① *La ecuación del movimiento de un oscilador armónico es $x = 6$ sen πt expresado en unidades internacionales. Calcular el período, la frecuencia y la amplitud..*

Como la ecuación de la elongación está expresada en función del seno, supongo que, al contrario del libro, la proyección se realiza sobre el eje vertical y no sobre el eje horizontal.

Comparando la ecuación general con la dada en este ejercicio:

$$\left\{\begin{matrix} x = A\,\text{sen}(\omega t + \varphi) \\ x = 6\,\text{sen}\pi t \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} A = 6\text{ m} \\ \omega = \pi\dfrac{\text{rad}}{\text{s}} \end{matrix}\right\},\ \text{como}\ \omega = \frac{2\pi}{T} = \pi\frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow T = 2\,\text{s} \rightarrow f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2} = 0{,}5\,\text{Hz}$$

② *Qué velocidad llevará el oscilador del problema anterior cuando t = 0,25 s? Si su masa es de 0,25 kg, ¿cuál será entonces su energía cinética?*

t = 0,25 s.
m = 0,25 kg.

La velocidad es la derivada de la elongación:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(6\,\text{sen}\pi t) = 6\pi\cos\pi t \xrightarrow{\text{si } t = 0{,}25\text{ s}} v(0{,}25) = 6\pi\cos\frac{\pi}{4} = 6\pi\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}\pi\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 13{,}33\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$Ec = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}0{,}25\cdot 13{,}33^2 = 22{,}21\,\text{J}$$

③ *El oscilador del caso anterior, ¿en qué instante alcanzará la separación máxima por primera vez?*

◈ La separación máxima se alcanzará cuando x = A, luego:

$$6 = 6\,\text{sen}\pi t \Leftrightarrow \text{sen}\pi t = 1 \Rightarrow \pi t = \text{arcsen}1 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{1}{2}\,\text{s}$$

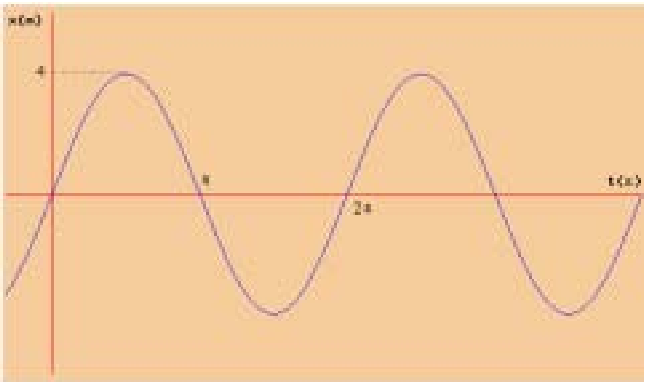
◈ También podemos razonar: la separación máxima se alcanza en la cuarta parte del período (una oscilación = 4A), luego t =T/4 = 2/4 s = ½ s.

④ *Un oscilador de 2 kg tiene una frecuencia de 40 Hz, una amplitud de 3 m y comienza su movimiento en la posición de equilibrio. ¿Cuál es su máxima energía?*

m = 2 kg.
f = 40 Hz.
A = 3 m.
φ = 0 rad.

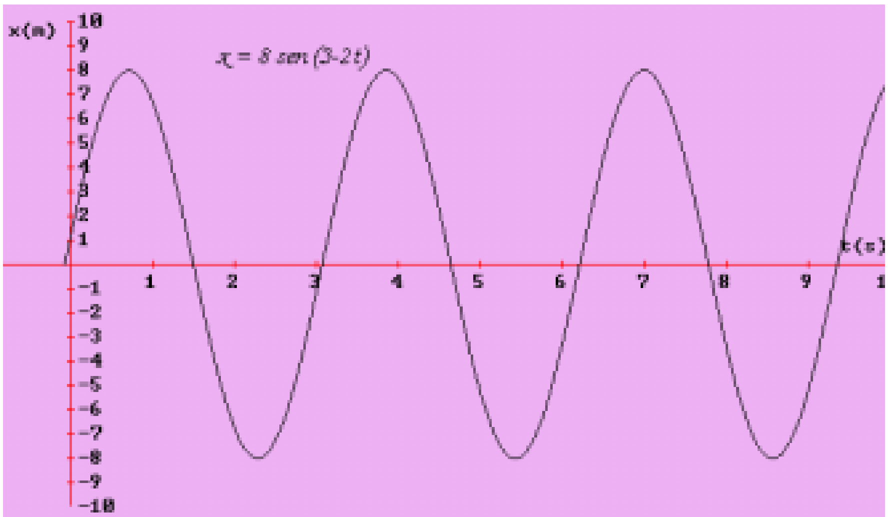
$$E=\frac{1}{2}m\omega^2A^2=\frac{1}{2}m(2\pi f)^2A^2=\frac{1}{2}\cdot 2(2\pi\cdot 40)^2\cdot 3^2=57600\pi^2\ \mathrm{J}\approx 568489{,}2\ \mathrm{J}$$

