

Cuestiones (Pág N° 31)

1 Indica el número de cifras significativas de las siguientes medidas directas, una vez expresadas en unidades S. I.:

- 120,003 mg
- -45,7 ml
- 12,85 años-luz
- 22,00 s
- π mm



⇒ 120'003 mg = 1'20003 · 10⁻⁴ kg ⇒ Seis cifras significativas

⇒ -45'7 ml = -45'7 ml · $\frac{1 \text{ m}^3}{10^6 \text{ ml}}$ = -4'57 · 10⁻⁵ m³ ⇒ Tres cifras significativas

⇒ 12'85 años-luz = v_{luz} (300. 000 km /s) · $t_{\text{año}}$ (365 días) = $3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 12'85 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s} = 1'216 \cdot 10^{17} \text{ m}$ ⇒ Cuatro cifras significativas.

⇒ 22'00 s = 2'200 · 10 s ⇒ Cuatro cifras significativas

⇒ π mm = π mm · $\frac{1 \text{ m}}{10^3 \text{ mm}}$ = $\pi \cdot 10^{-3} \text{ m}$ ⇒ Depende del instrumento con que se mida la longitud.



2 Calcula el número de cifras significativas que se obtienen al realizar las siguientes operaciones algebraicas:

• 2,720 + 1,4856 + 12,02

• 7,3456 - 12,128

• 0,00010 + 0,125



☀ 2,720 + 1,4856 + 12,02 = 16'2256 ≈ 16'23

☀ 7,3456 - 12,128 = - 4' 7824 ≈ - 4' 782

☀ 0,00010 + 0,125 = 0'12510 ≈ 0'125



Cuestiones (Pág N° 32)

1 Suma las siguientes cantidades: $1,22 \cdot 10^{-6}$; $7,13 \cdot 10^{-7}$; $9,91 \cdot 10^{-6}$, y expresa adecuadamente el resultado, teniendo en cuenta que todas las medidas se han realizado con la máxima precisión posible.



$$1,22 \cdot 10^{-6} + 7,13 \cdot 10^{-7} + 9,91 \cdot 10^{-6} = 1,22 \cdot 10^{-6} + 0,713 \cdot 10^{-6} + 9,91 \cdot 10^{-6} = 11' 843 \cdot 10^{-6} \approx 11'8 \cdot 10^{-6} .$$



2 La distancia Tierra-Luna es, aproximadamente, de 380.000 km. ¿A qué distancia se encuentra el Sol de la Luna en un eclipse total de Sol? Considera para la distancia Sol-Tierra la que se indica en el texto. Expresa el resultado teniendo en cuenta la precisión con que se realiza cada medida.



En un eclipse total de Sol, la Luna se coloca entre el Sol y la Tierra impidiendo que veamos el Sol, luego la distancia Sol Luna será = distancia Tierra - Sol - distancia Tierra - Luna = $150\ 000\ 000\ \text{km} - 380\ 000\ \text{km} = 1'5 \cdot 10^8\ \text{km} - 3'8 \cdot 10^5\ \text{km} = 1'5 \cdot 10^8\ \text{km} - 0'0038 \cdot 10^8\ \text{km} = 1' 4962 \cdot 10^8\ \text{km} \approx 1'5 \cdot 10^8\ \text{km} .$



3. ¿Qué distancia separa Madrid de Nueva York?



47 100 km.



4. ¿Qué cantidad de agua cabe en una bañera?



550 l



5. ¿Qué cantidad de agua consumes en una ducha?



220 l



6. ¿Con qué velocidad se mueve un caracol?

