Problemas para entrenarse

① Las ecuaciones correspondientes a dos ondas armónicas son :

$$\xi_1 = 0{,}02 \text{ sen } 2\pi\,(2t - 7x) \qquad \xi_2 = 0{,}02 \text{ sen } 2\pi\,(2t - 9x)$$

Donde las longitudes están expresadas en m y los tiempos en s. Hallar:

a) La función de onda resultante.

b) El valor de esta función en el punto x = 0,25 m.

✻✻✻✾✾✪✾✾✻✻✻

a) $\xi = \xi_1 + \xi_2 = 0{,}02\text{sen}2\pi(2t - 7x) + 0{,}02\text{ sen}2\pi(2t - 9x) =$

$$= 0{,}02[\text{sen}2\pi(2t-7x)+\text{sen}2\pi(2t-9x)]\overset{(1)}{=}0{,}02\text{sen}\frac{2\pi(2t-7x)+2\pi(2t-9x)}{2}\cos\frac{2\pi(2t-7x)-2\pi(2t-9x)}{2} =$$

$$= 0{,}02\text{sen}\frac{2\pi(2t-7x+2t-9x)}{2}\cos\frac{2\pi(2t-7x-2t+9x)}{2} = 0{,}02\text{sen}2\pi(2t-8x)\cos 2\pi x$$

b)

$$\xi(x,t) = 0{,}02\text{sen}2\pi(2t-8x)\cos 2\pi x, \text{luego } \xi(x=0{,}25,t) = 0{,}02\text{sen}2\pi(2t-8\cdot 0{,}25)\cos 2\pi\cdot 0{,}25 =$$

$$= 0{,}02\text{sen}2\pi(2t-2)\cos\frac{\pi}{2} = 0$$

✻✻✻✾✾✪✾✾✻✻✻

② Las ecuaciones correspondientes a dos ondas armónicas son:

$$\xi_1 = 0{,}002 \text{ sen } 2\pi(2t - 7x) \qquad \xi_2 = 0{,}002 \text{ sen } 2\pi\,(t - x)$$

Donde las longitudes están expresadas en m y los tiempos en s. Hallar la amplitud de la onda resultante.

✻✻✻✾✾✪✾✾✻✻✻

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\delta} = \sqrt{2A^2 + 2A^2\cos\delta} = \sqrt{2A^2(1+\cos\delta)} = A\sqrt{2\left(2\cos^2\frac{\delta}{2}\right)} = 2A\cos\frac{\delta}{2} =$$

$$= 2A\cos\frac{2\pi((t-2t)-(x-7x))}{2} = 2A\cos 2\pi\left(3x-\frac{t}{2}\right) = 0{,}004\cos 2\pi\left(3x-\frac{t}{2}\right)$$, la amplitud de la onda resultante varía periódicamente con el tiempo (t) y la posición (x).

✻✻✻✾✾✪✾✾✻✻✻

③ En un punto P coinciden dos ondas armónicas de ecuaciones:

$$\xi_1 = 0{,}001 \text{ sen } 2\pi\,(t - 0{,}5) \qquad \xi_2 = 0{,}002 \text{ sen } 2\pi(t - 0{,}2)$$

Donde las longitudes están en m y los tiempos en segundos. Determinar la amplitud de la onda resultante en el punto P.

✻✻✻✾✾✪✾✾✻✻✻

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\delta}=\sqrt{2\cdot 0{,}001^2+2\cdot 0{,}002^2+2\cdot 0{,}001\cdot 0{,}002\cos\delta}=\sqrt{2\cdot 10^{-6}+8.10^{-6}+4\cdot 10^{-6}\cos\delta}=$$
$$=\sqrt{1\cdot 10^{-5}+4\cdot 10^{-6}\cos\frac{2\pi[(t-0{,}2)-(t-0{,}5)]}{2}}=\sqrt{1\cdot 10^{-5}+4\cdot 10^{-6}\cos\frac{2\pi[0{,}3]}{2}}=0{,}0035$$

****

④ **Dos focos sonoros coherentes emiten un sonido de 1,7 kHz. Un observador percibe un máximo de intensidad cuando se encuentra a 4,0 m de uno de los focos y a 5,0 m del otro. ¿Percibe a esa distancia un máximo o un mínimo de intensidad?** (Velocidad del sonido: 340 m/s.)

