Cuestiones (Pág ❹❸)

1 ¿Qué trayectoria describe un cuerpo cuando cae hacia el suelo?

◊◊◊▣▣◉▣▣◊◊◊

☒ Si entendemos por caída que se le suelta a cierta altura con velocidad inicial nula, la trayectoria será una línea recta vertical hacia abajo.

☒ En caso de que la velocidad inicial no sea nula, pueden darse dos casos dependiendo del ángulo de lanzamiento (medido respecto a la horizontal del suelo):

a) Si el ángulo de lanzamiento es recto (90º ó 270º) el cuerpo describe una trayectoria recta como en el caso de velocidad inicial nula.

b) Si el ángulo de lanzamiento no es recto, la trayectoria es parabólica

❃❃❃❁❁❂❁❁❃❃❃

2 Cita tres movimientos, al menos, en los que la trayectoria sea circular.

◊◊◊▣▣◉▣▣◊◊◊

◎ La descrita por los extremos de las agujas de un reloj.

◎ La que describe un punto del timón de un barco.

◎ Las que describen las norias de una feria.

◎ La trayectoria de los números de una ruleta.

◎ La trayectoria de los puntos de cualquier rueda.

❃❃❃❁❁❂❁❁❃❃❃

3 ¿Qué desplazamiento realizas al rodear por completo una mesa? ¿Qué distancia recorres al hacerlo?

◊◊◊▣▣◉▣▣◊◊◊

Como el desplazamiento mide la variación que experimenta la posición inicial y final del móvil y en este caso coinciden, el desplazamiento es nulo.

La distancia recorrida sería el perímetro de la mesa $p = 2a + 2b$, en donde a y b son las longitudes de los lados de la mesa.

❃❃❃❁❁❂❁❁❃❃❃

Cuestiones (Pág 47)

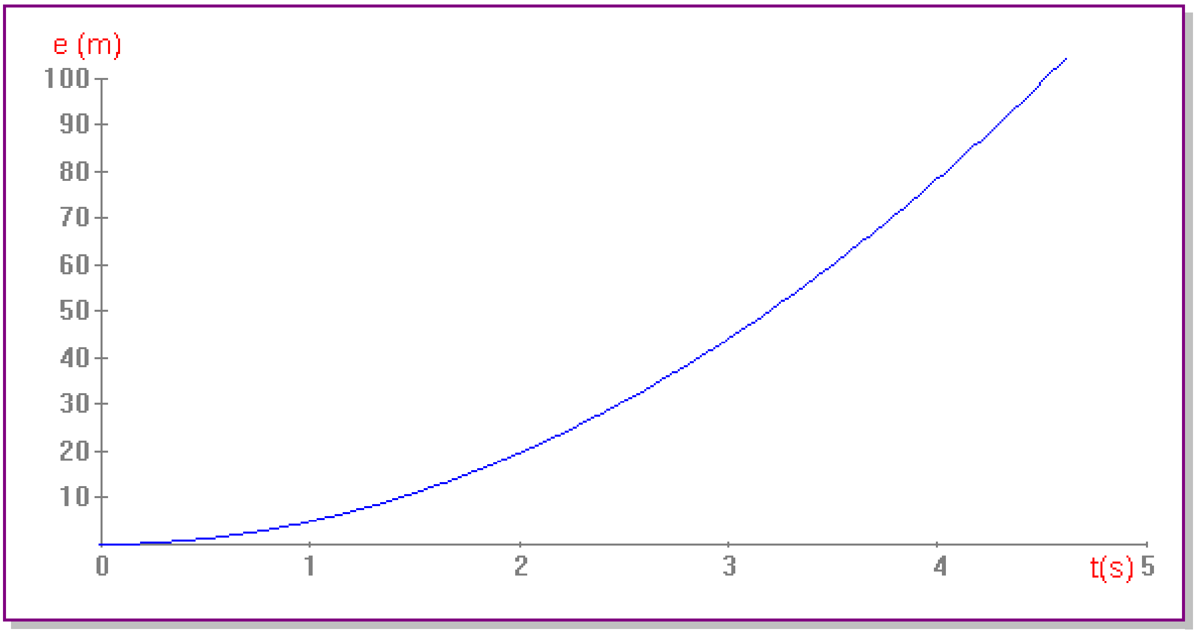
1 ¿Cómo es el movimiento de caída de un cuerpo? Dibuja el gráfico posición-tiempo que corresponde a este tipo de movimiento.