⑤ *La gráfica de un m.v.a.s. es la de la figura. Con los datos que de ella se puedan obtener, escribir la ecuación de dicho movimiento.*



Suponiendo una proyección sobre el eje vertical.
Como para t = 0, x = 0, senφ = 0 y φ = 0 rad.
A = 4 m
La ecuación es: $x(t)=4\mathrm{sen}t\ \ (\mathrm{m})$

⑥ *Representar gráficamente el movimiento armónico x = 8 sen (3-2t) en unos ejes x-t.*



⑦ *Un muelle se estira 2 cm cuando se cuelga de él un peso de 300 g. Calcular la constante de elasticidad del muelle y la frecuencia con que oscilaría si se separase de su posición de equilibrio.*

x = 2 cm = 0,02 m.
m = 300 g = 0,3 kg.

◈ La fuerza que equilibra al peso es la fuerza recuperadora, que viene dada por la ley de Hooke :

$$F = -P = -mg = -kx \Rightarrow k = \frac{mg}{x} = \frac{0{,}3 \cdot 9{,}8}{0{,}02} = 147\,\frac{N}{m}$$

◈ $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}3}{147}} = 0{,}284\,s \Rightarrow f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{0{,}284} = 3{,}52\,Hz$

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

⑧ *Se tiene un muelle de K = 300 N/m con un cuerpo de 0,2 kg en su posición de equilibrio. Se le comunica una velocidad hacia arriba de 1 m/s. ¿Con qué amplitud oscilará?*

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

k = 300 N/m.
m = 0,2 kg.
v = 1 m/s.

Como la velocidad v se le comunica al cuerpo en la posición de equilibrio, esa será la velocidad máxima:

$$v = v_{Máx} = A\omega = A\frac{2\pi}{T} = A\frac{2\pi}{2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}} = A\sqrt{\frac{k}{m}} \Leftrightarrow A = v\sqrt{\frac{m}{k}} = 1\sqrt{\frac{300}{0{,}2}} = 38{,}73\,m$$

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

⑨ *En un lugar de la Tierra, un péndulo de `un metro de longitud tiene un período de 2 segundos exactamente. ¿Cuánto vale la gravedad en dicho lugar?*

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

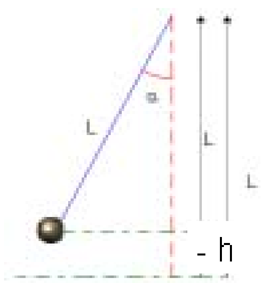
l = 1 m.
T = 2 s.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \Leftrightarrow g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 1}{2^2} = \pi^2\,\frac{m}{s^2} \approx 9{,}87\,\frac{m}{s^2}$$

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

⑩ *Un péndulo se desvía de su posición central de equilibrio una altura h = 5 cm con respecto a ella. ¿Cuál es la velocidad máxima que adquiere cuando se suelta?*

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻



Aplicamos el principio de conservación de la energía a la posición vertical y cuando está separado una altura h:

$$Ec = Ep \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv^2 = mgh \Leftrightarrow v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 5} = 9{,}9\,\frac{m}{s}$$

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

Problemas para pensar.