****

$$v=\lambda f \Leftrightarrow \lambda=\frac{v}{f}=\frac{340}{1700}=0{,}2\ \text{m}$$

Ahora vemos que relación existe entre la diferencia de caminos y la longitud de onda:

$x_2-x_1=5{,}0-4{,}0=1{,}0\ \text{m}=n\lambda=5\cdot 0{,}2$, como la diferencia de distancias entre los focos es un múltiplo entero (5) de longitudes de onda, se trata de un máximo de interferencia.

****

⑤ **Cuando vibran simultáneamente dos diapasones, la frecuencia de las pulsaciones es 5 Hz. La frecuencia de uno de los diapasones es 400 Hz. ¿Cuál será la frecuencia del otro?**

****

Si la frecuencia dada es la del menor frecuencia:

$$\nu=\frac{\nu_2-\nu_1}{2};5=\frac{\nu_2-400}{2}\Leftrightarrow \nu_2=2\cdot 5+400=410\ \text{Hz}$$

Pero si la frecuencia es la superior:

$$\nu=\frac{\nu_2-\nu_1}{2};5=\frac{400-\nu_1}{2}\Leftrightarrow \nu_1=400-10=390\ \text{Hz}$$

****

⑥ **En una cuerda tensa de 2 m de longitud, fija por sus extremos, la frecuencia fundamental de una onda estacionaria es 200 Hz. Calcular la velocidad de las ondas transversales en la cuerda.**

****

Frecuencia fundamental, n = 1.

$$\nu_0=\frac{1\cdot v}{2L}\Leftrightarrow v=2L\nu_0=2\cdot 2\cdot 200=800\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

****

⑦ Un rayo de luz que incide con un ángulo de 30° desde el aire sobre agua se refracta con un ángulo de refracción de 22°.Hallar la velocidad de la luz en el agua.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

Aplicamos la ley de Snell:

$$\frac{\text{sen}\hat{i}}{\text{sen}\hat{r}} = \frac{c}{v_{H_2O}} \Leftrightarrow v_{H_2O} = \frac{\text{sen}\hat{r}}{\text{sen}\hat{i}}c = \frac{\text{sen}22^o}{\text{sen}30^o} \cdot 300.000\frac{km}{s} = 224764\frac{km}{s}$$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

⑧ ¿Cuál debe ser el tamaño aproximado de un obstáculo para que un sonido de 250 Hz experimente el fenómeno de la difracción?

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

El tamaño debe ser del orden de magnitud de la longitud de onda:

$$v = \lambda f \Leftrightarrow \lambda = \frac{v}{f} = \frac{340}{250} = 1{,}36\ m$$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

⑨ La locomotora de un tren que se acerca a una estación a 108 km/h emite un sonido continuo de 400 Hz. ¿Qué frecuencia percibe un observador en reposo en la estación?

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

Velocidad del emisor = $v_F = 108\frac{km}{h}\cdot\frac{1000m}{1km}\cdot\frac{1h}{3600s} = 30\frac{m}{s}$

Velocidad de propagación del sonido = v = 340 m/s.

Frecuencia de emisión = ν = 400 Hz.

$$\nu' = \nu\frac{1}{\left(1-\frac{v_F}{v}\right)} = 400\frac{1}{\left(1-\frac{30}{340}\right)} = 438{,}71Hz$$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

⑩ Un diapasón que vibra con una frecuencia de 450 Hz se aleja con una velocidad de 6 km/h de un observador fijo. ¿Cuál es la frecuencia percibida por el observador?