Es un movimiento uniformemente acelerado (aceleración = g = 9’81 m/s^2)

La ecuación del espacio e(m) respecto del tiempo t(s) es :

$$e = v_0 t + \tfrac{1}{2} g t^2 = \tfrac{1}{2} 9'81 t^2 = 4'905 t^2 \text{ (m)}$$

Su representación gráfica es :



2 Diseña una experiencia que permita estudiar el movimiento de caída de un cuerpo.

Objetivo

Estudiar las variables que influyen en el movimiento de caída de cuerpos y obtener experimentalmente las ecuaciones que lo rigen

Material

En un plano inclinado que permita regular su altura, dejamos caer bolas de distinta masa (balanza de precisión) a distintas alturas y medimos el tiempo (cronómetro) que tardan en llegar a la base.

Descripción y procedimiento

Tabulando las alturas (h) del plano frente al tiempo que tarda cada bola podemos realizar el estudio del movimiento y llegar a la conclusión que las ecuaciones de la velocidad al final del plano y la relación h-t no depende de la masa de la bola ni de su volumen.

En la representación gráfica de los datos obtendremos un parábola semejante a la del ejercicio anterior y a partir de ellos podemos obtener la ecuación de 2º grado que relaciona la altura y el tiempo (como $h = at^2 + bt + c$, tiene tres incógnitas, con tres parejas de datos obtenemos tres ecuaciones con tres incógnitas cuya resolución nos permite obtener los parámetros de la ecuación). Por integración se puede obtener la ecuación de v -t

3 ¿Cómo podríamos aminorar la velocidad con que cae un objeto dejado en libertad?

La velocidad de caída de un objeto dejado en libertad no depende (en el caso real, sin consideran la fuerza de rozamiento con el aire) nada más que de la atracción gravitatoria y el tiempo de caída, según la ecuación :

$$v = g \cdot t$$

Si deseamos aminorar la velocidad hay que disminuir g (aumentando la altura sobre la superficie terrestre), pero desde una misma altura (o alturas similares) al cabo de un mismo tiempo la velocidad de caída será la misma.

En el caso real para aminorar la velocidad disponemos de otra variable, aumentando la fuerza de fricción o rozamiento con el aire (presentando una mayor relación superficie/masa o volumen) conseguiremos disminuir la velocidad de caída ya que esta se opone al movimiento.

4 Cita tres movimientos en los que la velocidad varíe. ¿En alguno de esos movimientos cambia la velocidad de modo regular?

En cualquier movimiento real la velocidad varia, pues siempre existirá una pérdida de energía debido al rozamiento y esta variación será siempre variable, pero en el caso ideal podemos considerar movimientos con aceleración constante (variación de velocidad regular) :

La caída de cuerpos en cualquier campo gravitatorio.
El movimiento de un cuerpo sometido a una fuerza instantánea.

El movimiento de un péndulo simple.

etc.

Cuestiones (Pág ❹❾)

1 Calcula la velocidad y su módulo para un cuerpo que se mueve según la expresión:

$$\vec{r} = t \cdot \vec{i} + 2t \cdot \vec{j} - \frac{t^2}{2} \cdot \vec{k}$$

en la que la posición se mide en metros, si el tiempo se mide en segundos.

La velocidad instantánea se define :

$$\vec{v} = \lim_{t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\left(t\,\vec{i} + 2t\,\vec{j} - \frac{t^2}{2}\,\vec{k}\right)}{dt} = \vec{i} + 2\,\vec{j} - t\,\vec{k}$$

Y el módulo del vector anterior es :

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{1 + 4 + t^2} = \sqrt{t^2 + 5}$$

2 En la cuestión anterior, ¿en qué instante alcanza el objeto que se mueve la velocidad de 3 m · s^{-1} ?

Ha de ser v = 3 m/s, luego igualando el módulo y despejando el tiempo tenemos :

$$v = 3 = \sqrt{5 + t^2} \Leftrightarrow 9 = 5 + t^2 \Leftrightarrow t^2 = 9 - 5 = 4 \Leftrightarrow t = \pm\sqrt{4} = 2 \text{ s}$$

Cuestiones (Pág ❺❶)

1 Calcula la aceleración con que se mueve un objeto que parte del reposo y recorre una distancia en línea recta de 100 m en 10 s, acelerando de modo uniforme.

e = 100 m, t = 10 s y v_0 = 0 m/s

Las ecuaciones que rigen el mrua son :

$$v = v_0 + at \qquad \textbf{(1)}$$

$$e = v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2 \; \textbf{(2)}$$

En la ecuación **(2)** si sustituimos los datos, sólo tenemos como incógnita la aceleración a que puede ser despejada :

$$100 = 0 \cdot 10 + \tfrac{1}{2}a \cdot 10^2 \Leftrightarrow 50a = 100 \Leftrightarrow a = \tfrac{100}{50} = 2\ \tfrac{m}{s^2}$$

❃❃❃❁❁✪❁❁❃❃❃

2 ¿Con qué velocidad se mueve el objeto de la cuestión anterior cuando han transcurrido dos segundos? ¿Qué tiempo debe transcurrir para que la velocidad sea de l0 m · s^{-1} ?