D1 *Una partícula se mueve con movimiento vibratorio armónico simple con un período de 4 segundos y un desfase de 0,8 radianes. Se toma el origen en la posición de equilibrio. Si sabemos que para t = 2 s la velocidad de la partícula es v = -3 m/s, hallar la ecuación que describe su posición en función del tiempo.*

T = 4 s.
φ = 0,8 rad.
Para t = 2 s, v = - 3 m/s.

$$x = A\,\text{sen}(\omega t + \varphi) = A\text{sen}\left(\frac{2\pi}{4}t + 0{,}8\right) = A\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}t + 0{,}8\right)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}A\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}t + 0{,}8\right) = A\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t + 0{,}8\right) \text{ sustituyendo :}$$

$$-3 = A\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}2 + 0{,}8\right) \Leftrightarrow A = \frac{-6}{\pi\cos(\pi + 0{,}8)} = \frac{-6}{\pi(-\cos 0{,}8)} = \frac{-6}{-0{,}697\pi} = 2{,}74\,\text{m}$$

Luego :

$$x = A\text{sen}(\omega t + \varphi) = 2{,}74\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}t + 0{,}8\right)$$

D2 *En el caso especificado en el problema anterior, calcular la elongación, la velocidad y la aceleración para t = 1,82 s.*

$$x(1{,}82) = 2{,}74\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot 1{,}82 + 0{,}8\right) = -1{,}35\,\text{m}$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 2{,}74\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t + 0{,}8\right) \Rightarrow v(1{,}82) = 2{,}74\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}1{,}82 + 0{,}8\right) = -3{,}74\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}2{,}74\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t + 0{,}8\right) = -2{,}74\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}t + 0{,}8\right) \text{ en donde sustituyendo :}$$

$$a(1{,}82) = -2{,}74\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}1{,}82 + 0{,}8\right) = 3{,}34\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

13 *En el caso especificado en el problema anterior, calcular la velocidad máxima y el instante en que la adquiere por primera vez.*

$$v_{Máx} = A\omega = A\frac{2\pi}{T} = 2{,}74\frac{2\pi}{4} = 4{,}3\frac{m}{s}$$

Como la velocidad máxima se alcanza en el centro, y el movimiento comienza en este mismo punto, esta velocidad máxima se alcanza en un tiempo mitad del período, es decir para T = 2 s.

14 *Una partícula lleva el movimiento dado por la expresión $x = 5\ sen\ (2t + \pi/4)$. Calcular:*

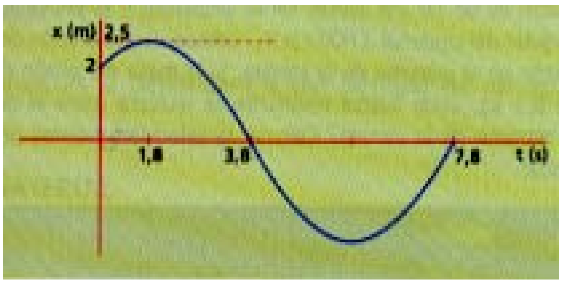
a) La posición cuando t = 0,1 s.
b) La velocidad en ese instante.
c) El período, la amplitud y la frecuencia.

a) $x(0{,}1) = 5sen(2\cdot 0{,}1 + \pi/4) = 4{,}17\,m$

b) $v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(5sen(2t + \frac{\pi}{4}\right) = 5\cdot 2\cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow v(0{,}1) = 10\cos\left(2\cdot 0{,}1 + \frac{\pi}{4}\right) = 5{,}53\frac{m}{s}$

c) Como $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2 \Rightarrow T = \pi s$ y f = 1/T = 1/π Hz. A = 5 m.