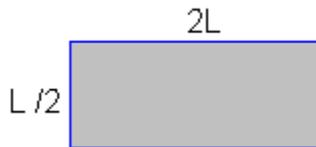


100 m /hr



Cuestiones (Pág N° 33)

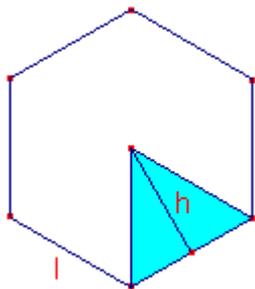
7 Demuestra que la expresión L^2 es también la del área de un rectángulo cuyos lados son la mitad y el doble, respectivamente, que los del cuadrado del ejemplo.



$$\text{Área} = b \cdot a = 2L \cdot (L / 2) = L^2$$



8 Sabiendo que el área del triángulo es la mitad del producto de la longitud de la base por la altura, calcula el área de un hexágono regular.



Hallamos el área de uno de seis triángulos equiláteros en que se divide el hexágono , para lo cual necesitamos expresar la altura (h) en función de la longitud del lado, mediante el teorema de Pitágoras

$$h = \sqrt{l^2 - (\frac{l}{2})^2} = \sqrt{l^2 - \frac{l^2}{4}} = \sqrt{\frac{3l^2}{4}} = \frac{l}{2} \sqrt{3}$$

$$A_T = \frac{b \cdot a}{2} = \frac{l \cdot \frac{l}{2} \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2$$

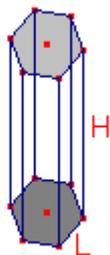
Luego el área del hexágono es seis veces la del triángulo :

$$A_H = 6 \cdot A_T = \frac{3\sqrt{3}}{2} l^2$$



9 Calcula la superficie total de un prisma recto hexagonal si el lado del hexágono mide L y la altura del prisma es H.





El área total = área lateral + 2 · área de la base.

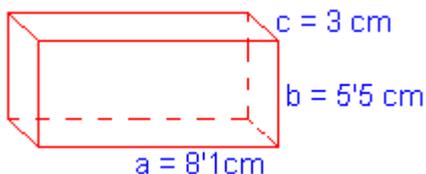
área lateral = 6 · área e una cara = 6 · L·H

Como el área de la base la hemos hallado en el ejercicio anterior obtenemos :

$$A_{total} = 6LH + 3\sqrt{3} L^2 = 3L(2H + \sqrt{3} L)$$



10 Calcula el volumen que contiene una caja de cerillas. Para ello, ten en cuenta los inconvenientes a los que te enfrentas al tratarse de un problema real.



Una caja de cerillas(de cocina que es la que tengo a mano) tiene forma de paralelepípedo con dimensiones que especifico en el dibujo, luego su volumen es :

$$V = a \cdot b \cdot c = 8.1 \cdot 5.5 \cdot 3 \text{ cm}^3 = 113.65 \text{ cm}^3 \approx 113.7 \text{ cm}^3$$



Cuestiones (Pág N° 35)

1 Para medir la longitud de una mesa, se utiliza una regla que aprecia milímetros. Se realizan cinco medidas de la longitud y se obtienen los siguientes resultados, expresados en mm: 792, 794, 793, 795, 794

- a) ¿Qué valor tomaremos como representativo de la longitud?
- b) Calcula el error absoluto y expresa correctamente el resultado de la medida.



a) Tomamos como longitud representativa de la mesa la media de las longitudes medidas :

$$\bar{l} = \frac{792+794+793+795+794}{5} = \frac{3968}{5} = 793.6 \text{ mm} \approx 794 \text{ mm}$$

b) Las desviaciones absolutas son :

$$| 793.6 - 792 | = 1.6$$

$$| 793.6 - 794 | = 0.4$$

$$| 793.6 - 793 | = 0.6$$

$$| 793'6 - 795 | = 1'4$$

$$| 793'6 - 794 | = 0'4$$

Y la media de las desviaciones absolutas es :

$$\varepsilon_d = \frac{1'6+0'4+0'6+1'4+0'4}{5} = 0'88 \approx 1 \text{ mm}$$

La longitud de la mesa es $l = 794 \pm 1 \text{ mm}$.



