ACTIVIDADES

Problemas para entrenarse

① Sabiendo que la masa de la Tierra es $5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg y su radio **R** = 6 380 km, ¿con qué fuerza atrae ala Tierra una persona de 50 kg, situada sobre su superficie?

Masa de la Tierra = M = $5{,}98{\cdot}10^{24}$ kg.
Masa de una persona = m = 50 kg.
Radio de la Tierra = R = $6{,}38{\cdot}10^{6}$ m.

$$F = G\frac{M{\cdot}m}{R^2} = 6{,}67{\cdot}10^{-11}\frac{N{\cdot}m^2}{kg^2}{\cdot}\frac{5{,}98{\cdot}10^{24}\,kg{\cdot}50kg}{(6{,}38{\cdot}10^{6}\,m)^2} = 489{,}95\,N$$

② Un satélite artificial gira en torno a la Tierra a una distancia del centro igual a tres veces el radio de ésta. Sabiendo que la masa de la Tierra es de $5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg, ¿cuál es el período del satélite?

Distancia de giro = r = 3(radio Tierra) = 3R.
Masa de la Tierra = M = $5{,}98{\cdot}10^{24}$ kg.

Si igualamos la fuerza de atracción de la Tierra sobre el satélite con la fuerza centrífuga de este:

$$Fg = Fc \Rightarrow G\frac{m{\cdot}M}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \Leftrightarrow v = \sqrt{G\frac{M}{r}}\ ;\ T = \frac{2\pi{\cdot}r}{v} = \frac{2\pi{\cdot}r}{\sqrt{G\frac{M}{r}}} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G{\cdot}M}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G{\cdot}M_T}} = 2\pi\sqrt{\frac{27R^3}{G{\cdot}M_T}} = 2\pi\sqrt{\frac{27(6{,}38{\cdot}10^{6})^3}{6{,}67{\cdot}10^{-11}{\cdot}5{,}98{\cdot}10^{24}}} \approx 26343{,}8s = 7{,}3\,hr.$$

③ ¿Qué fuerza de atracción existe entre dos cuerpos de 0,5 kg y 400 g respectivamente situados sobre una mesa a 40 cm de distancia entre sí?

$$F = G\frac{M{\cdot}m}{d^2} = 6{,}67{\cdot}10^{-11}\frac{N{\cdot}m^2}{kg^2}\frac{0{,}5kg{\cdot}0{,}4kg}{(0{,}4m)^2} = 8{,}34{\cdot}10^{-11}N$$

④ Si la masa de la Tierra es **M** = 5,98 · 10^{24} kg y su radio **R** = 6 380 km, y teniendo en cuenta que la fuerza que ejerce sobre un cuerpo de 1 kg de masa es de 9,8 N, deducir el valor de G.

Masa de la Tierra = M = 5,98·10^{24} kg.
Masa = m = 1 kg.
Radio de la Tierra = R = 6,38·10^{6} m.
Fuerza = F = 9,8 N.

$$F = G\frac{M \cdot m}{R^2} \Leftrightarrow G = \frac{FR^2}{M \cdot m} = \frac{9{,}8N \cdot (6{,}38 \cdot 10^6 m)^2}{5{,}98 \cdot 10^{24} kg \cdot 1kg} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\frac{N \cdot m^2}{kg^2}$$

⑤ Calcular la fuerza de atracción gravitatoria entre el electrón y el protón del átomo de hidrógeno.

Datos: Masa del protón: 1,67 ·10^{-27} kg Masa del electrón: 9,1 ·10^{-31} kg Radio del átomo: 5,3 · 10^{-11} m

$$F = G\frac{M_p \cdot m_e}{R^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\frac{N \cdot m^2}{kg^2} \cdot \frac{1{,}67 \cdot 10^{-27} kg \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} kg}{(5{,}3 \cdot 10^{-11} m)^2} = 3{,}61 \cdot 10^{-47}\ N$$

⑥ Hallar la altura sobre la superficie terrestre a la que hay que colocar un satélite artificial para que la fuerza que la Tierra ejerce sobre él sea un 20 % menor.