15 *Escribir la ecuación del m.v.a.s. cuya gráfica en función del tiempo es la de la figura.*



A = 2,5 m.
Semiperíodo (T/2) = 7,8 – 3,8 = 4, luego T = 8 s.
La ecuación de la elongación es:

$x(t) = Asen\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) = 2{,}5sen\left(\frac{2\pi}{8}t + \varphi\right)$, para hallar el desfase inicial (φ), partimos de que para t = 0, x(0) = 2 → $x(0) = 2{,}5sen\left(\frac{\pi}{4}0 + \varphi\right) = 2 \Leftrightarrow sen\varphi = \frac{2}{2{,}5} = 0{,}8 \Rightarrow \varphi = arcsen0{,}8 = 0{,}93$, quedando, pues la ecuación de la elongación:

$$x(t) = 2{,}5sen\left(\frac{\pi}{4}t + 0{,}93\right)$$

16 *Una masa de un kilogramo vibra verticalmente a lo largo de un segmento de 20 cm de longitud con un movimiento armónico de período T = 4 s. Determinar:*

a) *La amplitud.*
b) *La velocidad en cada instante.*
c) *La velocidad y aceleración en los extremos.*
d) *La fuerza recuperadora cuando el cuerpo está en los extremos del camino.*
e) *La fuerza recuperadora cuando la elongación es de 8 cm:*

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

a) A = Mitad del recorrido entre extremos = 0,2 m/2 = 0,1 m.

b) Suponiendo $\varphi = 0$(parte de la posición central), la elongación es x (t) = A senωt, en donde $\omega = 2\pi/T = 2\pi/4 = \pi/2$ rad/s y entonces x(t) = 0,1sen(πt/2) derivando tenemos la velocidad instantánea:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(0{,}1\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right) = \frac{0{,}1\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

c) La **velocidad** en los extremos es nula (de no ser así, no serían los extremos y seguiría moviéndose), además en los extremos el tiempo es o T/4 = 1s, 3T/4 = 3 s o sus múltiplos con lo que la velocidad quedaría:

$$v = 0{,}05\pi\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0{,}05\pi\cos\frac{3\pi}{2} = 0$$

La aceleración, por contra, es máxima en los extremos (y nula en el centro) y de valor :

$$a = \pm\,\omega^2 A = \pm\,(\pi/2)^2\cdot 0{,}1 = \pm\,0{,}025\pi^2 \text{ m/s}^2.$$

d) $F = ma = 1\cdot(\pm\,0{,}025\pi^2) = \pm\,0{,}025\pi^2$ N.

e) $F = -\,m\omega^2 x = -\,1\cdot(\pi/2)^2\cdot 0{,}08 = -\,0{,}197$ N.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

17 *Una partícula material de 10 g de masa describe un movimiento armónico simple de amplitud 5 cm y en cada segundo realiza media vibración. Calcular:*

a) *Ecuación que rige el movimiento.*
b) *Naturaleza de la fuerza capaz de producirlo y su valor.*
c) *Valores de la elongación para los cuales la velocidad será máxima.*
d) *Valores de la elongación para los cuales la aceleración será nula.*

m = 10 g = 0,01 kg.
A = 5 cm = 0,05 m.
T = 2 s (en 1 s media vibración)

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

a) $x(t) = A\text{sen}(\omega t + \varphi) = A\text{sen}\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) = 0{,}05\text{sen}\left(\frac{2\pi}{2}t + 0\right) = 0{,}05\text{sen}\pi t$

b) Es una fuerza proporcional al desplazamiento(elongación) y de sentido contrario y de valor (dependiente del tiempo evidentemente):

$$F = - m\omega^2 x = - 0{,}01\cdot\pi^2\cdot 0{,}05\text{sen}\pi t = - 0{,}0005\cdot\pi^2\text{sen}\pi t \text{ N.}$$

c) La velocidad es máxima en el centro del movimiento en donde la elongación es nula.

d) También en el centro la aceleración es nula, luego x = 0.

****

18 *Un punto móvil de 0,5 kg de masa está animado por un m.v.a.s. de 10 cm de amplitud y realiza 2 oscilaciones por segundo. Calcular:*

a) *Elongación de dicho punto 1/6 de segundo después de alcanzada la máxima elongación.*

b) *La constante recuperadora del movimiento.*

c) *La energía cinética que posee el punto móvil al pasar por la posición inicial de reposo.*

