ACT1VIDADE S

Problemas para entrenarse

① La masa de la luna es aproximadamente 6,7 10^{22} kg y su radio R = 16 ·10^5 m.

a) ¿Qué distancia recorrerá un cuerpo en un segundo, en caída libre sobre la superficie de la Luna?

b) ¿Cuál será el peso en la Tierra y en la Luna de un hombre de masa 70 kg?

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

a) Hallamos la intensidad del campo gravitatorio o aceleración de la gravedad en la Luna:

$$g_L = G\frac{M_L}{R^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\frac{N \cdot m^2}{kg^2} \cdot \frac{6{,}7 \cdot 10^{22} kg}{(16 \cdot 10^5 m)^2} = 1{,}746\frac{m}{s^2}$$

y, ahora la distancia recorrida por un cuerpo en caída libre en la Luna en un tiempo t = 1 s partiendo del reposo:

$$h = \frac{1}{2}g_L t^2 = \frac{1}{2}1{,}746\frac{m}{s^2} \cdot (1s)^2 = 0{,}87\,m$$

b) $P_T = m \cdot g_T$ = 70 kg·9,8 m/s^2 = 686 N, $P_L = m \cdot g_L$ = 70 kg·1,746 m/s^2 = 122,22 N.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

② Se desea colocar un satélite de comunicaciones de forma que siempre se encuentre en su órbita circular sobre el mismo punto de la superficie de la Tierra. Calcular el radio que debe tener dicha órbita.

Datos: G = 6,67 ·10^{-11} N ·m^2 ·kg^{-2}; M = 5,99 ·10^{24} kg

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

$r = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}99 \cdot 10^{24} \cdot (86400)^2}{4 \cdot \pi^2}} = 42{,}27 \cdot 10^6\,m$, su altura es pues h = r – R_T = 42,27·10^6m – 6,37·10^6 m = 35,90·10^6 m sobre la superficie terrestre.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

③ ¿A qué altura con respecto a la superficie terrestre, la energía potencial gravitatoria de un cuerpo es el doble de su valor en la misma superficie?

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

Como $Ep = -G\frac{M_T \cdot m}{r}$, varía con la inversa de la distancia al centro de la Tierra de manera que al alejarnos va disminuyendo (en valor absoluto) siendo cero en el infinito

Hacerse el doble supone que su valor absoluto se reduce a la mitad:

$\frac{Ep}{Ep_0} = \frac{-G\frac{M_T \cdot m}{R+h}}{-G\frac{M_T \cdot m}{R}} = \frac{R}{R+h} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{R+h}{R} = 2 \Leftrightarrow 1+\frac{h}{R} = 2 \Leftrightarrow \frac{h}{R} = 1 \Leftrightarrow h = R$ luego, la Ep su duplica a una altura igual al radio terrestre.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

④ Si una persona pesa 686 N en la superficie de la Tierra, ¿cuánto pesará a 9 000 metros de altura?

✻✻✻❀❀✪❀❀✻✻✻

Como el valor de g a una altura h = 9 000 m es:

$$g = G\frac{M_T}{(R+h)^2}$$

Relacionando los peso tenemos:

$$\frac{P}{P_0} = \frac{mg}{mg_0} = \frac{g}{g_0} = \frac{G\frac{M_T}{(R+h)^2}}{G\frac{M_T}{R^2}} = \left(\frac{R}{R+h}\right)^2 \Leftrightarrow P = P_0\left(\frac{1}{1+\frac{h}{R}}\right)^2 = 686N\left(\frac{1}{1+\frac{9\cdot 10^3}{6{,}37\cdot 10^6}}\right)^2 = 684{,}1\,N.$$

✻✻✻❀❀✪❀❀✻✻✻

⑤ Sabiendo que la masa de la Tierra es m = = 5,98 · 10²⁴ kg, la del Sol es M = 1,98 · 10³⁰ kg y el radio de la órbita de la Tierra alrededor del Sol es R = 1,49 · 10¹¹ m, calcular la energía cinética de la Tierra en su movimiento alrededor del Sol.

✻✻✻❀❀✪❀❀✻✻✻

Masa de la Tierra = M_T = $5{,}98\cdot 10^{24}$ kg.
Masa del Sol = M_S = $1{,}98\cdot 10^{30}$ kg.
Distancia Tierra- Sol = R = $1{,}49\cdot 10^{11}$ m.