Dato: Radio de la Tierra = 6 380 km

Como P = m·g y la masa del satélite (m) no varía, es la aceleración de la gravedad (g) la que ha de reducirse un 20 % luego la relación entre sus gravedades es de un 80 % , es decir $\frac{g_h}{g_0} = 0{,}8$

$$\frac{g_h}{g_0} = \frac{G\frac{M_T}{(R+h)^2}}{G\frac{M_T}{R^2}} = \left(\frac{R}{R+h}\right)^2 = 0{,}8 \Leftrightarrow \frac{1}{1+\frac{h}{R}} = \sqrt{0{,}8} \Leftrightarrow 1+\frac{h}{R} = \frac{1}{\sqrt{0{,}8}} \Leftrightarrow h = R\left(\frac{1}{\sqrt{0{,}8}}-1\right) = 6{,}38 \cdot 10^3 km\left(\frac{1}{\sqrt{0{,}8}}-1\right) = 753$$
km.

⑦ ¿A qué distancia del Sol girará un planeta que tarda 400 días terrestres en dar la vuelta en su órbita?

Aplicamos la tercera ley de Kepler:

$$T^2 = k\cdot r^3 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{T^2}{k}} = \sqrt[3]{\frac{(400\cdot 24\cdot 3600\,s)^2}{3\cdot 10^{-19}\,\frac{s^2}{m^3}}} = 1{,}58\cdot 10^{11}\,m$$

✱✱✱❀❀•❀❀✱✱✱

⑧ Calcular la velocidad de traslación de un hipotético planeta que girase alrededor del Sol a una distancia de dos mil millones de kilómetros. ¿Qué tiempo tardaría en dar una vuelta a su órbita?

✱✱✱❀❀•❀❀✱✱✱

Aplicamos la tercera ley de Kepler para calcular el período T:

$$T^2 = k\cdot r^3 \Leftrightarrow T = \sqrt{k\cdot r^3} = \sqrt{3\cdot 10^{-19}\,\frac{s^2}{m^3}\cdot(2\cdot 10^{12}\,m)^3} = 1{,}55\cdot 10^9\,s$$

Y, ahora la velocidad de traslación:

$$v = \omega\cdot r = \frac{2\pi}{T}\cdot r = \frac{2\pi rad}{1{,}55\cdot 10^9\,s}\cdot 2\cdot 10^{12}\,m = 8107\,\frac{m}{s}$$

✱✱✱❀❀•❀❀✱✱✱

⑨ Obtener en el S.I el valor de la constante que aparece en la tercera ley de Kepler. Utilizar el valor de la constante para obtener la masa del Sol.

✱✱✱❀❀•❀❀✱✱✱

Distancia Tierra-Sol = r = $1{,}5\cdot 10^{11}$ m.
Período de rotación de la Tierra en torno al Sol = T = 365 días.

Tercera ley de Kepler: $T^2 = k\cdot r^3 \Leftrightarrow k = \frac{T^2}{r^3} = \frac{\left(365\,días\cdot\frac{24\,hr}{1\,día}\cdot\frac{3600\,s}{1\,hr}\right)^2}{(1{,}5\cdot 10^{11}\,m)^3} = 2{,}95\cdot 10^{-19}\,\frac{s^2}{m^3}$

La atracción del Sol sobre la Tierra se equilibra con la fuerza centrífuga de giro de la Tierra en torno al Sol:

$F_c = F_a \Rightarrow m_T\cdot\frac{v^2}{r} = G\frac{M_S\cdot m_T}{r^2} \xrightarrow{\text{simplificando}} v^2 = G\frac{M_S}{r}$ pero además la velocidad de traslación es $v = \frac{2\pi r}{T}$ luego sustituyendo tenemos $\frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = G\frac{M_S}{r} \xrightarrow{\text{reordenando}} \frac{r^3}{T^2} = \frac{1}{k} = \frac{G\cdot M_S}{4\pi^2}$ luego conocida k podemos estimar la masa del Sol $k = \frac{4\pi^2}{GM_S} \Leftrightarrow M_S = \frac{4\pi^2}{G\cdot k} = \frac{4\pi^2}{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 2{,}95\cdot 10^{-19}} = 2\cdot 10^{30}\,kg.$

✱✱✱❀❀•❀❀✱✱✱

➉ ¿A qué altura sobre la superficie terrestre la aceleración de la gravedad se reduce a la mitad?