◊◊◊▣▣◉▣▣◊◊◊

t = 2 s

Sustituyendo en la ecuación (1) del ejercicio anterior :

$$v = 0 + 2 \cdot 2 = 4 \text{ m/s.}$$

v = 10 m/s

También usamos la ecuación (1) pero ahora despejamos el tiempo necesario para alcanza la velocidad pedida :

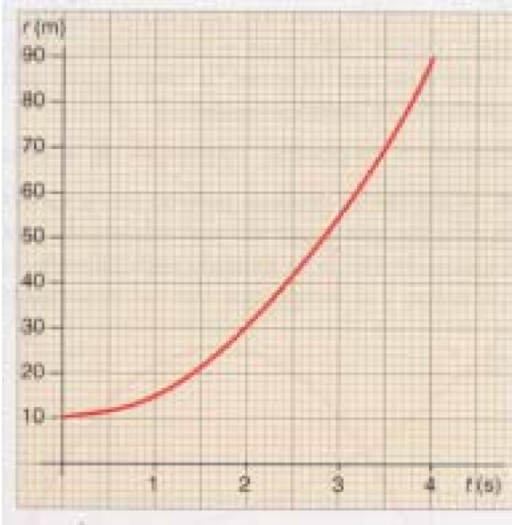
$$10 = 0 + 2t \Leftrightarrow t = \tfrac{10}{2} = 5\ s$$

❃❃❃❁❁✪❁❁❃❃❃

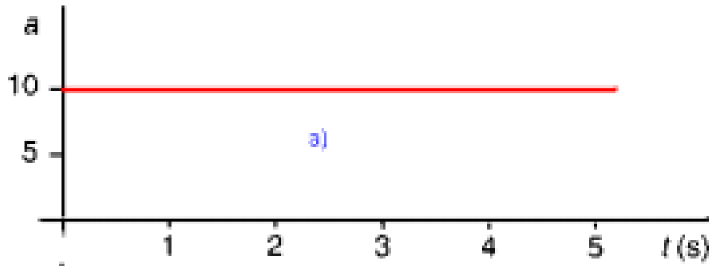
ACTIVIDADES DE LA UNIDAD

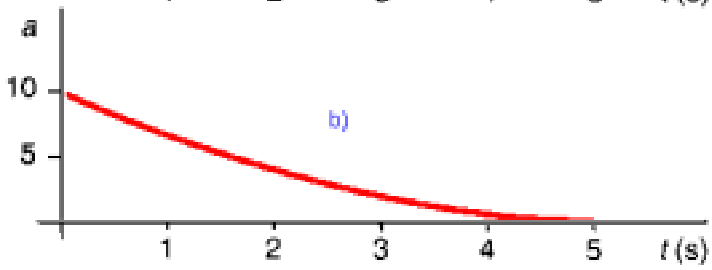
CUESTIONES

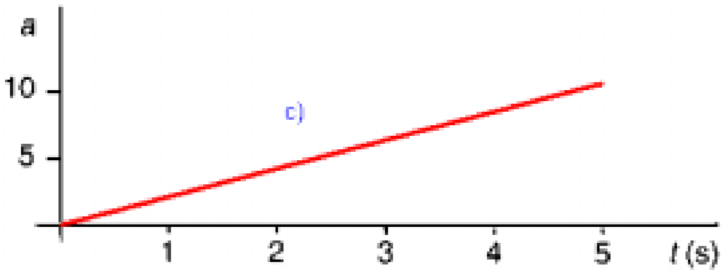
1 La gráfica que sigue muestra cómo varía la posición de un objeto que se mueve partiendo del reposo :

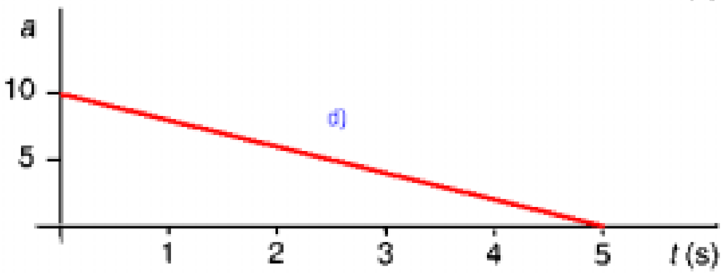


La gráfica que muestra la aceleración del móvil en ese periodo de tiempo debe ser:







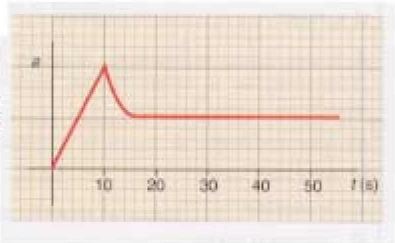


El apartado a) ya que la curva es una parábola y por tanto el desplazamiento frente al tiempo es una ecuación de segundo grado, la velocidad será de grado uno y la aceleración de constante.