Fuerza de atracción gravitatoria = Fuerza centrífuga debido al giro, $F_g = F_C$

$$\frac{M_T\cdot v^2}{R} = G\frac{M_S\cdot M_T}{R^2} \Leftrightarrow v^2 = G\frac{M_S}{R}$$

luego la energía cinética de la Tierra será:

$$Ec = \frac{1}{2}M_T v^2 = \frac{1}{2}M_T\cdot G\frac{M_S}{R} = \frac{1}{2}5{,}98\cdot 10^{24}\,kg\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{N\cdot m^2}{kg^2}\frac{1{,}98\cdot 10^{30}\,kg}{1{,}49\cdot 10^{11}\,m} = 2{,}65\cdot 10^{33}\,J.$$

✻✻✻❀❀✪❀❀✻✻✻

⑥ Con los datos del problema anterior, ¿cuál es la energía potencial gravitatoria de la Tierra con respecto al Sol y su energía total?

✻✻✻❀❀✪❀❀✻✻✻

$$Ep = -G\frac{M_S\cdot M_T}{r} = -6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{N\cdot m^2}{kg^2}\frac{1{,}98\cdot 10^{30}\,kg\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\,kg}{1{,}49\cdot 10^{11}\,m} = -5{,}3\cdot 10^{33}\,J.$$

E_T = Ep + Ec = - $5{,}3\cdot 10^{33}$ J + $2{,}65\cdot 10^{33}$J = - $2{,}65\cdot 10^{33}$J.

✻✻✻❀❀✪❀❀✻✻✻

⑦ Si A es un punto situado a una altura h con respecto a la superficie de la Tierra igual a la mitad de su radio, calcular la diferencia de potencial gravitatorio entre dicho punto y la superficie.

✻✻✻❀❀✪❀❀✻✻✻

h = R/2.

$$U(A) = -G\frac{M}{R-h} = -G\frac{M}{R-\frac{R}{2}} = -G\frac{M}{\frac{R}{2}} = -2G\frac{M}{R} = -2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{N\cdot m^2}{kg^2}\frac{5{,}98\cdot 10^{24}\,kg}{6{,}37\cdot 10^6\,m} = -1{,}25\cdot 10^8\,\frac{J}{kg}$$

✻✻✻❁❁❂❁❁✻✻✻

⑧ La masa de un astro A es el doble y su radio es el triple que los de otro B. ¿En qué relación están los potenciales gravitatorios creados por cada uno de ellos en sus superficies respectivas?

✻✻✻❁❁❂❁❁✻✻✻

$m_A = 2\,m_B$, $R_A = 3R_B$.

$$\frac{U_A}{U_B} = \frac{-G\frac{m_A}{R_A}}{-G\frac{m_B}{R_B}} = \frac{m_A}{m_B}\cdot\frac{R_B}{R_A} = \frac{2m_B}{m_B}\cdot\frac{R_B}{3R_B} = \frac{2}{3}$$

✻✻✻❁❁❂❁❁✻✻✻

Problemas para pensar

⑨ ¿Cuál sería el período de revolución de un satélite artificial de masa m que circunda la Tierra siguiendo una órbita circular de 8 000 km de radio? ¿Qué energía potencial tendrá dicho satélite?

Dato: Masa de la Tierra = $5{,}98\cdot 10^{24}$ kg , G = $6{,}67\cdot 10^{-11}$ N· m²/kg²

✻✻✻❁❁❂❁❁✻✻✻

$F_C = F_g$ $\frac{mv^2}{r} = \frac{Gm\cdot M_T}{r^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}}$, por otro lado $v = \omega\cdot r = \frac{2\pi}{T}\cdot r$, luego $\frac{2\pi}{T}\cdot r = \sqrt{\frac{GM_T}{r}}$ de donde, despejando el periodo T:

$$T = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{GM_T}{r}}} = 2\pi r\sqrt{\frac{r}{GM_T}} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_T}} = 2\pi\sqrt{\frac{\left(6{,}37\cdot 10^6 + 8\cdot 10^6\right)^3 m^3}{6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{N\cdot m^2}{kg^2}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\,kg}} = 17731{,}4\,s = 4\,hr\ 55\,min\ 52\,s\,.$$

✻✻✻❁❁❂❁❁✻✻✻

①⓪ Se consigue disparar hacia arriba, perpendicularmente ala superficie terrestre, una masa m con una velocidad de 10 km/s. Prescindiendo de la presencia de la atmósfera, calcular la altura máxima que puede alcanzar. ¿Qué ocurriría si la velocidad inicial fuera el doble?