✱✱✱❀❀•❀❀✱✱✱

$$\frac{g}{g_0} = \frac{1}{2} = \frac{G\frac{M_T}{(R+h)^2}}{G\frac{M_T}{R^2}} = \left(\frac{R}{R+h}\right)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{R+h}{R}\right) = \sqrt{2} \Leftrightarrow 1+\frac{h}{R} = \sqrt{2} \Leftrightarrow h = R(\sqrt{2}-1) = 6{,}37\cdot 10^3\,km\cdot\left(\sqrt{2}-1\right) = 2638{,}5\ km.$$

✱✱✱❀❀•❀❀✱✱✱

①① Calcular la velocidad areolar de la Tierra en su movimiento en torno al Sol suponiendo la órbita circular de radio $1{,}5 \cdot 10^{11}$m.

$$v_{aerolar} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{\pi \cdot r^2}{T} = \frac{\pi \cdot (1{,}5 \cdot 10^{11})^2}{365 \cdot 24 \cdot 3600} = 2{,}24 \cdot 10^{15}\,\frac{m^2}{s}$$

①② Un planeta tiene dos lunas de igual masa, una de ellas situada a doble distancia que la otra del centro del planeta. Indicar la relación entre las fuerzas con que el planeta atrae a las lunas.

Masa de la primera luna = masa de la segunda = m.
Distancia de la primera al centro del planeta = r.
Distancia de la 2ª al centro del planeta = 2r.

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{G\dfrac{M_P \cdot m}{(2r)^2}}{G\dfrac{M_P \cdot m}{r^2}} = \frac{r^2}{4r^2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow F_1 = 4F_2$$

①③ Los aristotélicos suponían que los cuerpos pesados caían más deprisa que los ligeros (incluso despreciando la resistencia en el aire). Galileo propuso imaginar un cuerpo pesado y otro ligero unidos por un hilo. Indicar si en el comportamiento del sistema existe alguna contradicción con las predicciones de los aristotélicos.

Los dos cuerpos caerán con la misma velocidad al contrario de lo que pensaban los aristotélicos.

①④ Determinar la masa del Sol sabiendo que la distancia media Tierra-Sol es $1{,}5 \cdot 10^{11}$ y que un año dura 365 días.

La atracción del Sol sobre la Tierra se equilibra con la fuerza centrífuga de giro de la Tierra en torno al Sol:

$F_c = F_a \Rightarrow m_T \cdot \frac{v^2}{r} = G\frac{M_S \cdot m_T}{r^2} \xrightarrow{\text{simplificando}} v^2 = G\frac{M_S}{r}$ pero además la velocidad de traslación es $v = \frac{2\pi r}{T}$ luego sustituyendo tenemos

$$\frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = G\frac{M_S}{r} \xrightarrow{\text{reordenando}} \frac{r^3}{T^2} = \frac{G \cdot M_S}{4\pi^2} \Leftrightarrow M_S = \frac{4\pi^2 \cdot r^3}{G \cdot T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot (1{,}5 \cdot 10^{11})^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot (365 \cdot 24 \cdot 3600)^2} = 2 \cdot 10^{30}\ \text{kg}$$

①⑤ Si la Tierra atrae a la Luna, ¿por qué no cae sobre ella?

Porque la fuerza centrífuga debido al giro de la Tierra, que tiene igual módulo y dirección pero sentido contrario, equilibra la fuerza de atracción.

①⑥ ¿Cuál es la aceleración de la gravedad en un sitio donde una masa de 10 kg pesa 90 N?

$$P = m \cdot g \Leftrightarrow g = \frac{P}{m} = \frac{90N}{10kg} = 9\frac{m}{s^2}$$

①⑦ Existe una unidad de fuerza llamada kilopondio (kp) cuya equivalencia es 1 kp = 9,8 N. Indicar la relación existente entre el peso de un cuerpo en la superficie terrestre expresado en kilopondios y su masa expresada en kg.

$P = m \cdot g \Rightarrow m = \frac{P}{g} = \frac{9{,}8N}{9{,}8\frac{m}{s^2}} = 1kg$, luego el peso en kp es también la masa medida en kg.

Problemas para pensar

①⑧ El planeta Marte tiene un radio R = 0,53 R_0, siendo R_0 el radio de la Tierra. Un satélite de Marte describe a su alrededor una órbita circular de radio R_1 = 2,8 R en un tiempo de 7 h, 39 min y 14 s. Calcular la masa del planeta Marte respecto a la masa de la Tierra M_0.