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

Velocidad del foco emisor = $v_F = 6\frac{km}{h}\cdot\frac{1000m}{1km}\cdot\frac{1h}{3600s} = 1{,}\hat{6}\frac{m}{s}$

Velocidad de propagación del sonido = 340 m/s.
Frecuencia de emisión = ν = 450 Hz.

$$\nu' = \nu\left(1 - \frac{v_F}{v}\right) = 450\left(1 - \frac{1,\hat{6}}{340}\right) = 447,8 \text{ Hz.}$$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

Problemas para pensar

11 Dos ondas se propagan en una cuerda en la misma dirección con una velocidad de 4 m/s. Ambas ondas tienen una frecuencia de 200 Hz y una amplitud de 5 mm, pero tienen una diferencia de fase de 6 radianes.

a) Hallar la ecuación de la onda resultante.
b) ¿Cuál es la amplitud de esta onda?

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

v_P = 4 m/s.
f = 200 Hz.
A = 5 mm = 0,005 m.
Diferencia de fase = $\delta = \varphi_2 - \varphi_1 = (\omega t - kx_2) - (\omega t - kx_1) = = k(x_1 - x_2) = 6$ rad.

Necesitamos la longitud de onda: $v_P = \lambda f \Leftrightarrow \lambda = \frac{v_P}{f} = \frac{4}{200} = 0,02 \text{ m}$

a) La ecuación de la onda resultante de la interferencia es:

$$y = 2A\cos k\frac{x_2 - x_1}{2}\text{sen}\left(\omega t - \frac{k(x_1 + x_2)}{2}\right) = 2\cdot 0,005\cos 3\text{rad}\,\text{sen}2\pi\left(200t - \frac{x_1 + x_2}{2\cdot 0,02}\right) =$$

$= 0,01\text{sen}2\pi\left(200t - \frac{x_1 + x_2}{0,04}\right)$, donde x_1 y x_2 son las distancias de los focos a que se halla la interferencia.

b) La amplitud es, como hemos calculado en el apartado anterior, A = 0,01 m.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

12 Dos fuentes sonoras coherentes emiten sonidos de 200 Hz y 0,02 mm de amplitud. ¿Cuál es la amplitud de la onda resultante en un punto P que dista 4 m de la primera y 6 m de la segunda?

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

A = 0,02 mm = 0,00002 m.
f = 200 Hz.
x_1 = 6 m.
x_2 = 4 m.

Hallamos la longitud de onda:

$$v_P = \lambda f \Leftrightarrow \lambda = \frac{v_P}{f} = \frac{340}{200} = 1,7\,\text{m}$$

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(x_1 - x_2) = \frac{2\pi}{1,7}(6 - 4) = 7,39\,\text{rad}$$

$$A_I = \sqrt{2A^2 + 2A^2\cos\delta} = A\sqrt{2(1+\cos\delta)} = 2A\cos\frac{\delta}{2} = 2{\cdot}0{,}00002\cos\frac{7{,}39}{2} = 0{,}00004\ \text{m}$$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

⑬ Dos altavoces idénticos emiten a 200 Hz con un intensidad de 80 dB cada uno de ellos. Un observador se encuentra a 6 m del primero y a 8 m del segundo.

a) ¿Qué nivel de intensidad sonora percibe el observador los altavoces emiten en fase?

b) ¿Y si emiten en oposición de fase (diferencia de fase d 180°)?

c) Repetir las cuestiones anteriores si la frecuencia de emisión desciende a 100 Hz.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

Frecuencia = $f_1 = f_2 = 200$ Hz.
Intensidad = $I_1 = I_2 = 80$ dB.
$x_1 = 6$ m.
$x_2 = 8$ m.

