
Velocidad inicial = v_{0t} = 0 m/s

Con estos datos hallamos primero el tiempo que tarda en recorrer esa distancia y después la velocidad que lleva al cabo de ese tiempo :

$$d = v_{0t} \cdot t + \tfrac{1}{2} a \cdot t^2 \rightarrow 5 = \tfrac{1}{2} 5 \cdot t^2 \Leftrightarrow t = \sqrt{2} \simeq 1'41 \text{ s}$$

$$v = v_{0t} + a \cdot t \;;\; v = 5 \cdot 1'41 = 7'07 \text{ m/s}$$

Esta velocidad la descomponemos según los ejes colocados en el extremo del tejado teniendo en cuenta que forma un ángulo de 30º por debajo de la horizontal :



$$\vec{V} = v_x\,\vec{i} + v_y\,\vec{j} = \left\{ \begin{array}{l} v_x = \quad v\cos 30^\circ = 6'12 \\ v_y = \ v sen 330^\circ = -3'535 \end{array} \right\} = 6'12\,\vec{i} - 3'535\,\vec{j}$$

y tenemos la velocidad de salida del tejado expresada en forma vectorial, que será la velocidad inicial de caída con un movimiento parabólico hasta llegar al suelo que se encuentra a 8 m por debajo del nivel del tejado. A partir de ahora actúa la aceleración de la gravedad en sentido vertical y la velocidad según el eje horizontal se mantiene constante.

b) El módulo es el valor calculado en el apartado anterior de v = 7’07 m /s.

c) Para calcular a la distancia horizontal a que cae hemos de hallar primero cuánto tarda en recorrer los 8 metros de altura en caída vertical :

$$y = v_{oy}\cdot t + \tfrac{1}{2} g\cdot t^2 \rightarrow 8 = 3'535t + \tfrac{1}{2}9'8t^2 \Leftrightarrow 4'9t^2 + 3'535t - 8 = 0 \rightarrow t = \frac{-3'535 \pm \sqrt{3'535^2 + 4\cdot 4'9\cdot 8}}{2\cdot 4'9} =$$

= 0’97 s (el otro valor negativo no tiene sentido físico ya que el tiempo no puede ser negativo)

Ahora calculamos el espacio horizontal recorrido en este tiempo :

$$x = v_{0x}\cdot t = v_x \cdot t = 6'12 \cdot 0'97 = 5'92 \text{ m}$$

para saber la distancia desde la pared, hemos de sumar los 0’25 m que vuela el tejado :

d = 5’92 + 0’25 = 6’17 m

❃❃❃❁❁❂❁❁❃❃❃

21 Un objeto se mueve hacia el este sobre un plano horizontal sin rozamiento, con una velocidad de 2 m/s. Transcurridos cinco segundos, se aplica en dirección sur una fuerza que comunica al cuerpo una aceleración de 1 m /s^2 y se mantiene aplicada durante 10 s.

a) Calcula la velocidad con que se mueve el objeto en los intervalos [0-5] segundos y [5-15] segundos.

b) Calcula la ecuación de la trayectoria en cada uno de esos dos intervalos de tiempo.

c) Representa la velocidad del cuerpo en un diagrama v-t y calcula sobre él la distancia que recorre en los 15 segundos.

◊◊◊▣▣◉▣▣◊◊◊

a)

❄ **Intervalo [0, 5]**

Como no actúa el rozamiento se mueve con velocidad constante v_1 = 2 m/s.

❄ Intervalo [5, 15]

Si hacemos coincidir el eje horizontal con la dirección Oeste - Este y el vertical Norte-Sur, se trata de una composición de movimientos uno horizontal con velocidad constante $v_x = v_1 = v_{0x}$ = 2 m/s y otro vertical de aceleración constante a = 1 m/s^2 y velocidad inicial vertical nula v_{oy} = 0 m/s. Es un movimiento parabólico similar al tiro horizontal.

Eje horizontal v_x = 2 m /s.

Eje vertical $v_y = v_{0y} + a \cdot t = -t$ (sentido negativo, según hemos elegido los ejes).