Radio de Marte = R = 0,53R_0.
Radio de la órbita del satélite en torno a Marte = r = 2,8R.
Periodo del satélite = T = 7 hr 39 min 14 s = 27 554 s.

Si igualamos la fuerza con que Marte atrae al satélite a la centrífuga debido al giro del satélite en torno a Marte:

$$F_A = F_c \Rightarrow \frac{mv^2}{r} = G\frac{M_M \cdot m}{r^2} \Leftrightarrow v = \sqrt{G\frac{M_M}{r}} = \frac{2\pi r}{T} \Leftrightarrow G\frac{M_M}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} \Leftrightarrow M_M = \frac{4\pi^2 r^3}{G \cdot T^2} = \frac{4\pi^2(2{,}8R)^3}{G \cdot T^2} = \frac{4\pi^2(2{,}8 \cdot 0{,}53R_0)^3}{G \cdot T^2}$$

Por otro lado $g_0 = G\frac{M_T}{R_0^2} \Leftrightarrow R_0 = \sqrt{\frac{GM_T}{g_0}}$ que sustituida en la anterior da:

$$M_M = \frac{4\pi^2(2{,}8 \cdot 0{,}53\sqrt{\frac{GM_T}{g_0}})^3}{G \cdot T^2} = \frac{4\pi^2(2{,}8 \cdot 0{,}53\sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}M_T}{9{,}8}})^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 27554^2} = 4{,}52 \cdot 10^{-14}\sqrt{M_T^3}$$

19 Un cuerpo tiene una masa de 10 kg. Si se traslada a la superficie de un planeta con una masa 10 veces inferior a la de la Tierra, pero de igual radio, ¿cuál será la fuerza con que es atraído?

Masa del planeta = $M_P = M_T/10$.
Radio del planeta = $R_P = R_T = R$.

$$\frac{F_P}{F_T}=\frac{G\frac{M_P\cdot m}{R^2}}{G\frac{M_T\cdot m}{R^2}}=\frac{M_P}{M_T}=\frac{\frac{M_T}{10}}{M_T}=\frac{1}{10}\Rightarrow F_P=\frac{1}{10}F_T=\frac{1}{10}m\cdot g_0=\frac{1}{10}10\,kg\cdot 9{,}8\frac{m}{s^2}=9{,}8\,N$$

20 La masa de Marte, su radio y el radio medio de su órbita alrededor del Sol referidos a las magnitudes respectivas de la Tierra son 0,108, 0,54 y 1,52. ¿Cuál es la duración del año marciano?

Masa de Marte = $M_M = 0{,}108M_T$.
Radio de Marte = $R_M = 0{,}54\ R_T$.
Radio de la órbita de Marte alrededor del Sol = $1{,}52\cdot r_T$.

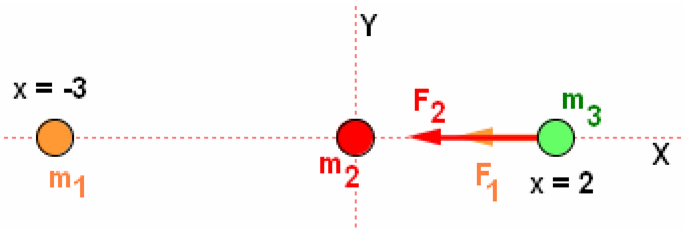
$$\frac{T_M}{T_T}=\frac{2\pi\sqrt{\frac{r_M^3}{G\cdot M_{Sol}}}}{2\pi\sqrt{\frac{r_T^3}{G\cdot M_{Sol}}}}=\sqrt{\left(\frac{r_M}{r_T}\right)^3}=\sqrt{\left(\frac{1{,}52r_T}{r_T}\right)^3}=\sqrt{1{,}52^3}\Leftrightarrow T_M=1{,}864\cdot 365\text{ días}=684\text{ días.}$$

21 ¿A qué distancia de la Tierra la fuerza gravitatoria sobre un cuerpo sería nula?