✻✻✻❁❁❂❁❁✻✻✻

$$Ec = \frac{1}{2}mv_0^2 = GMm\left[\frac{1}{R} - \frac{1}{2r}\right] \Leftrightarrow \frac{v_0^2}{2} = GM\left[\frac{1}{R} - \frac{1}{2r}\right] \Leftrightarrow \frac{1}{R} - \frac{1}{2(R+h)} = \frac{v_0^2}{2GM} \Leftrightarrow \frac{1}{2(R+h)} = \frac{1}{R} - \frac{v_0^2}{2GM} \Leftrightarrow$$

$$R+h=\frac{1}{2\left(\frac{1}{R}-\frac{v_0^2}{2GM}\right)}\Leftrightarrow h=\frac{1}{2\left(\frac{1}{R}-\frac{v_0^2}{2GM}\right)}-R=\frac{1}{2\left(\frac{1}{6{,}37\cdot 10^6}-\frac{(10^4)^2}{2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}}\right)}-6{,}37\cdot 10^6=9{,}44\cdot 10^6\text{ m.}$$

Si la velocidad de lanzamiento fuese el doble, escaparía a la atracción terrestre ya que sería una velocidad mayor que la de escape v_e = 11 km/s.

****

①① Hallar la velocidad con que ha de ser lanzado un satélite artificial para colocarlo en órbita circular alrededor de la Tierra a una altura de su superficie igual al radio de ésta.

****

De acuerdo con el ejercicio anterior:

$$v_0=\sqrt{2GM_T\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{2(R+R)}\right)}=\sqrt{2GM_T\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{4R}\right)}=\sqrt{\frac{3GM_T}{2R}}=\sqrt{\frac{3\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}}{2\cdot 6{,}37\cdot 10^6}}=9691{,}5\,\frac{m}{s}$$

****

①② Una masa de 10 kg, por la acción de una fuerza conservativa, incrementa su velocidad de 5 a 20 m/s. Si cuando poseía la velocidad de 5 m/s su energía potencial era de –50 J, calcular:

a) Su energía potencial cuando su velocidad es de 20 m/s.
b) La velocidad que posee cuando su energía potencial es de –425 J.

****

a) Principio de conservación de la energía:

$$Ec_1+Ep_1=Ec_2+Ep_2\Leftrightarrow Ep_2=Ec_1+Ep_1-Ec_2=\frac{1}{2}mv_1^2+Ep_1-\frac{1}{2}mv_2^2=\frac{1}{2}10\cdot 5^2+(-50)-\frac{1}{2}10\cdot 20^2=-1925\text{ J.}$$

b) De nuevo aplicamos el principio de conservación de la energía:

$$Ec_1+Ep_1=Ec_3+Ep_3\Leftrightarrow\frac{1}{2}mv_1^2+Ep_1=\frac{1}{2}mv_3^2+Ep_3;\frac{1}{2}10\cdot 5^2+(-50)-\frac{1}{2}10\cdot v_3^2+(-425)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5v_3^2=125-50+425\Leftrightarrow 5v_3^2=500\Leftrightarrow v_3=\sqrt{\frac{500}{5}}=10\,\frac{m}{s}.$$

****

①③ Hallar el valor de la intensidad del campo gravitatorio terrestre a una altura con respecto a la superficie de la Tierra, igual a la mitad de su radio.

****

Módulo de la intensidad del campo gravitatorio:

$$g=G\frac{M_T}{(R+h)^2}=G\frac{M_T}{(R+R/2)^2}=G\frac{M_T}{\left(\frac{3R}{2}\right)^2}=4G\frac{M_T}{9R^2}=\frac{4}{9}G\frac{M_T}{R^2}=\frac{4}{9}g_0=\frac{4}{9}9{,}8\,\frac{m}{s^2}=4{,}3\hat{5}\,\frac{m}{s^2}$$

****

①④ **Un satélite de 100 kg está en órbita ecuatorial alrededor de la Tierra a una altura de 1 000 km. Calcular:**

a) La velocidad del satélite.
b) ¿Cuánto tarda en pasar por el mismo punto de la vertical de la Tierra (teniendo en cuenta el movimiento de rotación terrestre)?
c) La energía total que tiene en la órbita.