****

m = 0,5 kg.
A = 10 cm = 0,1 m.
T = 0,5 s (2 oscilaciones por segundo)

a) Si en una oscilación tarda 1 s, como una oscilación son 4 amplitudes, en la primera amplitud tardará un tiempo de 1/4 s, se trata, de calcular la elongación para un tiempo t = $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{5}{12}$ s , la elongación es:

$$x = A\text{sen}\frac{2\pi}{T}t = 0{,}1\text{sen}\frac{2\pi}{0{,}5}\cdot\frac{5}{12} = 0{,}1\text{sen}\frac{5\pi}{3} = -0{,}087\,\text{m}$$

b) $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Leftrightarrow k = \frac{4\pi^2 m}{T^2} = \frac{4\pi^2\cdot 0{,}5}{0{,}5^2} = 8\pi^2 = 78{,}96\,\frac{\text{kg}}{\text{m}}$

c) Si está en reposo v = y la energía cinética (Ec = ½ mv^2) es nula.

****

19 *Un cuerpo cuya masa es de 100 g posee un movimiento armónico simple a lo largo de una recta AB de 20 cm de longitud con un período de 2 s. Calcular:*

a) *Velocidad y aceleración en el punto medio de la recta AB.*

b) *Velocidad y aceleración en el extremo B.*

c) *Fuerza recuperadora en el extremo B.*

****

m = 100 g = 0,1 kg.
A = 10 cm = 0,1 m.
T = 2 s.

a) En el punto medio la aceleración es nula y la velocidad máxima, $v_{Máx}$ = $\pm A\omega = \pm A\dfrac{2\pi}{T}$ = $\pm 0{,}1\dfrac{2\pi}{2} = \pm 0{,}1\pi\dfrac{m}{s}$.

b) Ahora la velocidad es nula y la aceleración máxima,

$$a_{Máx} = A\omega^2 = A\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = 0{,}1\left(\frac{2\pi}{2}\right)^2 = 0{,}1\pi^2\frac{m}{s^2}$$

c) $F = m\, a_{Máx} = -\,0{,}1 \cdot 0{,}1\,\pi^2 = -\,0{,}0987$ N

❋❋❋❋❋❋✪❋❋❋❋❋❋

20 *Calcular la fracción de energía potencial y cinética de la energía total de un cuerpo de masa m suspendido de un muelle de constante K, en función del ángulo de fase.*

❋❋❋❋❋❋✪❋❋❋❋❋❋

$$E_c = \frac{1}{2}k\left(A^2 - x^2\right)$$

$$E_P = \frac{1}{2}kx^2$$

$$E_M = E_c + E_P = \frac{1}{2}k\left(A^2 - x^2\right) + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

$$\frac{E_c}{E_M} = \frac{\frac{1}{2}k\left(A^2 - x^2\right)}{\frac{1}{2}kA^2} = 1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2 = 1 - \left(\frac{A\,sen(\omega t + \varphi)}{A}\right)^2 = 1 - sen^2(\omega t + \varphi) = cos^2(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{E_P}{E_M} = \frac{\frac{1}{2}kx^2}{\frac{1}{2}kA^2} = \left(\frac{x}{A}\right)^2 = \left(\frac{A\,sen(\omega t + \varphi)}{A}\right)^2 = sen^2(\omega t + \varphi)$$

La suma de ambas fracciones $sen^2(\omega t + \varphi) + cos^2(\omega t + \varphi) = 1$.

❋❋❋❋❋❋✪❋❋❋❋❋❋

21 *¿Con qué frecuencia oscilará un péndulo de 80 cm de longitud en un lugar de la Tierra en el que g = 9,81 N/kg?*

❋❋❋❋❋❋✪❋❋❋❋❋❋

l = 80 cm = 0,8 m.
g = 9,81 N/kg.

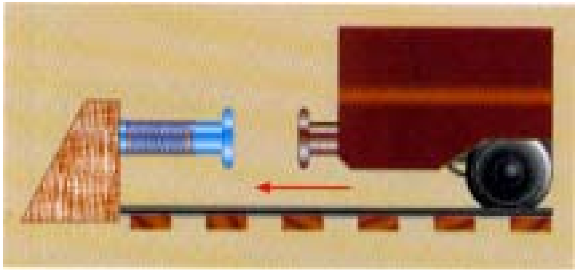
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{0,8}{9,81}} = 1,79\,s \Rightarrow f = \frac{1}{T} = \frac{1}{1,79s} = 0,56\,Hz$$

****

22 *El paragolpes de un terminal de ferrocarril está constituido por un muelle de constante K. Un vagón de 100 toneladas choca con él a una velocidad de 0,02 m/s. Si se quiere que en estas condiciones el paragolpes se comprima 10 cm hasta detener el vagón, ¿cuál ha de ser el valor de la constante K del muelle?.*

****

m = 100 tm = 100 000 kg.
v = 0,02 m/s.
A = 10 cm = 0,1 m.