a) Si están en fase, la diferencia de fase es nula δ = 0º

$$I = 2I_1 + 2I_1\cos\delta = 2I_1(1+\cos\delta) = 2{\cdot}80(1+\cos 0^\circ) = 320\,\text{dB}$$

b) δ = 180º, luego:

$$I = 2I_1 + 2I_1\cos\delta = 2I_1(1+\cos\delta) = 2{\cdot}80(1+\cos 180^\circ) = 0\,\text{dB}$$

c) La intensidad no cambia.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

⑭ Dos altavoces iguales emiten a 500 Hz con un, potencia de 5 mW cada uno de ellos. Un observador, situado entre ambos, dista 3 m del primero y 4 m del segundo. ¿Qué intensidad sonora percibe el observador?

a) Si sólo funciona el primer altavoz.

b) Si sólo funciona el segundo.

c) Si funcionan ambos simultáneamente en fase.

d) Si funcionan ambos simultáneamente en oposición de fase.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

f = 500 Hz.
P = 5 · 10^{-3} W.
$x_1 = 3$ m.
$x_2 = 4$ m.

a) Considerando las ondas sonoras esféricas: $I = \dfrac{P}{4\pi x_1^2} = \dfrac{5{\cdot}10^{-3}}{4\pi{\cdot}3^2} = 4{,}4{\cdot}10^{-5}\ \dfrac{\text{W}}{\text{m}^2}$

b) Considerando las ondas sonoras esféricas: $I = \dfrac{P}{4\pi x_1^2} = \dfrac{5 \cdot 10^{-3}}{4\pi \cdot 4^2} = 2{,}5 \cdot 10^{-5}\ \dfrac{W}{m^2}$

c) $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\delta = 4{,}4 \cdot 10^{-5} + 2{,}5 \cdot 10^{-5} + 2\sqrt{4{,}4 \cdot 10^{-5} \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-5}}\cos 0° = 1{,}35 \cdot 10^{-4}\ \dfrac{W}{m^2}$

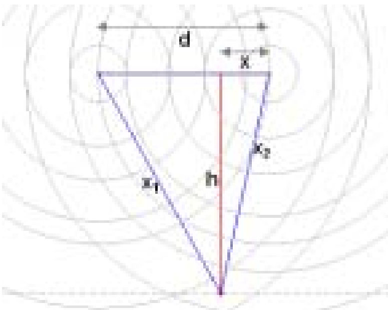
d) $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\delta = 4{,}4 \cdot 10^{-5} + 2{,}5 \cdot 10^{-5} + 2\sqrt{4{,}4 \cdot 10^{-5} \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-5}}\cos 180° = 2{,}7 \cdot 10^{-6}\ \dfrac{W}{m^2}$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

15 Dos altavoces están funcionando en fase mediante un amplificador de 500 Hz y distan entre sí 3 m. Un observador está situado a 20 m del punto medio de la recta que une los altavoces y se mueve sobre una recta paralela a ella. Determinar la posición de los máximos y mínimos de intensidad del sonido que percibirá el observador.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

f = 500 Hz
d = 3 m.
h = 20 m.



Hallamos la longitud de onda: $v_P = \lambda f \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{v_P}{f} = \dfrac{340}{500} = 0{,}68\,m$

Los máximos de interferencia se dan en los puntos cuya diferencia de distancias a los focos emisores es un número entero de longitudes de onda:

$x_1 - x_2 = n\lambda = 0{,}68n$ y además: $x_1^2 - x_2^2 = 9 - 6x = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) \Leftrightarrow (x_1 + x_2) = \dfrac{9 - 6x}{0{,}68n}$

Dando valores a n = 0, 1, 2, 3, ... tenemos una relación entre x_1, x_2 y x.