Datos: G = $6{,}67\cdot10^{-11}$ N.m^2. kg^{-2}, Radio de la Tierra = 6 370 km Masa de la Tierra = $5{,}98\cdot10^{24}$ kg

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

a) $v=\sqrt{G\dfrac{M_T}{R+h}}=\sqrt{6{,}67\cdot10^{-11}\dfrac{N\cdot m^2}{kg^2}\dfrac{5{,}98\cdot10^{24}\,kg}{6{,}37\cdot10^6+1\cdot10^6\,m}}=7356{,}6\,\dfrac{m}{s}.$

b) $T=2\pi\sqrt{\dfrac{(R+h)^3}{GM_T}}=2\pi\sqrt{\dfrac{\left(6{,}37\cdot10^6+1\cdot10^6\right)^3 m^3}{6{,}67\cdot10^{-11}\dfrac{N\cdot m^2}{kg^2}\cdot5{,}98\cdot10^{24}\,kg}}=6254{,}6s=1hr\ 44\,min\ 54{,}6s$

c) $E_T=-G\dfrac{M\cdot m}{2r}=-6{,}67\cdot10^{-11}\cdot\dfrac{5{,}98\cdot10^{24}\cdot100}{2(6{,}37\cdot10^6+1\cdot10^6)}=-2{,}71\cdot10^7\ J.$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

①⑤ **Suponiendo que la Luna gira alrededor de la Tierra con un período de 27 días, a una distancia de $3{,}8\cdot10^8$ m, calcular:**

a) La masa de la Tierra.
b) ¿Cuánta energía se necesita para separar una distancia infinita, la Luna de la Tierra, si la masa de la Luna es $M_L = 7{,}34\cdot10^{22}$ kg?

Dato: G = $6{,}67\cdot10^{-11}$ N ·m^2/kg^2

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

Periodo de la Luna = T_L = 27 días = 2332800 s.
Distancia Tierra – Luna = r = $3{,}8\cdot10^8$ m.

a) $T=2\pi\sqrt{\dfrac{r^3}{GM_T}}\Leftrightarrow T^2=4\pi^2\dfrac{r^3}{GM_T}\Leftrightarrow M_T=\dfrac{4\pi^2\cdot r^3}{GT^2}=\dfrac{4\pi^2\cdot(3{,}8\cdot10^8)^3}{6{,}67\cdot10^{-11}(2332800)^2}=5{,}97\cdot10^{24}\,kg.$

b) $E_e=G\dfrac{M_T\cdot M_L}{r}=6{,}67\cdot10^{-11}\dfrac{5{,}98\cdot10^{24}\cdot7{,}34\cdot10^{22}}{3{,}8\cdot10^8}=7{,}7\cdot10^{28}\ J.$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

①⑥ **Sabiendo que la gravedad en la superficie lunar es aproximadamente 1/6 de la terrestre, calcular la velocidad de escape en la superficie lunar (velocidad mínima que es necesario comunicar a un objeto para que escape de la atracción lunar). ¿Esta velocidad depende de la masa del objeto? ¿En qué medida importa la dirección de la velocidad?**

Dato: Radio lunar R = 1 740 km

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

$$g_L = \frac{1}{6}g_0;\, R_L = 1{,}74\cdot 10^6\, m$$

$$v_e = \sqrt{2\cdot g_L\cdot R_L} = \sqrt{2\cdot\frac{1}{6}g_0\cdot R_L} = \sqrt{\frac{1}{3}g_0\cdot R_L} = \sqrt{\frac{1}{3}9{,}8\cdot 1{,}74\cdot 10^6} = 2356{,}6\frac{m}{s}$$

Vemos en la fórmula anterior que la velocidad de escape no depende de la masa del objeto, esta influirá en la energía que hay que comunicarle al objeto para alcance esa velocidad de escape.

El objeto ha de ser impulsado según el vector de la distancia que une la Tierra con la Luna en ese punto.

****

①⑦ Deducir la velocidad de escape desde un astro esférico de densidad ρ kg ·m⁻³.

****

$$v_e = \sqrt{2G\frac{M}{R}} = \sqrt{2G\frac{\rho\cdot V}{R}} = \sqrt{2G\frac{\rho\cdot\frac{4}{3}\pi R^3}{R}} = \sqrt{\frac{8}{3}G\rho R^2} = 2R\sqrt{\frac{2G}{3}\rho}$$

****

Problemas para profundizar

①⑧ El radio del Sol es 108 veces mayor que el de la Tierra y la densidad media de nuestro planeta es cuatro veces mayor que la correspondiente del Sol. ¿Cuál es la aceleración de caída libre en la superficie del Sol?