El vagón posee una energía cinética:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}100000{\cdot}0,02^2 = 20\,J$$

Esta energía se convierte en energía potencial elástica de compresión del paragolpes:

$$E_c = E_{Pe} \Leftrightarrow 20\,J = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow k = \frac{2{\cdot}20}{A^2} = \frac{40}{0,1^2} = \frac{40}{0,01} = 4000\frac{N}{m}$$

****

Problemas para profundizar

23 *Un oscilador de 2 kg tiene una frecuencia de 40 Hz, una amplitud de 3 m y comienza su movimiento en la posición de equilibrio. ¿En qué posición se encuentra cuando su energía potencial es la mitad de su energía cinética?*

****

m = 2 kg.
f = 40 Hz.
A = 3 m.
φ = 0 rad.

$E_C = 2E_P$; $E_p + E_C = E_M$; $E_p + 2E_P = E_M$; $3E_P = E_M$; $3\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$

$$x = \frac{A}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = 1,73\,m$$

****

24 *En el caso del oscilador anterior, ¿qué tiempo transcurrirá desde el comienzo de su movimiento hasta que su energía cinética sea igual a su energía potencial?*

****

$E_C = E_P$; como $E_C + E_P = E_M$; $2E_P = E_M$; $2\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow \quad x = \frac{A}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = 2{,}12\,m$.

Como $x = A\text{sen}\omega t$; $2{,}12 = 3\text{sen}2\pi ft \Leftrightarrow \text{sen}2\pi ft = \frac{2{,}12}{3} = 0{,}71 \Leftrightarrow 2\pi ft = \text{arcsen}0{,}71 = 0{,}79 \Rightarrow$

$80t = 0{,}79$; $t = \frac{0{,}79}{80} = 0{,}01\,s$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

㉕ *¿En qué posición se encuentra un oscilador cuando su energía cinética es la cuarta parte de su energía total?*

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

$E_C = \frac{1}{4}E_M$ luego $E_C + E_P = E_M$; $\frac{1}{4}E_M + E_P = E_M \Leftrightarrow 4E_P = 3E_P \Leftrightarrow 4\frac{1}{2}kx^2 = 3\frac{1}{2}kA^2 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}A}{2}$;

luego $x = \frac{\sqrt{3}\cdot 3}{2} = 2{,}6$ m

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

㉖ *La energía de un oscilador de 20 g es de 0,6 J y su velocidad es de 2 m/s cuando su elongación es de 1 m. ¿Cuáles son la amplitud y la frecuencia de su movimiento?*

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

m = 20 g = 0, 02 kg.
E = 0,6 J.
v = 2 m/s.
x = 1 m.

Utilizamos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas :

$$\begin{Bmatrix} v = \omega\sqrt{A^2-1} \\ E = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 2 = \omega\sqrt{A^2-1} \\ 0{,}6 = \frac{1}{2}0{,}02\omega^2A^2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 4 = \omega^2(A^2-1) \\ 60 = \omega^2A^2 \end{Bmatrix}$$

$A^2 = \frac{60}{\omega^2}; 4 = \omega^2\left(\frac{60}{\omega^2}-1\right) \Leftrightarrow 4 = 60-\omega^2 \Leftrightarrow \omega = \pm\sqrt{60-4} = \pm\sqrt{56} = \pm 7{,}48$, ahora podemos saber la frecuencia: $\omega = 2\pi f = 7{,}48 \Rightarrow f = \frac{7{,}48}{2\pi} = 1{,}19\text{ Hz}$ y la amplitud: $A^2 = \frac{60}{\omega^2} = \frac{60}{56} = 1{,}07$, luego $A = \sqrt{1{,}07} = 1{,}035\,m$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