Como la fuerza de atracción gravitatoria varía con el inverso del cuadrado de la distancia (r) según:

$$F=G\frac{M_T\cdot m}{r^2}\Rightarrow \text{para que } F\to 0\Rightarrow r\to\infty$$

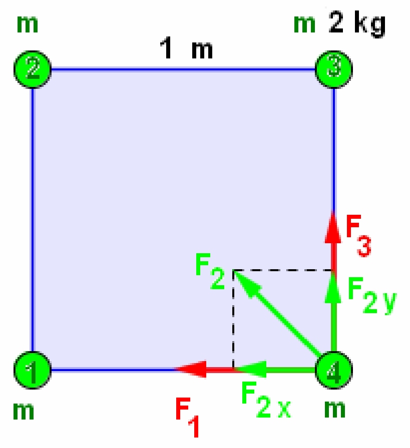
22 Las tres masas m_1, m_2 y m_3 de la figura tienen 100 g cada una. La escala de la gráfica está en centímetros. Calcular la fuerza que se ejerce sobre m_3.



$$\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2=-(F_1+F_2)\,\vec{i}=-\left(G\frac{m_1\cdot m_3}{d_{13}^2}+G\frac{m_2\cdot m_3}{d_{23}^2}\right)\vec{i}=-Gm^2\left(\frac{1}{d_{13}^2}+\frac{1}{d_{23}^2}\right)\vec{i}=-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 0{,}1^2\left(\frac{1}{0{,}05^2}+\frac{1}{0{,}02^2}\right)\vec{i}=$$

$$=-1{,}93\cdot 10^{-9}\,\vec{i}\ N.$$

②③ Cuatro masas de 2 kg cada una están situadas en los vértices de un cuadrado de 1 m de lado. Calcular la fuerza que se ejerce sobre cada masa como resultado de las interacciones de las otras.



Hallamos las componentes de la fuerza resultante según los ejes de coordenadas colocados en el vértice 4.

Eje horizontal

$$\vec{F}_x = \vec{F}_1 + \vec{F}_{2x} = -(F_1 + F_{2x})\,\vec{i} = -(F_1 + F_2\cos 45^o)\,\vec{i} = -Gm^2\left(\frac{1}{L^2} + \frac{\cos 45^o}{2L^2}\right)\vec{i} = -\frac{Gm^2}{L^2}\left(1 + \frac{\cos 45^o}{2}\right)\vec{i} =$$

$$= -3{,}61\cdot 10^{-10}\,\vec{i}\ \text{N}.$$

Eje vertical

$$\vec{F}_y = \vec{F}_3 + \vec{F}_{2y} = (F_3 + F_{2y})\,\vec{j} = (F_3 + F_3\,\text{sen}45^o)\,\vec{j} = Gm^2\left(\frac{1}{L^2} + \frac{\text{sen}45^o}{2L^2}\right)\vec{j} = \frac{Gm^2}{L^2}\left(1 + \frac{\text{sen}45^o}{2}\right)\vec{j} = 3{,}61\cdot 10^{-10}\,\vec{j}\ \text{N}.$$

Luego la resultante es $\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y = -3{,}61\cdot 10^{-10}\,\vec{i} + 3{,}61\cdot 10^{-10}\,\vec{j}$ N, dirigida hacia la masa 2 en la diagonal del cuadrado y de módulo: $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 3{,}61\cdot 10^{-10}\sqrt{2}$ N.

②④ La relación entre las velocidades medias de dos planetas hipotéticos es 5. ¿Cuántas veces mayor es el año solar de uno con respecto al otro?