La composición de ambas velocidades nos proporciona el vector velocidad del movimiento en este intervalo :

$$\vec{v} = v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j} = 2\,\vec{i} - t\,\vec{j}$$

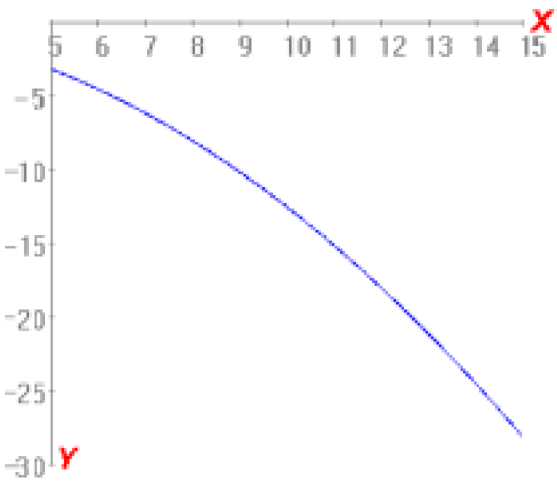
b)

❄ Intervalo [0, 5]

La trayectoria es una línea recta en sentido Este de ecuación :

$$x = v \cdot t = 2t \text{ (m)}$$

❄ Intervalo [5, 15]



Eje horizontal : $x = v_x \cdot t = 2t$.

Eje vertical : $y = v_{oy} \cdot t + (1/2)\, a\, t^2 = -\,0'5\, t^2$ (aceleración hacia abajo en sentido negativo).

Si despejamos t de la primera y lo sustituimos en la segunda tenemos la trayectoria :

$$t = \frac{x}{2} \rightarrow y = -\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 = -\frac{x^2}{8}$$

Que representada nos da la parábola trayectoria.

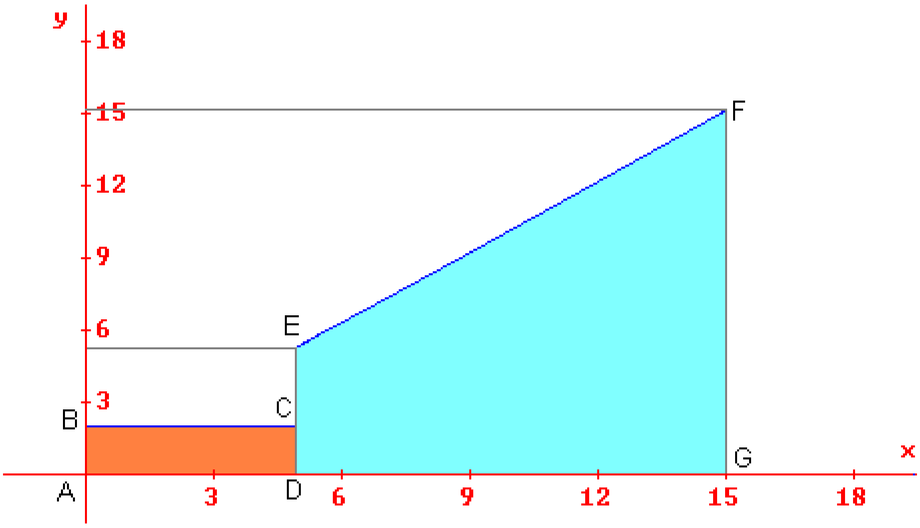
c)

Intervalo [0, 5]

v = 2 m /s

Intervalo [5, 15]

$v = \sqrt{4+t^2}$ m/s



Para hallar el espacio recorrido hemos de calcular el área de las dos cuadriláteros formados, el rectángulo ABCD y el trapecio DEFG :

Longitudes de los segmentos :

AD = 5 s
AB = 2 m/s

DG = 15 -5 = 10 s
DE = $\sqrt{4+5^2} = \sqrt{29} = 5'36$ m/s
$\overline{GF} = \sqrt{4+15^2} = \sqrt{229} = 15'13$ m/s

Área(ABCD) = base · altura = AD · AB = 5 s · 2 m/s = 10 m

$$Área(DEFG) = \frac{B+b}{2} \cdot h = \frac{\overline{GF}+\overline{DE}}{2} \cdot \overline{DG} = \frac{5'36 m/s + 15'13 m/s}{2} \cdot 10s = 102'45 \text{ m}$$

El espacio recorrido es, pues :

e = 10 m + 102’45 m = 112’45 m