㉗ *Un péndulo tiene un período To en un punto sobre la superficie de la Tierra, al pie de una montaña. Se asciende a la cumbre y su período es T. ¿Cuál es la altura de la montaña?*

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

$$\begin{Bmatrix} T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_0}} \\ T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \end{Bmatrix} \Rightarrow \frac{T_0}{T} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{l}{9{,}81}}}{2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}} = \frac{g}{g_0} = \frac{R^2}{(R+h)^2} \Leftrightarrow \left(1+\frac{h}{R}\right)^2 = \frac{T}{T_0} \Leftrightarrow 1+\frac{h}{R} = \sqrt{\frac{T}{T_0}} \Leftrightarrow \frac{h}{R} = \sqrt{\frac{T}{T_0}}-1,$$ es

decir la altura, en función del radio terrestre (R) y de los períodos es:

$$h = R\left(\sqrt{\frac{T}{T_0}} - 1\right) m.$$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

28 *Se dice que un reloj de péndulo «bate segundos» cuando su manecilla avanza 2 segundos por cada oscilación completa. Suponiendo que, por efecto del calor, el péndulo se dilata en una centésima parte de su longitud, ¿cuánto atrasará el reloj en cada hora?*

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

Si bate segundos su período es T_0 = 2 s, cuando su longitud es l_0 m.

Si la $l = l_0 + 0{,}01 l_0 = 1{,}001 l_0$, su período T es:

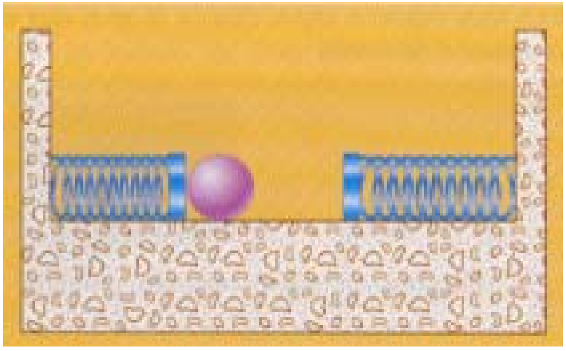
$$\frac{T_0}{T} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{l_0}{g}}}{2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}} = \sqrt{\frac{l_0}{l}} = \sqrt{\frac{l_0}{1{,}001 l_0}} = \sqrt{\frac{1}{1{,}001}} \Rightarrow T = \sqrt{1{,}001}\, T_0 = \sqrt{1{,}001} \cdot 2 = 2{,}001\,\text{s}$$

Luego en cada oscilación hay una diferencia de 2, 001 – 2 = 0,001 s de retraso, como en una hora hay 3 600 s que se corresponde con 1 800 oscilaciones, en que se perderán 1,8 s.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

29 *Un muelle de constante K = 50 N/m está comprimido 4 cm junto a una bola de 50 g de masa. Al soltarse el muelle impulsa a la bola, que va a chocar contra otro al que comprime 6 cm. Suponiendo que no hay pérdidas de energía, calcular la constante K de este segundo muelle.*

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻



k_1 = 50 N/m.
A_1 = 4 cm = 0,04 m.
A_2 = 6 cm = 0,06 m.
m = 50 g = 0, 05 kg.

Si no hay pérdidas de energía, la energía potencial elástica, en los puntos de máxima compresión, en ambos muelles se conserva:

$$E_{p1} = E_{p2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}k_1 A_1^2 = \frac{1}{2}k_2 A_2^2 \Leftrightarrow \frac{k_2}{k_1} = \frac{A_1^2}{A_2^2} \Leftrightarrow k_2 = k_1\frac{A_1^2}{A_2^2} = 50\frac{0{,}04^2}{0{,}06^2} = 22{,}22\frac{N}{m}$$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

30 *El émbolo de una máquina de vapor pesa 20 kg y la longitud del cilindro es de 40 cm. Suponiendo que se mueve con movimiento armónico simple de frecuencia 120 períodos por minuto, calcular:*

a) *El tiempo que tarda en recorrer 10 cm a partir del momento en que pasa por el centro del cilindro.*

b) *La energía cinética cuando pasa por el centro del cilindro.*

c) *El valor máximo de la aceleración.*

m = 20 kg.
A = 40 cm = 0,4 m.
f = 120 períodos/min. = 2 hz.

a) x = 10 cm = 0,1 m.