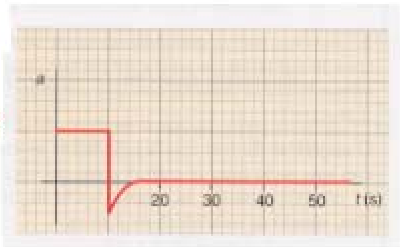
Podemos comprobarlo viendo variaciones del espacio Δr entre $t = 0$ y otro tiempo dado y representando el cociente $\Delta v/\Delta t$ vemos que es una línea recta .

2 Un paracaidista salta desde un avión y cae libremente durante 10 segundos antes de abrir el paracaídas. ¿Cuál de los gráficos a-t que siguen representa mejor la aceleración vertical que actúa sobre él durante los cincuenta primeros segundos del movimiento?

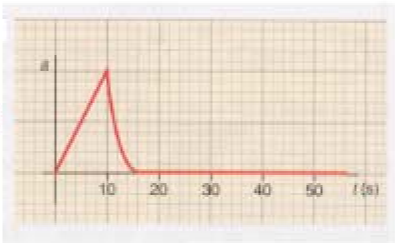
a)



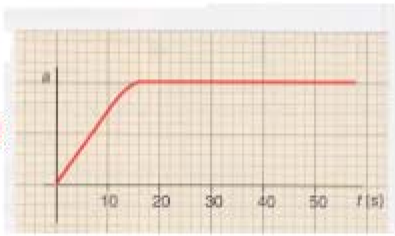
b)



c)



d)



La gráfica que representa mejor la aceleración que actúa sobre el paracaidista es el gráfico b), en donde :

Hasta que abre el paracaídas, en los 10 primeros segundos, cae con aceleración constante (g).

Al abrir el paracaídas sube un disminución de la aceleración y un tirón hacia arriba (la aceleración llega a ser negativa, de sentido contrario), hasta que se equilibran ambas fuerzas (la de atracción gravitatoria y la ascensional del aire), en los 4 segundos entre los 10 y los 14 y baja con velocidad constante, es decir con aceleración nula (a partir de los 14 segundos).

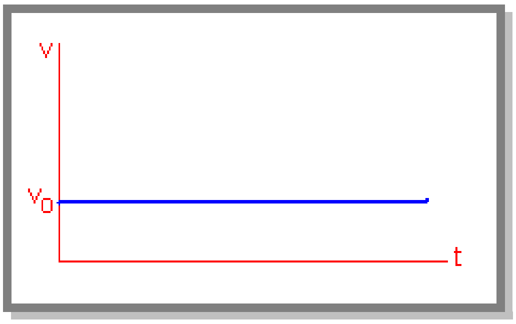
3 Traza cualitativamente en un diagrama v-t las gráficas que corresponden a los siguientes movimientos:

a) v_0 positiva y a_t nula.

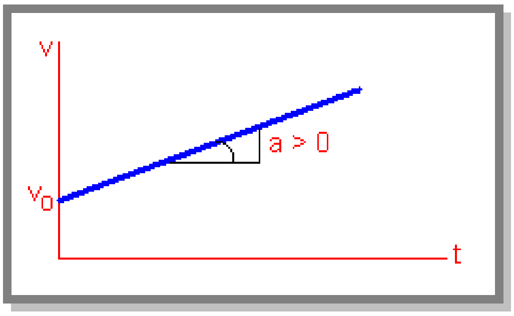
b) v_0 positiva y a_t constante positiva.
c) v_0 negativa y a_t constante negativa.

◊◊◊▣▣◉▣▣◊◊◊

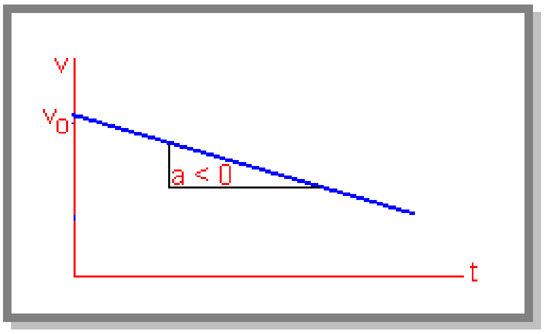
a) Como la aceleración es nula la velocidad permanece constante e igual a la inicial que es positiva :



b) Si la aceleración es constante y positiva la velocidad irá aumentando de forma lineal a partir de la inicial (v_0), el aumento depende de la magnitud de la aceleración (pendiente de la recta) :



c) Como la aceleración es constante y negativa, la velocidad disminuye con el tiempo de forma lineal (más o menos rápidamente dependiendo del módulo de la aceleración) :