2 ¿Tiene sentido expresar el error absoluto con más de una cifra significativa?
¿Porqué?



No pues es una medida de la precisión del aparato y en él siempre se puede apreciar una unidad por encima o por debajo del valor real, como máximo, es decir una diferencia (error absoluto) máxima de una cifra significativa, es decir es una cota del valor medido.



3 El número π es irracional. Sin embargo, 3,1415926 es una buena aproximación a π .
¿Qué error absoluto cometemos con esa aproximación? ¿Y si consideramos 3,1416?



$$\varepsilon_a = | 3'1415927 - 3'1415926 | = 0'0000001$$

$$\varepsilon_a = | 3'1415927 - 3'1416 | = 0'0001.$$



Cuestiones (Pág N° 37)

1 Calcula el área de un círculo cuyo radio mide $R = 10,20 \pm 0,04 \text{ m}$. Expresa el resultado en metros cuadrados, acompañado de su correspondiente error absoluto.



$$A = \pi R^2 = \pi \cdot (10'20)^2 = 326'85 \text{ m}^2$$

$$\Delta A = 2 R \cdot \Delta R = 2 \cdot 10'20 \cdot 0'04 = 0'82$$

Luego el área es = **$326'85 \pm 0'82 \text{ m}^2$**



2 Calcula el error relativo que corresponde a la medida realizada en la cuestión anterior.



$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon_a}{A} \cdot 100 = \frac{0'82}{326'85} \cdot 100 = 0'25 \%$$



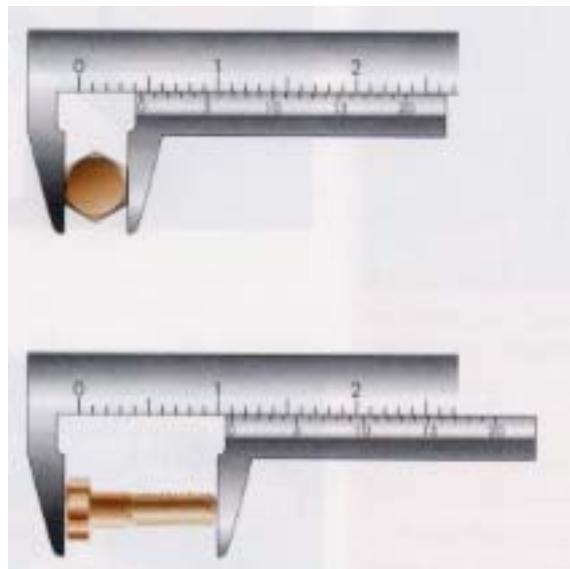
ACTIVIDADES DE LA UNIDAD

Cuestiones

1 Un calibre es un aparato que posee un nonius acoplado a una regla. Para medir la longitud de un objeto, se coloca, como indica la ilustración, apoyado entre el origen de la escala de la regla y el origen de la escala del nonius. Hecho esto, se hace la lectura que corresponda a la división anterior al cero del nonius.

Para determinar ahora la fracción de división que representa la longitud comprendida entre esa división y el cero del nonius, basta ver qué división de éste coincide con una de la regla: el número de orden de dicha división en el nonius es el número de veces que aquella fracción es mayor que la precisión del nonius.

De acuerdo con este criterio, indica qué lectura ofrece el nonius en cada caso.



❁ 0'410 para la longitud del lado de la cabeza de del tornillo

❁ 1'100 para la longitud del tornillo.



2 ¿En qué unidades se mide el error absoluto? ¿Y el error relativo?



❁ El error absoluto tiene las mismas unidades que la medias o medidas al ser una diferencia entre magnitudes iguales.

❁ El error relativo es dimensional al ser un cociente de dos unidades iguales.



3 Las medidas que se realizan con aparatos de medida, ¿son directas o indirectas?



Son medidas directas las que se realizan con aparatos calibrados de acuerdo con la magnitud a medir y la unidad de medida utilizada.