****

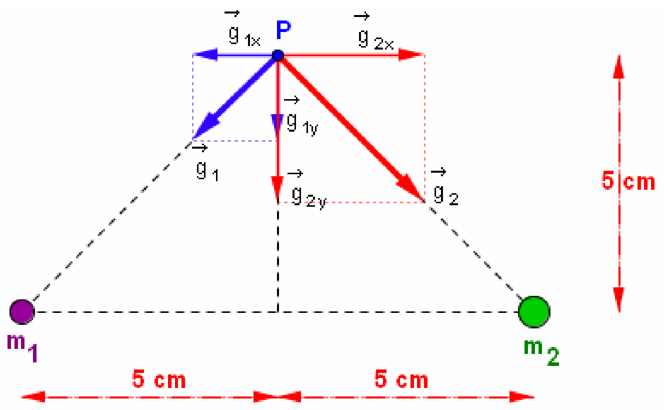
Radio del Sol = R_S = 108 R_T; densidad de la Tierra = ρ_T = 4ρ_S.

$$\frac{g_S}{g_T} = \frac{G\frac{M_S}{R_S^2}}{G\frac{M_T}{R_T^2}} = \frac{\frac{\rho_S\cdot V_S}{R_S^2}}{\frac{\rho_T\cdot V_T}{R_T^2}} = \frac{\frac{\rho_S\cdot\frac{4}{3}\pi R_S^3}{R_S^2}}{\frac{\rho_T\cdot\frac{4}{3}\pi R_T^3}{R_T^2}} = \frac{\rho_S}{\rho_T}\frac{R_S}{R_T} = \frac{1}{4}\cdot 108 = 27 \Rightarrow g_S = 27g_T = 27\cdot 9{,}8\frac{m}{s^2} = 264{,}6\frac{m}{s^2}$$

****

①⑨ Calcular la magnitud y dirección del campo gravitatorio en el punto P de la figura, originado por las masas m_1=36g y m_2 =144 g.

****



Hallamos la distancia del punto P a cualquiera de las dos masas mediante el teorema de Pitágoras:

$r_1 = r_2 = r = \sqrt{5^2+5^2} = \sqrt{50}\text{cm} = 5\sqrt{2}\text{cm}$.

Ahora hallamos la resultante de los dos vectores intensidad del campo gravitatorio descomponiéndolos según los ejes cartesianos cuyo origen de coordenadas colocamos en P:

Eje horizontal

$$\vec{g}_x = \vec{g}_{1x} + \vec{g}_{2x} = (-g_{1x} + g_{2x})\,\vec{i} = (-g_1\cos\alpha + g_2\cos\alpha)\,\vec{i} = \left(-G\frac{m_1}{r^2}\cos\alpha + G\frac{m_2}{r^2}\text{co}\alpha\right)\vec{i} = \frac{G\cos\alpha}{r^2}(-m_1+m_2)\,\vec{i} =$$

$$= \frac{6{,}67\cdot10^{-11}\,\frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}\cdot\frac{5}{5\sqrt{2}}}{(0{,}5)^2\text{m}^2}(-36+144)\cdot10^{-3}\text{kg}\,\vec{i} = 2{,}04\cdot10^{-11}\,\vec{i}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Eje vertical

$$\vec{g}_y = \vec{g}_{1y} + \vec{g}_{2y} = -(g_{1y} + g_{2y})\,\vec{j} = -(g_1\text{sen}\alpha + g_2\text{sen}\alpha)\,\vec{i} = -\left(G\frac{m_1}{r^2}\text{sen}\alpha + G\frac{m_2}{r^2}\text{sen}\alpha\right)\vec{j} = -\frac{G\text{sen}\alpha}{r^2}(m_1+m_2)\,\vec{j} =$$

$$= -\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\,\frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}\cdot\frac{5}{5\sqrt{2}}}{(0{,}5)^2\text{m}^2}(36+144)\cdot10^{-3}\text{kg}\,\vec{j} = -3{,}4\cdot10^{-11}\,\vec{j}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Resultante: $\vec{g} = \vec{g}_x + \vec{g}_y = 2{,}04\cdot10^{-11}\,\vec{i} - 3{,}4\cdot10^{-11}\,\vec{j}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ cuyo módulo o magnitud es:

$$g = \sqrt{g_x^2 + g_y^2} = \sqrt{(2.04\cdot10^{-11})^2 + (-3{,}4\cdot10^{-11})^2} \approx 4\cdot10^{-11}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

El ángulo de la resultante, que forma con la parte positiva del eje horizontal:

$$\beta = \text{arctg}\frac{g_y}{g_x} = \text{arctg}\frac{-3{,}4\cdot10^{-11}}{2{,}04\cdot10^{-11}} = 300^\circ\ 57' \text{ en el cuarto cuadrante.}$$

****

②⓪ Calcular el valor del campo y del potencial gravitatorio creados por dos masas puntuales iguales y separadas un metro, en un punto intermedio entre ellas.