4 Si dos objetos experimentan el mismo desplazamiento en el mismo tiempo, podemos afirmar que poseen la misma:

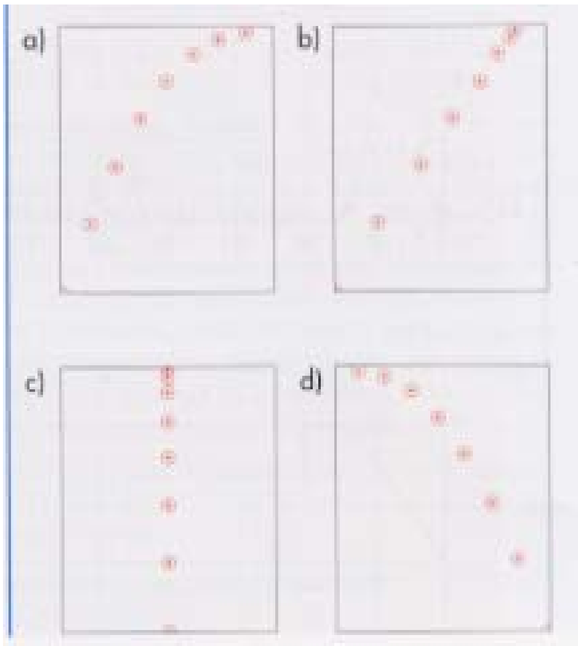
a) Velocidad final.
b) Velocidad inicial.
c) Aceleración.
d) Velocidad media.

Velocidad media, ya que el desplazamiento depende (además del tiempo) de la velocidad inicial y la aceleración y valores diferentes de estas últimas pueden dar valores iguales del desplazamiento en el mismo tiempo. Como la velocidad final también depende de las variables citadas sucede lo mismo, sin embargo la velocidad media (espacio recorrido en ese intervalo de tiempo sí es la misma (ya que el desplazamiento y el tiempo son iguales).

5 Una bola está suspendida mediante un electroimán del techo de un vagón de tren, que se mueve hacia la derecha con una velocidad de 2 m /s.

El vagón se ilumina con luz de flas y se toma una foto de la bola al caer al suelo del vagón. La cámara también se mueve hacia la derecha, siendo su velocidad de 2 m /s .

La fotografía que se obtiene es:



Si el vagón y la cámara se mueven al unísono, el movimiento de la bola se verá como si cayese libremente estando el tren parado y por tanto su trayectoria será recta hacia abajo es decir el apartado **c).**

6 Al hablar del vector aceleración hemos visto un nuevo concepto, el de componentes intrínsecas. ¿Por qué no hablamos de componentes intrínsecas del vector velocidad?

◊◊◊▣▣◉▣▣◊◊◊

Porque el vector velocidad siempre es tangente a la trayectoria y por tanto sólo tendría una componente intrínseca (la tangencial) siendo siempre nula la componente normal, luego no tiene sentido hablar de dos componentes (tangencial y normal) si sólo existe una (la tangencial).

❋❋❋❁❁✪❁❁❋❋❋

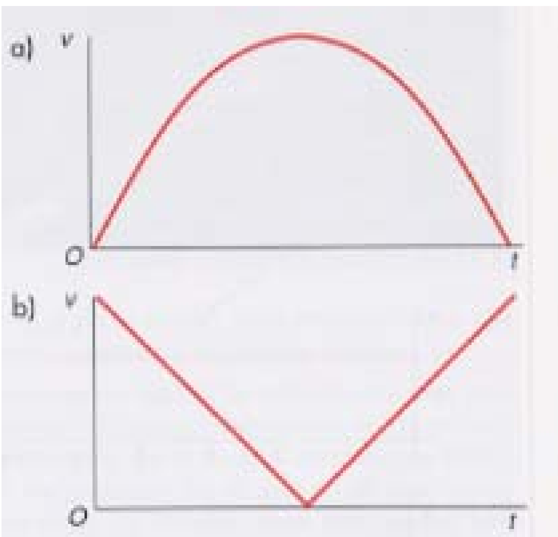
7 ¿Es posible que, en un instante dado, un móvil posea velocidad y aceleración, de tal modo que sus módulos y direcciones sean iguales y sus sentidos opuestos? Razona, si es posible, cuando se da el caso.