4 ¿Qué puedes hacer para asegurar que en la toma de medidas de una experiencia no estás cometiendo un error sistemático?



Cambiar a otro aparato del mismo tipo y que la media la realice otro persona experimentadora.



5 Señala cinco magnitudes que puedes medir directamente y otras cinco que sueles calcular indirectamente.



Directas	Longitud	Masa	Fuerza	Voltaje	Tiempo
Indirectas	Volumen	Calor	Energía	Potencia	Velocidad



6. ¿Es posible evitar por completo los errores sistemáticos?



Se pueden minimizar al máximo controlando los aparatos de medida y los experimentadores.



7 Indica en qué unidades deben medirse las cantidades siguientes para evitar números grandes o pequeños:

- a) La masa de un balón de fútbol.
- b) La potencia de una central nuclear.
- c) El número de células de un ser humano.



- a) En gramos.
- b) En Gigawatios.
- c) En Teranúmero de células.



Ejercicios

8 ¿Qué edad está medida con mayor precisión: la de una niña de catorce meses o la de un hombre de 45 años? ¿Qué error absoluto y relativo corresponde a cada medida?



Consideramos que no cambiamos la edad hasta que no se cumple, la niña tendrá catorce meses hasta que no haga los 15 y el hombre 45 hasta que no cumpla los 46.

Niña de catorce meses

Edad = e = 14 meses

$\epsilon_a = 1$ mes

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon_a}{e} \cdot 100 = \frac{1 \text{ mes}}{14 \text{ meses}} \cdot 100 = 7'1\%$$

Hombre de 45 años

Edad = e = 45 años

$\epsilon_a = 1$ año

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon_a}{e} \cdot 100 = \frac{1 \text{ año}}{45 \text{ años}} \cdot 100 = 2'2\%$$



9 Estima el volumen del aula en que te encuentras. ¿Cómo podrías calcular la masa de aire que contiene? Diseña una experiencia que te permita hacerlo.



Hay que considerarla como un paralelepípedo o prisma recta de base rectangular y estimar sus tres dimensiones :

Largo = a = 12 m

Ancho = b = 6 m

Alto = c = 2'5 m

Su volumen es = $V = a \cdot b \cdot c = 12 \cdot 6 \cdot 2'5 = 180 \text{ m}^3$.

Para hallar la masa de aire hemos de conocer la densidad media del aire y aplicar la fórmula :

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho \cdot V$$

El experimento tendría dos partes :

- 1 Cálculo del volumen de la habitación mediante medida de su largo(a), ancho(b) y alto(c), para después aplicar la fórmula $V = a \cdot b \cdot c$
- 2 Hallar la densidad del aire: Tomamos un recipiente cerrado de volumen conocido y hacemos el vacío para saber, mediante pesada, su masa vacío. Después lo retiramos de la máquina de vacío y dejamos que penetre el aire y lo pesamos de nuevo.

La diferencia de masas nos dará la masa de aire que contiene y como el volumen es conocido su densidad(ρ).

Conocidos el volumen V de la habitación y la densidad del aire(ρ) podemos saber la masa de aire contenida mediante la fórmula citada más arriba.



10 Calcula el error absoluto y el error relativo que cometes al consultar la hora y decir "es la una y diez".



Suponemos que se trata de un reloj "de manecillas" en que pueden apreciarse los minutos.

Si decimos la 1 y 10 es por que la manecilla del minutero está entre más allá de la mitad del minuto 9 (en caso contrario diríamos y 9) y menos de la mitad entre el minuto 10 y el 11 (en caso contrario diríamos "y 11"), luego :

Error absoluto = $\varepsilon_a = 1$ minuto

Error relativo = $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon_a}{\text{min}} \cdot 100 = \frac{1}{10} \cdot 100 = 10 \%$ (ya que la hora no influye)



11 ¿Cuál sería ese error si dijese "son las cuatro y veinte de la tarde"?