Los mínimos de interferencia se dan en los puntos cuya diferencia de distancias a los focos emisores es un número impar de semilongitudes de onda:

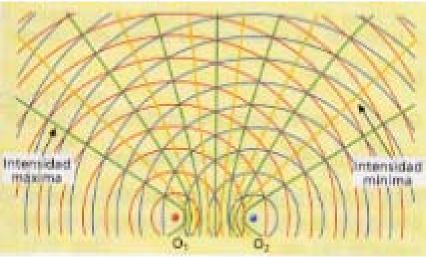
$x_1 - x_2 = n\lambda/2 = 0{,}34(2n+1)$ y además:

$x_1^2 - x_2^2 = 9 - 6x = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) \Leftrightarrow (x_1 + x_2) = \dfrac{9 - 6x}{0{,}34(2n+1)}$

Dando valores a n = 0, 1, 2, 3, ... tenemos una relación entre x_1, x_2 y x.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

16 Diagrama de interferencia. Como se observa en el dibujo, las figuras de interferencias de dos ondas armónicas forman haces de hipérbolas. Teniendo en cuenta la definición de hipérbola y las condiciones de interferencia de máximos y mínimos en el espacio justificar la formación de este diagrama de interferencia.



Como los máximos de interferencia se producen en aquellos puntos cuya diferencia de distancias a los focos emisores (puntos fijos) es nλ, luego se trata de una familia de hipérbolas (las de color verde).
Los mínimos son la familia de hipérbolas (las amarillas) que cumplen $x_1 – x_2 = (2n+1)\lambda/2$

17 Un camionero que circula a 90 km/h hace sonar su bocina, que emite un sonido de 300 Hz, en el instante en que pasa por delante de un observador en reposo. ¿Qué frecuencia del sonido percibe el observador cuando el camión se aleja?

Velocidad del foco = v_F = 90 km/h = 25 m/s.
Frecuencia del emisor = ν = 300 Hz.
Velocidad de propagación del sonido = v = 340 m/s.

$$\nu' = \nu\left(1 + \frac{v_F}{v}\right) = 300\left(1 + \frac{25}{340}\right) = 322\,\text{Hz.}$$

Problemas para profundizar

18 Una cuerda fija por sus dos extremos vibra según la ecuación:

$$y = 3\,\text{sen}\left(\frac{2\pi x}{3}\right)\cos 30\pi t$$

Estando x e y expresados en cm y t en segundos.

a) Hallar la distancia entre dos vientres consecutivos.

b) Determinar la amplitud y la frecuencia de las ondas que ha generado la onda estacionaria descrita.

c) Hallar la elongación del punto x = 4,5 cm en el instante t = 0,1 s.

a) La distancia entre dos vientres consecutivos es la semilongitud de onda:

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5\text{ m}.$$

b) Procedemos por comparación:

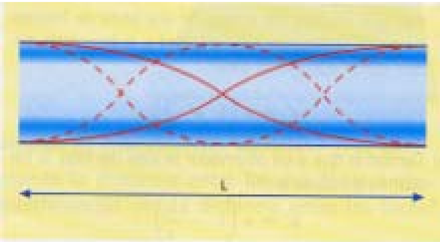
$$\begin{pmatrix} y = 2A\text{sen}\dfrac{2\pi}{\lambda}x\cos\dfrac{2\pi}{T}t \\ y = 3\text{se}\left(\dfrac{2\pi x}{3}\right)\cos 30\pi t \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2A = 3 \Leftrightarrow A = \dfrac{3}{2} = 1{,}5\,\text{cm} \\ \lambda = 3\text{ cm} \\ \dfrac{2}{T} = 30 \Rightarrow T = \dfrac{2}{30} = 0{,}0\hat{6}\text{s}; \Rightarrow f = 15\,\text{Hz} \end{array} \right\}$$

c) $y(4{,}5{,}0{,}1) = 3\text{sen}\left(\dfrac{2\pi\cdot 4{,}5}{3}\right)\cos 30\pi\cdot 0{,}1 = 0{,}48\text{ cm}$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

19 Ondas estacionarias en tubos abiertos por ambos extremos. Demostrar que las ondas estacionarias en un tubo abierto por ambos extremos (límites libres) tienen como frecuencias $\nu = \dfrac{nv}{2L}$, siendo L la longitud del tubo, v la velocidad de propagación y n = 1, 2, ... (Indicación: en ambos extremos se produce un vientre de la onda estacionaria.)