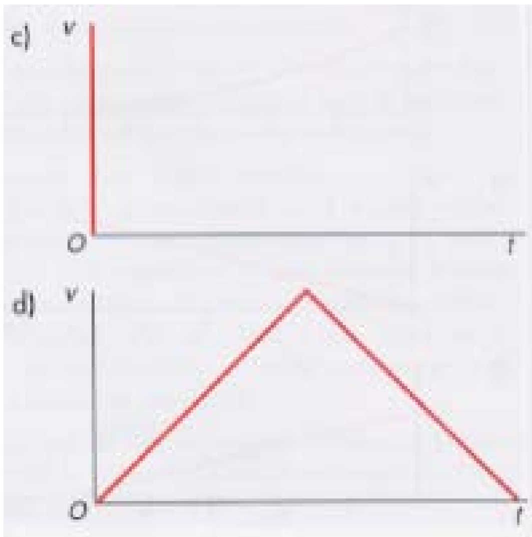
◊◊◊▣▣◉▣▣◊◊◊

Sí, cuando la aceleración sea opuesta al movimiento rectilíneo, movimiento de frenado, en los cuales el cuerpo que se mueve con una cierta velocidad se ve sometido a una fuerza de frenado que produce una aceleración igual y opuesta, lanzamiento de cuerpos hacia arriba en el campo gravitatorio terrestre, llegará un momento en que sean iguales en módulo la aceleración de la gravedad hacia abajo y la velocidad del cuerpo hacia arriba 8 si se le lanza con $v_0 > 9'81$ m/s)

❋❋❋❁❁✪❁❁❋❋❋

8 ¿Cuál de los gráficos muestra correctamente la relación que existe entre el módulo de la velocidad de una bola lanzada verticalmente hacia arriba y el tiempo que dura el movimiento?



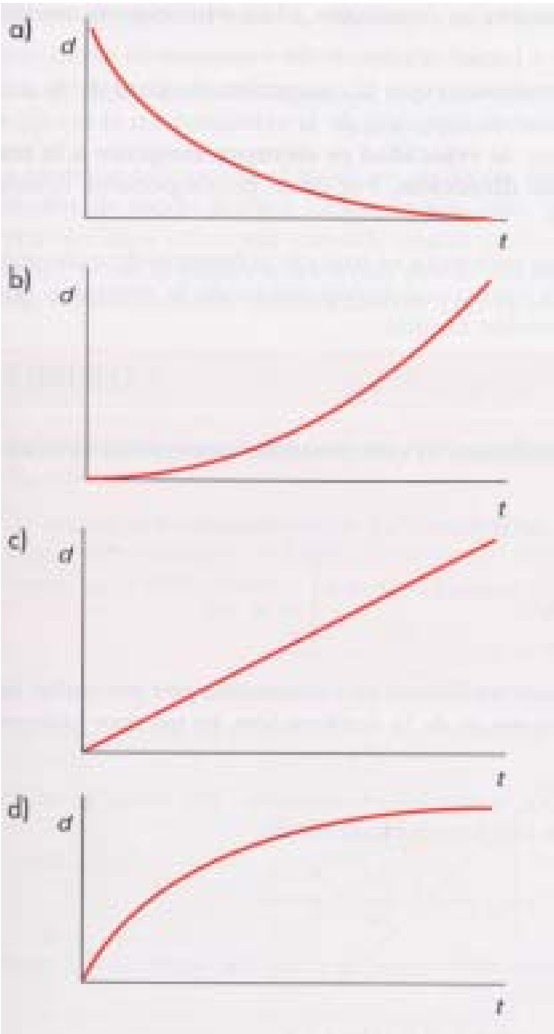


◊◊◊▣▣◉▣▣◊◊◊

Para decidir cuál de las gráficas se adapta mejor estudiemos cómo varia la velocidad:

Se lanza hacia arriba la bala con una velocidad inicial no nula (en caso contrario no se movería) y al verse sometida al campo gravitatorio terrestre de aceleración (g) negativa la velocidad va disminuyendo linealmente con el tiempo de acuerdo con la ecuación $v = v_0 - gt$, hasta que llega al punto más alto en que la velocidad se anula (si no fuese nula seguiría subiendo y no sería el punto más alto) y luego cae con la misma aceleración pero positiva alcanzando velocidades de sentido contrario pero iguales en módulo en tiempos simétricos. De lo anterior se deduce que la gráfica que se ajusta a esta descripción el la del apartado **b),** las de los apartado a) y d) parten de $v_0 = 0$ lo que no es posible y la situación del apartado c) es absurda pues no transcurre el tiempo.

9 Se lanza un carrito por una mesa horizontal, dándole un impulso inicial y dejándolo posteriormente en libertad. ¿Cuál de los gráficos que siguen representa el movimiento del carrito, si la distancia se mide a partir del punto desde el que se lanza?