Hacemos las mismas anotaciones y suposiciones que en el ejercicio anterior.

Error absoluto = $\varepsilon_a = 1$ minuto

Error relativo = $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon_a}{\text{min}} \cdot 100 = \frac{1}{20} \cdot 100 = 5\%$ (ya que la hora no influye)



Problemas

12 Para medir la masa de una esfera, realizamos cinco medidas con una balanza que aprecia centésimas de gramo. El resultado que se obtiene es:

Nº de medida	Masa (g)
1	53'12
2	53'20
3	53'16
4	53'14
5	53'18

¿Está bien expresada la masa de la esfera de este modo? En caso negativo, ¿cómo debemos expresarla? ¿Qué valor tomaremos como representativo de la masa de la esfera? ¿Cuál es el error absoluto de la medida? ¿Y el error relativo?



Para expresar la masa de la esfera deberíamos dar su valor medio y su dispersión media o la sensibilidad del aparato (la mayor de las dos)

El valor representativo es la masa media :

$$\bar{m} = \frac{53'12+53'20+53'16+53'14+53'18}{5} = \frac{265'8}{5} = 53'16 \text{ g}$$

El error absoluto es la media de las dispersiones :

$$| 53'16 - 53'12 | = 0'04$$

$$| 53'16 - 53'20 | = 0'04$$

$$| 53'16 - 53'16 | = 0$$

$$| 53'16 - 53'14 | = 0'02$$

$$| 53'16 - 53'18 | = 0'02$$

$$\varepsilon_a = \frac{0'04+0'04+0+0'02+0'02}{5} = \frac{0'12}{5} = 0'024 \approx 0'02 \text{ (ya que apreciamos milésimas)}$$

Masa de la esfera = $53'16 \pm 0'02$

Error relativo :

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon_a}{m} \cdot 100 = \frac{0'02}{53'16} \cdot 100 = 0'04 \%$$



13 Expresa correctamente las siguientes medidas. Utiliza el S.I. y expresa el resultado en notación científica y en notación decimal:

$$128,345 \pm 0,038 \text{ km}$$

$$0,00004567 \pm 0,0008 \text{ km h}^{-1}$$

$$399000 \pm 280 \text{ litros}$$

$$7,85 \pm 0,0059 \text{ cm}^{-3}$$

$$1020 \pm 100 \text{ J} \cdot \text{s}^{-1}$$

Calcula, en cada caso, el error relativo que corresponde a cada medida.



① $128,345 \pm 0,038 \text{ km}$

Notación decimal : $128345 \pm 38 \text{ m}$

Notación científica : $1'28345 \cdot 10^5 \pm 3'8 \cdot 10 \text{ m}$

Error absoluto = $\varepsilon_a = 38 \text{ m}$

Error relativo = $\varepsilon_r = \frac{38}{128345} \cdot 100 = 0'03 \% \approx 0 \%$

② $0,00004567 \pm 0,0008 \text{ km h}^{-1}$ (me parece absurdo que la precisión sea mayor que la medida, ya que si sólo podemos apreciar hasta 8 diezmilésimas , ¿cómo medimos cuarenta y tantas cienmilésimas ?) . En la realidad esta medida no serviría para nada.

Pasamos estas velocidades al S.I. :

$$0'00004567 \frac{\text{km}}{\text{hr}} \cdot \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \cdot \frac{1 \text{ hr}}{3600 \text{ s}} = 0'00000126 \hat{=} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$0'0008 \frac{km}{hr} \cdot \frac{1000 m}{1 km} \cdot \frac{1 hr}{3600 s} = 0'0002\hat{2} \frac{m}{s}$$

- ☑ Notación decimal : $0'00000127 \pm 0'0002 \text{ m/s}$
- ☑ Notación científica : $1'27 \cdot 10^{-6} \pm 2'2 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$
- ☑ Error absoluto = $\varepsilon_a = 0'0002\hat{2} \frac{m}{s}$ ¡ mayor que la medida !
- ☑ Error relativo = $\varepsilon_r = \frac{0'0002\hat{2}}{0'00000126} \cdot 100 = 18519 \%$ ¡¡¡ !!!