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻



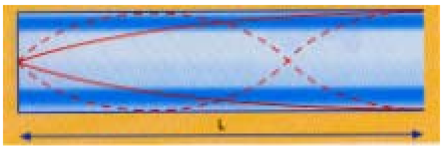
Como la onda que se genera es estacionaria, según vemos en el texto se cumplirá:

$$\lambda = \frac{2L}{n}, \text{ pero } v = \lambda\nu \Leftrightarrow \lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{2L}{n} \xrightarrow{\text{despejando}} \nu = \frac{nv}{2L}$$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

20 Ondas estacionarias en tubos abiertos por un extremo. Demostrar que las ondas estacionarias en un tubo abierto por uno de sus extremos (límite libre) y cerrado en el otro (límite fijo) tienen como frecuencias $\nu = (2n+1)\dfrac{v}{4L}$ siendo L la longitud del tubo, v la velocidad de propagación y n = 0, 1, 2, ... (Indicación: en el extremo abierto se produce un vientre de la onda estacionaria y en el cerrado un nodo.)

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻



Como la distancia entre un nodo y un vientre consecutivos es $\lambda/4$, tenemos:

$$L = (2n+1)\frac{\lambda}{4} \text{ y } \lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{4L}{2n+1} \xrightarrow{\text{despejando}} \nu = (2n+1)\frac{v}{4L}$$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

21 Calcular la longitud de un tubo de órgano cerrado por un extremo para que la frecuencia fundamental del sonido que emite sea 131 Hz. (Velocidad del sonido: 340 m/s.)

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

Aplicamos la fórmula del ejercicio anterior para n = 0 (frecuencia fundamental):

$$\nu_0 = (2n_0+1)\frac{v}{4L} = \frac{v}{4L} \xrightarrow{\text{despejando}} L = \frac{v}{4\nu_0} = \frac{340}{4\cdot 131} = 0{,}65\text{ m} = 65\text{ cm}$$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

22 Un tubo de órgano abierto por uno de sus extremos produce una frecuencia fundamental de 131 Hz. ¿Qué longitud debe tener otro tubo de las mismas características para que su frecuencia fundamental sea igual a la del segundo armónico del primer tubo?

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

◇ A partir de la frecuencia fundamental hallamos la longitud L del tubo como en el ejercicio anterior:

$$\nu_0 = (2n_0 + 1)\frac{v}{4L} = \frac{v}{4L} \xrightarrow{\text{despejando}} L = \frac{v}{4\nu_0} = \frac{340}{4{\cdot}131} = 0{,}65\ \text{m} = 65\ \text{cm}$$

◇ Ahora hallamos la frecuencia del segundo armónico:

$$\nu_1 = (2n + 1)\frac{v}{4L} = 3\frac{v}{4L} = 3\frac{340}{4{\cdot}0{,}65} = 392{,}31\,\text{Hz}$$

◇ Hallamos la longitud del tubo que tendrá esta última frecuencia como principal:

$$\nu_1 = \frac{v}{4L'} \Rightarrow 392{,}31 = \frac{340}{4L'} \Leftrightarrow L' = \frac{340}{4{\cdot}392{,}31} = 0{,}22\ \text{m} = 22\ \text{cm}$$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

23 Un radar para controlar la velocidad de los automóviles emite ondas electromagnéticas de 2 - 109 Hz. Después de reflejarse en un automóvil se tiene una pulsación de 300 Hz. ¿Cuál es la velocidad del automóvil?