Como antes, describimos lo que sucede y posteriormente decidimos cuales de los gráfico se ajusta mejor a la descripción física :

Se lanza el cuerpo con una velocidad inicial no nula y después se haya sometido a la acción de la fuerza de rozamiento sobre la mesa que va frenándolo, disminuyendo la velocidad uniformemente (en el caso ideal), hasta que se para. Evidentemente la distancia recorrida debe aumentar con el tiempo, lo que no permite descartar la gráfica del apartado a), además esta variación viene dada por una ecuación de segundo grado en t (supuesto movimiento mrua) :

$$d = v_0 t - \tfrac{1}{2} a t^2$$

luego ha de ser una parábola, no puede ser la gráfica del apartado c) que es lineal.

Como el coeficiente del término de segundo grado en t es negativo ha de ser una parábola abierta hacia el eje horizontal y en las que las variaciones de los espacios recorridos en tiempos iguales sean de cada menores al aumentar el tiempo, la única de las dos restantes que se adapta es la gráfica del apartado **d)** que es la que representa la relación d - t del movimiento.

EJERCICIOS

10 En un movimiento sobre el plano XY, la ecuación que expresa dicho movimiento es: $\vec{r} = 2 \cdot t \cdot \vec{i} + (160 - 4 \cdot t^2) \cdot \vec{j}$

a) Calcula la ecuación de la trayectoria.
b) Dibuja en una hoja de papel milimetrado la ecuación de la trayectoria para un intervalo de tiempo comprendido entre los instantes t= 0 y t = 7 segundos.

◊◊◊▣▣◉▣▣◊◊◊

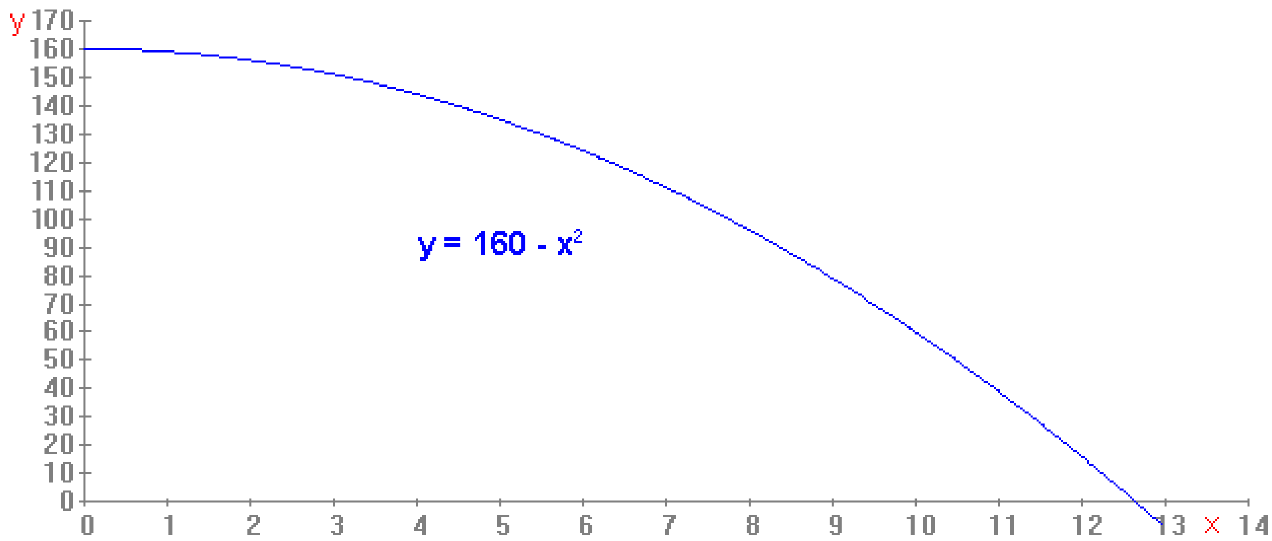
a) Para calcular la ecuación de la trayectoria explicitamos las ecuaciones de x e y y eliminamos el parámetro (t en nuestro caso) :

$x = 2t$
$y = 160 - 4t^2$

Si despejamos t de la primera y el resultado lo sustituimos en la segunda, tenderemos la ecuación de la trayectoria :

$t = \frac{x}{2}$; $y = 160 - 4 \cdot (\frac{x}{2})^2 = 160 - 4 \cdot \frac{x^2}{4} = 160 - x^2 \Rightarrow$ $\mathbf{y = 160 - x^2}$ es la ecuación de la trayectoria, que se corresponde con la ecuación de una parábola abierta hacia abajo.

b) Antes de realizar la representación hemos de calcular el recorrido de la función trayectoria, para t = 0, x = 2t = 0, para t = 7, x = 2t = 2 · 7 = 14, luego la representación de la ecuación $y = 160 - x^2$ hemos de realizarla en el intervalo de valores de x [0, 14] :



❋❋❋❁❁✪❁❁❋❋❋

11 El movimiento de una partícula viene dado por la expresión:

$$\vec{r} = (2 \cdot t^2 + 2) \cdot \vec{i} + (\tfrac{8}{3} \cdot t^3 + 1) \cdot \vec{j} + (t + 3) \cdot \vec{k}$$

En esto expresión lo posición se expresa en metros si el tiempo se expresa en segundos. Calcula:

a) El vector velocidad.
b) El módulo del vector velocidad.
c) El vector aceleración.
d) El módulo del vector aceleración.