③ 399000 ± 280 litros

- * Notación decimal : $399'000 \pm 0'280 \text{ m}^3$
- * Notación científica : $3'99000 \cdot 10^2 \pm 2'80 \cdot 10^{-1} \text{ m}^3$
- * Error absoluto = $\varepsilon_a = 0'280 \text{ m}^3$
- * Error relativo = $\varepsilon_r = \frac{0'280}{399} \cdot 100 = 0'070 \%$

④ $1020 \pm 100 \text{ J} \cdot \text{s}^{-1}$

- * Notación decimal : $1020 \pm 100 \text{ J} \cdot \text{s}^{-1}$
- * Notación científica : $1'020 \cdot 10^3 \pm 1'00 \cdot 10^2 \text{ J} \cdot \text{s}^{-1}$
- * Error absoluto = $\varepsilon_a = 100 \frac{J}{s}$
- * Error relativo = $\varepsilon_r = \frac{100}{1020} \cdot 100 = 9'8 \% \approx 10 \%$



1 4 Calcula el volumen de una esfera cuyo radio mide 5,00 cm y se ha medido con una imprecisión de 0,05 cm.

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi 5'00^3 = 523'59878 \text{ cm}^3 = 523'60 \text{ cm}^3$$

$$\Delta V = 3 \cdot 0'05 \cdot 5'00 = 0'75 \text{ cm}^3$$

Volumen = $523'60 \pm 0'75 \text{ cm}^3$



15 En el problema anterior, ¿qué masa de agua cabe dentro de la esfera, suponiendo que el volumen calculado coincide con el de agua que ésta admite en su interior?
 Densidad del agua: $\rho = 1.000 \pm 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$



$$m = \rho \cdot V = [(1000 \pm 1) \text{ kg/m}^3 \cdot (5'2360 \cdot 10^{-4} \pm 7'5 \cdot 10^{-7}) \text{ m}^3] = (1000 \cdot 5'2360 \cdot 10^{-4}) \pm (1000 \cdot 7'5 \cdot 10^{-7} + 5'2360 \cdot 10^{-4} \cdot 1) = 0'52360 \pm 0'0012736 \text{ kg} = \mathbf{0'5236 \pm 0'001 \text{ kg}}$$



16 Calcula el error relativo que cometemos en las medidas de los dos problemas anteriores. ¿Cuál de las dos medidas es "mejor"? ¿Puedes explicar el motivo?



⌘ Error relativo cometido en el volumen :

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon_a}{V} = \frac{0'75}{523'60} \cdot 100 = 0'14 \%$$

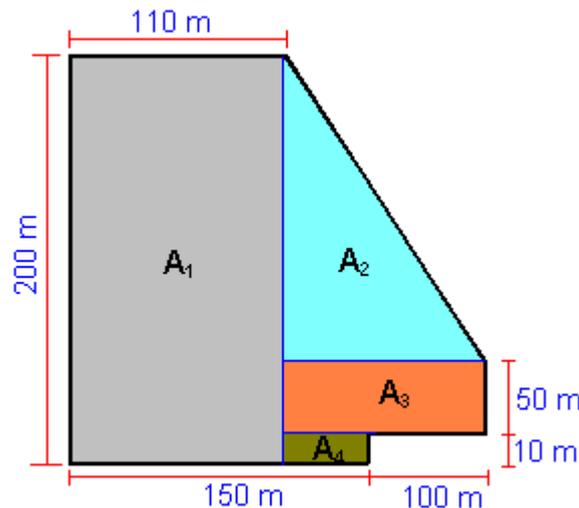
⌘ Error relativo cometido en la masa :

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon_a}{m} = \frac{0'001}{0'5236} \cdot 100 = 0'19 \%$$

Es " mejor " la medida del volumen pues cometemos un error relativo menor



17 ¿Cómo medirías la superficie de un campo de cultivo de forma irregular? Aplica ese criterio al campo de la figura y estima el error que cometes, si las distancias están medidas en metros y la precisión con que se ha medido cada una es de 1 m.