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

24 Efecto Doppler para foco fijo y observador en movimiento.

a) Demostrar que si un observador se acerca con velocidad v_0 a un foco fijo emisor de una onda de frecuencia ν que se propaga con velocidad v, la frecuencia medida por el observador será:

$$\nu' = \nu\left(1 + \frac{v_0}{v}\right)$$

b) Demostrar que si un observador se aleja del foco, la frecuencia percibida es:

$$\nu' = \nu\left(1 - \frac{v_0}{v}\right)$$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

a) Si el foco F inicia la vibración en cuando el observador está en O, este la percibe cuando han transcurrido t =OF/v (v es la velocidad de propagación de la onda). Para t = T el emisor ha realizado una oscilación y el observador ya se halla en un punto P tal que la distancia recorrida OP = v_0T, luego tarda un tiempo en percibirla T + FP/v, luego el período T' que mide el observador es:

$$T' = t_f - t_i = T + \frac{FP}{v} - \frac{OF}{v} = T + \frac{FP - OF}{v} = T - \frac{PO}{v} = T - \frac{v_0 T}{v} = T\left(1 - \frac{v_0}{v}\right)$$

luego la frecuencia percibida:

$$\nu' = \frac{1}{T'} = \frac{1}{T\left(1 - \frac{v_0}{v}\right)} = \frac{1}{T}\left(1 - \frac{v_0}{v}\right)^{-1}$$, pero si $v_0 << v$, aproximamos $\left(1 - \frac{v_0}{v}\right)^{-1} \cong 1 + \frac{v_0}{v}$ luego:

$$\nu' = \nu\left(1 + \frac{v_0}{v}\right)$$

b) Si el observador se aleja, sustituyendo v_0 por – v_0, tenemos:

$$\nu' = \nu\left(1 - \frac{v_0}{v}\right)$$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

25 Un automovilista se acerca a una fábrica a 72 km/h mientras que la sirena de ésta emite un sonido de 300 Hz. ¿Qué frecuencia percibe el automovilista? Si sobrepasa la fábrica, ¿qué frecuencia percibe mientras se aleja?

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

Velocidad del observador = v_0 = 72 km/h · 1 000 m/km · 1 h/3 600 s = 20 m/s
Velocidad de propagación del sonido = v = 340 m/s.
Frecuencia de emisión = ν = 300 Hz

La frecuencia percibida mientras de acerca:

$$\nu' = \nu\left(1 + \frac{v_0}{v}\right) = 300\left(1 + \frac{20}{340}\right) \cong 318\ \text{Hz}$$

Mientras se aleja:

$$\nu' = \nu\left(1 - \frac{v_0}{v}\right) = 300\left(1 - \frac{20}{340}\right) \cong 281\ \text{Hz}$$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

㉖ Efecto Doppler para foco y observador en movimiento.

a) Demostrar que si un observador que se mueve con velocidad v_0 y un foco emisor que se mueve con velocidad v, se acercan, la frecuencia medida por el observador será:

$$\nu' = \nu \frac{v + v_0}{v - v_F}$$

Siendo ν la frecuencia de la onda emitida por el foco y v su velocidad de propagación.

b) Demostrar que si el foco emisor y el observador se alejan, la ecuación correspondiente ala frecuencia percibida por el observador es:

$$\nu' = \nu \frac{v - v_0}{v + v_F}$$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

a) Si el foco, cuya onda se propaga con velocidad v_F, se acerca con velocidad v y el observador está fijo:

$$\nu_1 = \nu \frac{1}{1 - \frac{v_F}{v}} = \nu \frac{1}{\frac{v - v_F}{v}} = \nu \frac{v}{v - v_F}$$

Si el observador también se acerca con velocidad v_0:

$$\nu' = \nu_1 \frac{v + v_0}{v}$$

operando: $\nu' = \nu_1 \frac{v + v_0}{v} = \nu \frac{v}{v - v_F} \cdot \frac{v + v_0}{v} = \nu \frac{v + v_0}{v - v_F}$

b) Si el foco, cuya onda se propaga con velocidad v_F, se aleja con velocidad v y el observador está fijo:

$$\nu_1 = \nu \frac{1}{1 + \frac{v_F}{v}} = \nu \frac{1}{\frac{v + v_F}{v}} = \nu \frac{v}{v + v_F}$$