◊◊◊▣▣◉▣▣◊◊◊

a) El vector velocidad es la derivada del vector de posición o desplazamiento :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left((2\cdot t^2+2)\vec{i} + (\tfrac{8}{3}\cdot t^3+1)\vec{j} + (t+3)\vec{k}\right) = 4t\,\vec{i} + 8t^2\,\vec{j} + \vec{k}$$

b) $v = \sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2} = \sqrt{(4t)^2+(8t^2)^2+1^2} = \sqrt{16t^2+64t^4+1}$

c) El vector aceleración es la derivada del vector velocidad :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(4t\,\vec{i} + 8t^2\,\vec{j} + \vec{k}\right) = 4\,\vec{i} + 16t\,\vec{j}$$

d) $a = \sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2} = \sqrt{4^2+(16t)^2} = \sqrt{16+256t^2}$

❃❃❃❁❁✪❁❁❃❃❃

12 Un móvil se desplaza sobre el plano XY tal como indican las ecuaciones paramétricas:

$$\left[\begin{array}{l} x = 3\cdot t^3 - \frac{1}{2}\cdot t^2 + 6 \\ y = 6t^2 + sen2t \\ z = 0 \end{array}\right.$$

En esta expresión, x, y, z se expresan en metros y ten segundos.

a) Calcula lo velocidad y lo aceleración del móvil en cualquier instante.

b) Concreta el resultado para el instante t= 15 s.

◊◊◊▣▣◉▣▣◊◊◊

a) La velocidad es la derivada de la posición :

$$\left[\begin{array}{l} v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(3t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 6) = 9t^2 - t \\ v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(6t^2 + sen2t) = 12t + 2\cos 2t \\ v_z = \frac{dz}{dt} = 0 \end{array}\right.$$

Luego el vector velocidad es :

$$\vec{v} = v_x\,\vec{i} + v_y\,\vec{j} = (9t^2 - t)\,\vec{i} + (12t + 2\cos 2t)\,\vec{j}$$

La aceleración es la derivada de la velocidad:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left((9t^2 - t)\,\vec{i} + (12t + 2\cos 2t)\,\vec{j}\right) = (18t - 1)\,\vec{i} + (12 - 4sen2t)\,\vec{j}$$

b)

$$\vec{v}(15) = (9\cdot 15^2 - 15)\,\vec{i} + (12\cdot 15 + 2\cdot\cos 2\cdot 15)\,\vec{j} = 2010\,\vec{i} + 178'27\,\vec{j}$$

$$v(15) = \sqrt{2010^2 + 178'27^2} = 2018\ \tfrac{m}{s}$$

$$\vec{a}(15) = (18\cdot 15 - 1)\,\vec{i} + (12 - 4sen2\cdot 15)\,\vec{j} = 269\,\vec{i} + 10\,\vec{j}$$

$$a(15) = \sqrt{269^2 + 10^2} = 268'19\ \tfrac{m}{s^2}$$

❋❋❋❁❁✪❁❁❋❋❋

13 El vector de posición de una partícula en movimiento es:

$$\vec{r} = t^3\cdot\vec{i} + t\cdot\vec{j}$$

En esta expresión, la posición se expresa en metros si el tiempo se expresa en segundos. Calcula:

a) La ecuación de lo trayectoria.

b) La velocidad y la aceleración en cualquier instante.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

a) Para hallar la ecuación de la trayectoria eliminamos el parámetro t de la x e y :

$x = t^3$
$y = t$

Si en la primera despejamos t y sustituimos en la segunda :

$$t = \sqrt[3]{x} \Rightarrow y = \sqrt[3]{x}$$

También, y más fácil, podemos sustituir la segunda en la primera :

$$t = y \Rightarrow x = y^3,\ \text{es decir } y^3 = x$$

b) El vector velocidad es la derivada, respecto de t, del vector desplazamiento :

$$\vec{v} = d\vec{r}/dt = \frac{d}{dt}\left(t^3\,\vec{i} + t\,\vec{j}\right) = 3t^2\,\vec{i} + \vec{j}$$

El vector aceleración es, a su vez, la derivada, respecto, de t, del vector velocidad :

$$\vec{a} = d\vec{v}/dt = \frac{d}{dt}\left(3t^2\,\vec{i} + \vec{j}\right) = 6t\,\vec{i}$$