****

Como las masas son iguales, el campo (g) en el punto medio es nulo ya que los campos producidos en ese punto medio por dos masas iguales es de la misma magnitud (Gm/d^2) y dirección (la de la recta que las une) pero sentido opuesto.

Potencial: $V = V_1 + V_2 = -G\frac{m}{d} - G\frac{m}{d} = -2G\frac{m}{d} = -2\cdot6{,}67\cdot10^{-11}\frac{m}{0{,}5} = -2{,}67\cdot10^{-10}\,m\,\frac{\text{J}}{\text{kg}}$.

****

②① ¿Cuál es la velocidad mínima que es preciso comunicar a un objeto situado a 1 000 km de altura sobre la superficie terrestre para que escape del campo gravitatorio de la Tierra?

✻✻✻❀❀✪❀❀✻✻✻

$$v_e = \sqrt{2G\frac{M_T}{R+h}} = \sqrt{2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{5{,}98\cdot 10^{24}}{6{,}37\cdot 10^6 + 1\cdot 10^6}} = 10403{,}9\frac{m}{s}$$

✻✻✻❀❀✪❀❀✻✻✻

②② Si la Tierra redujese su radio a la mitad conservando su masa, ¿cuál sería la intensidad de la gravedad en su superficie?

✻✻✻❀❀✪❀❀✻✻✻

$\frac{g}{g_0} = \frac{G\frac{M_T}{\left(\frac{R}{2}\right)^2}}{G\frac{M_T}{R^2}} = \left(\frac{R}{R/2}\right)^2 = 2^2 = 4 \Rightarrow g = 4g_0 = 4\cdot 9{,}8\frac{m}{s^2} = 39{,}2\frac{m}{s^2}$, la intensidad de la gravedad sería el cuádruplo.

✻✻✻❀❀✪❀❀✻✻✻

②③ ¿Cuánto valdría la velocidad de escape de la Tierra en el caso planteado en el problema anterior?

✻✻✻❀❀✪❀❀✻✻✻

$v_e = \sqrt{2G\frac{M_T}{R/2}} = \sqrt{2}v_e^0$ sería $\sqrt{2}$ veces la velocidad de escape normal.

✻✻✻❀❀✪❀❀✻✻✻

②④ Dos satélites artificiales de masas m y 2 m respectivamente describen órbitas circulares del mismo radio r = 2R, siendo R el radio de la Tierra. Calcular la diferencia de las energías mecánicas de ambos satélites.

✻✻✻❀❀✪❀❀✻✻✻

$$\Delta Em = E_{m2} - Em_1 = GM(2m)\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{2R}\right) - GM(m)\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{2R}\right) = GMm\left[\frac{2}{2R}-\frac{1}{2R}\right] = G\frac{Mm}{2R}.$$

✻✻✻❀❀✪❀❀✻✻✻

②⑤ Deducir el período de revolución de un satélite en función de su velocidad de lanzamiento y de su velocidad orbital.

✻✻✻❀❀✪❀❀✻✻✻

Sea v = velocidad orbital y v_0 = velocidad de lanzamiento.

$F_C = F_g$ $\frac{mv^2}{r} = \frac{Gm\cdot M_T}{r^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}}$, por otro lado v = ω·r = $\frac{2\pi}{T}\cdot r$, luego $\frac{2\pi}{T}\cdot r = v$ de donde, despejando el periodo T:

$T = \frac{2\pi r}{v}$.

además la velocidad de lanzamiento es $v_0 = \sqrt{2GM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2r}\right)} \Leftrightarrow v_0^2 = 2GM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2r}\right) \Leftrightarrow \frac{v_0^2}{2GM} = \frac{1}{R} - \frac{1}{2r} \Leftrightarrow$

$\frac{1}{2r} = \frac{1}{R} - \frac{v_0^2}{2GM} \Leftrightarrow r = \frac{1}{2\left(\frac{1}{R} - \frac{v_0^2}{2GM}\right)}$ expresión que sustituida en el periodo nos da :

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \frac{1}{2\left(\frac{1}{R} - \frac{v_0^2}{2GM}\right)}}{v} = \frac{\pi}{v\left(\frac{1}{R} - \frac{v_0^2}{2GM}\right)}$$