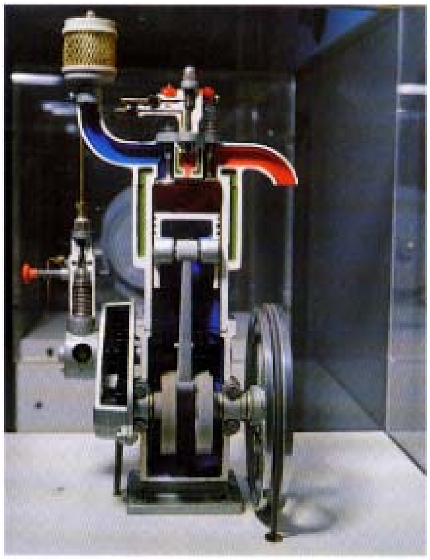
$$x = A\text{sen}2\pi ft \Leftrightarrow \text{sen}2\pi ft = \frac{x}{A} = \frac{0{,}1}{0{,}4} = \frac{1}{4} = 0{,}25 \Leftrightarrow 2\pi ft = \text{arcsen}0{,}25 = 0{,}2527 \Rightarrow t = \frac{0{,}2527}{4\pi} = 0{,}02 \text{ s}$$

b) En el centro la velocidad es máxima y la energía cinética es:

$$E_C = \frac{1}{2}mv_{Máx}^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = \frac{1}{2}20\cdot(2\pi\cdot 2)^2(0{,}4)^2 = 252{,}66 \text{ J}$$

c) $a_{máx} = \pm\omega^2 A = \pm(2\pi f)^2 A = \pm(2\pi\cdot 2)^2\cdot 0{,}4 = \pm 63{,}17 \frac{m}{s^2}$

31 *El movimiento del pistón de un automóvil Podemos considerarlo como armónico simple. Si la carrera del pistón es de 10 cm (doble de la amplitud) y la velocidad angular del cigüeñal 3 600 r.p.m., calcular la aceleración del pistón en el extremo de la carrera. Si la masa del pistón es de 0,5 kg, ¿qué fuerza resultante se ejercerá sobre él en el extremo de la carrera? Calcular la velocidad máxima del pistón.*



A = 10/2 cm = 5 cm = 0,05 m.
ω = 3600 rpm = 2π rad/s.
m = 0,5 kg.

La aceleración pedida es la

$$a_{máx} = -\omega^2 A = -(2\pi)^2 0{,}05 = -1{,}97 \frac{m}{s^2}$$

$$F = ma = 0{,}5\cdot(-1{,}97) = -0{,}99 \text{ N}$$

$$v_{máx} = \pm\omega A = \pm 2\pi \cdot 0{,}05 = \pm 0{,}314\ \frac{m}{s}$$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

32 *Una barra cilíndrica de 2 m de longitud y masa 1 kg oscila alrededor de un eje que pasa por uno de sus extremos. Teniendo en cuenta que el momento de inercia respecto al eje indicado es* $I = \frac{mL^2}{3}$*, calcular:*

a) *El período de las oscilaciones.*
b) *La longitud del péndulo simple del mismo período.*
c) *El momento de inercia de la barra con respecto a un eje paralelo al anterior, pero que la atraviesa a un cuarto de su longitud.*
d) *El período de las oscilaciones suspendidas desde este punto.*

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

a) No lo sé, me faltan datos.

a) $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{2}{9{,}8}} = 2{,}83\ s$.

c) Aplicamos el teorema de Steiner:

$$I = I_0 + md^2 = \frac{mL^2}{3} + m\left(\frac{L}{4}\right)^2 = mL^2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{7}{12}mL^2 = \frac{7}{12}1\cdot 2^2 = 2{,}\widehat{3}\ kg\cdot m^2$$

d) Me faltan datos.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