Procedemos, como en el dibujo, a dividirlo en figuras regulares, hallamos las áreas de cada una de ellas y sumamos para calcular el área total.

☒ Área del rectángulo A_1 (dimensiones 200 x 110 m) :

$$A_1 = 200 \cdot 110 = 22\,000 \text{ m}^2$$

Área del triángulo A_2
Dimensiones :

$$\text{Base} = b = (150 + 100) - 110 = 250 - 110 = 140 \text{ m}$$

$$\text{Altura} = a = 200 - (50 + 10) = 200 - 60 = 140 \text{ m}$$

$$A_2 = b \cdot a / 2 = 140 \cdot 140 / 2 = 9\,800 \text{ m}^2$$

☒ Área del rectángulo A_3 (dimensiones 140 x 50)

$$A_3 = 140 \cdot 50 = 7\,000 \text{ m}^2$$

☒ Área del rectángulo A_4 (dimensiones 40 x 10 m) :

$$A_4 = 40 \cdot 10 = 400 \text{ m}^2$$

☒ Área total :

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 22\,000 + 9\,800 + 7\,000 + 400 = 39\,200 \text{ m}^2$$



18 Una de las unidades que utilizas con frecuencia es la que sirve para medir longitudes. Todos tenéis una regla, generalmente de plástico. Compara las unidades de tu regla con las de las reglas de tus compañeros. Para ello, superponlas alineando las escalas.

¿Son exactamente iguales las unidades? ¿Qué reglas parecen mejor construidas? ¿Qué podemos decir acerca de los unidades de instrumentos "corrientes" como la regla que estamos utilizando?

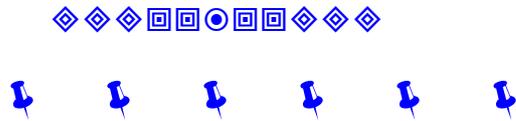


No son exactamente iguales, hay ligeras diferencias entre las de distinta marca, pareciendo mejor construidas las cierta marca muy conocida de dibujo y cuanto menor es su longitud.

Qué siempre cometeremos " imprecisiones " al medir con ellas, pero para la precisión con que las usamos las medidas son más que suficientes.



19 ¿Cuántos clavos necesitaremos para clavar una tabla de 50 x 30 cm, si queremos que haya un clavo en cada extremo de la tabla y el resto estén distribuidos de forma que la distancia máxima entre ellos sea mayor que 5 cm y menor que 6 cm?



Según se aprecia en el dibujo anterior, en cada lado habrá tantos clavos como divisiones se hagan más uno:

Si los ponemos a 5 cm habría en cada base $50 / 5 = 10$ divisiones, es decir 11 clavos, y en cada altura $30 / 5 = 6$ divisiones, 7 clavos

Si los ponemos a 6 cm habría en cada base $50 / 6 = 8'3...$ divisiones, es decir 9 clavos, y en cada altura $30 / 6 = 5$ divisiones, 6 clavos

Como han de ser las distancias mayores que 5 y menores que 6, la única posibilidad es que haya 10 calvos en lado mayor, que formarían 9 divisiones y, por tanto entre cada clavo habría $50 / 9 = 5'5...$ cm. En el lado menor no se podrían cumplir las condiciones del problema pues si ponemos 7 cada dos consecutivos estarían a 5 cm (debe ser mayor de 5) y si ponemos 6, entre dos consecutivos habría 6 cm (debe ser menos de 6 cm)