Si el observador también se aleja con velocidad v_0:

$$\nu' = \nu_1 \frac{v - v_0}{v}$$

operando: $\nu' = \nu_1 \frac{v - v_0}{v} = \nu \frac{v}{v + v_F} \cdot \frac{v - v_0}{v} = \nu \frac{v - v_0}{v + v_F}$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

㉗ *Experimento de Young*. En 1801 Young obtuvo el diagrama de interferencia a partir de dos fuentes luminosas con objeto de mostrar que la luz era una onda. Sean R_1 y R_2 dos rendijas con una separación d entre sí y a una distancia D de una pantalla.

Los rayos de luz provenientes de R_1 y R_2 que inciden sobre un punto P de la pantalla se pueden considerar paralelos si d es muy pequeña en comparación con D. Sea θ el ángulo que forman los rayos con la perpendicular a la pantalla.

a) Mostrar que la diferencia de recorrido entre ambos rayos es aproximadamente d sen θ.

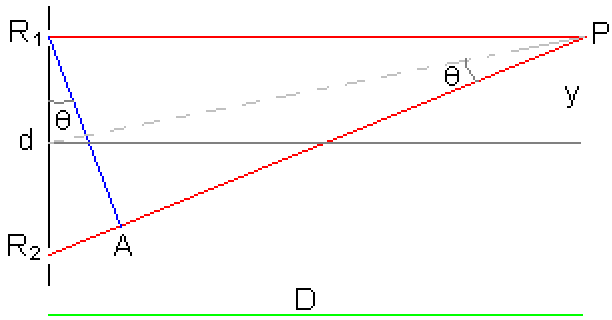
b) Comprobar que la interferencia será constructiva en P si d sen θ = $n\lambda$ y destructiva si $d\operatorname{sen}\theta = \frac{(2n+1)\lambda}{2}$

c) Si la posición del punto sobre la pantalla es y, comprobar que $\theta \approx \frac{y}{D}$

d) Demostrar que los mínimos de interferencia se dan para $y = \frac{(2n+1)\lambda D}{2d}$ y los máximos para $y = \frac{n\lambda D}{d}$.

e) Hallar la posición de las tres primeras franjas oscuras si d = 0,225 mm, D = 1 m y se emplea luz monocromática de 560 nm.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻



a) La diferencia de caminos entre los dos rayos es $R_2P – R_1P = R_2A$, pero en el triángulo rectángulo R_1AR_2, rectángulo en A:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{R_2A}{d} \Leftrightarrow R_2A = d\operatorname{sen}\theta$$

b) Para que una interferencia sea constructiva la diferencia de caminos debe ser un múltiplo entero de longitud de onda:

Diferencia de caminos = $n\lambda$, y como hemos visto en el apartado anterior la diferencia de caminos es $d\cdot\operatorname{sen}\theta$, luego $d\operatorname{sen}\theta = n\lambda$

Y para que sea destructiva: $d\operatorname{sen}\theta = \frac{(2n+1)\lambda}{2}$

c) $\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{D}$, pero para ángulos pequeños $\operatorname{sen}\theta = \theta$, luego $\theta = \frac{y}{D}$

d) Combinando los apartados b) y c) tenemos:

$$d\operatorname{sen}\theta = n\lambda \Leftrightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{n\lambda}{d} = \frac{y}{D} \xrightarrow{\text{despejando y}} y = \frac{n\lambda D}{d} \text{ si es un máximo.}$$

Para un mínimo:

$$d\operatorname{sen}\theta = \frac{(2n+1)\lambda}{2} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{(2n+1)\lambda}{2d} = \frac{y}{D} \xrightarrow{\text{despejando y}} y = \frac{(2n+1)\lambda D}{2d}$$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