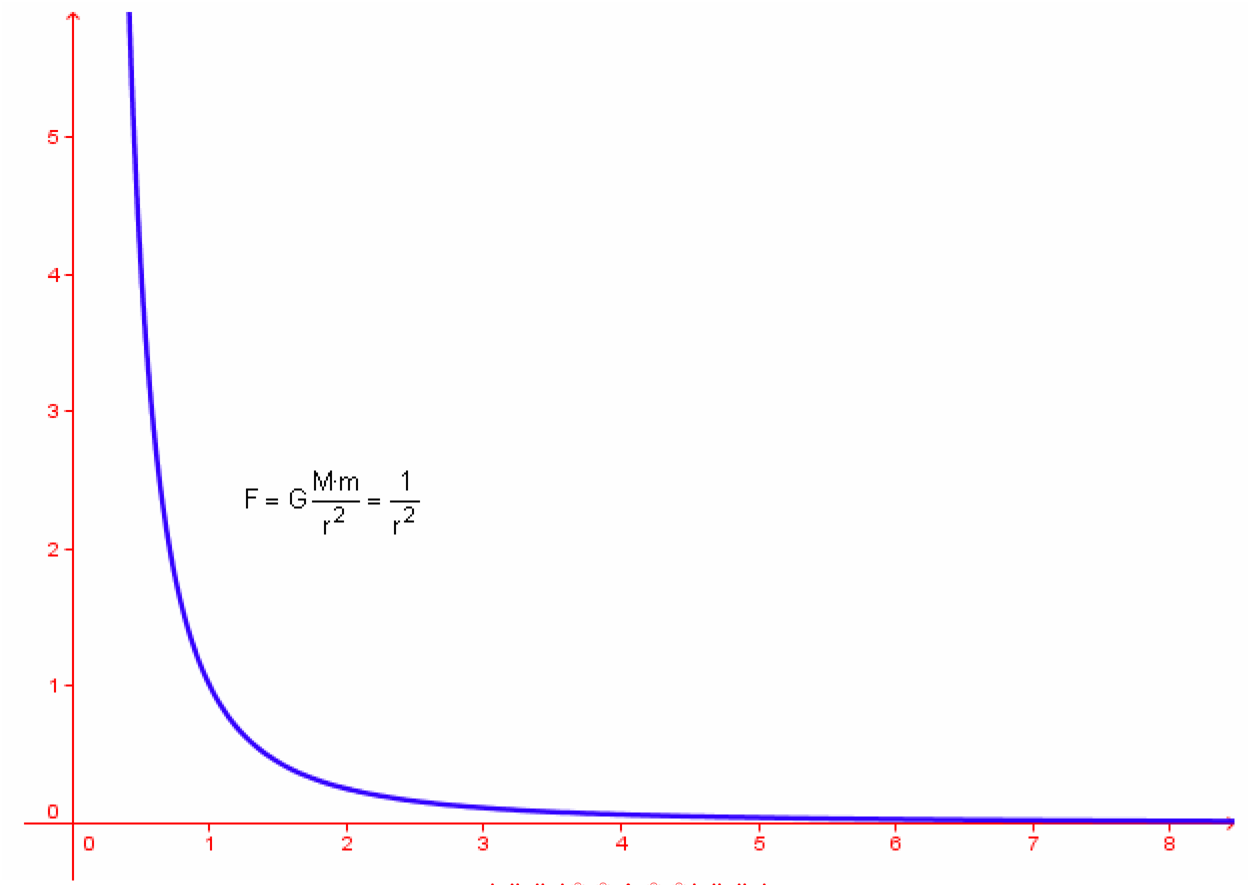
Como $v = \sqrt{\dfrac{GM}{r}} = \dfrac{2\pi r}{T}$

Por un lado $\dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{1}{5} = \dfrac{\sqrt{G\dfrac{M_{Sol}}{r_1}}}{\sqrt{G\dfrac{M_{Sol}}{r_2}}} = \sqrt{\dfrac{r_2}{r_1}} \Leftrightarrow \dfrac{r_1}{r_2} = 5^2 = 25$.

Por otro lado: $\dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{1}{5} = \dfrac{\dfrac{2\pi r_1}{T_1}}{\dfrac{2\pi r_2}{T_2}} = \dfrac{r_1}{r_2}\cdot\dfrac{T_2}{T_1} = 25\dfrac{T_2}{T_1} \Leftrightarrow \dfrac{T_2}{T_1} = \dfrac{1}{125} \Leftrightarrow T_2 = \dfrac{1}{125}T_1$

②⑤ Tomando una escala en la que GM = 1, hacer una gráfica que represente la fuerza que ejerce una masa M sobre la masa m = 1 en función de la distancia.

$F = G\frac{M\cdot m}{r^2} = \frac{1}{r^2}$ cuya representación gráfica es:



②⑥ Júpiter, el mayor de los planetas, tiene doce satélites. El más grande, Ganímedes, fue descubierto por Galileo en 1610 (es lo suficientemente grande como para poder ser visto con unos buenos binoculares). Está situado a 15 radios jovianos R_J del centro del planeta y tiene un período de 620 000 s. Hallar la densidad media y el radio del planeta.

Distancia de Ganímedes a Júpiter = r = 15 R_J.
Periodo de giro de Ganímedes en torno a Júpiter = T = 620 000 s.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G\cdot M_J}} = 2\pi\sqrt{\frac{(15R_J)^3}{G\cdot\rho\cdot V_J}} = 2\pi\sqrt{\frac{(15R_J)^3}{G\cdot\rho\cdot\frac{4}{3}\pi R_J^3}} = 2\pi\sqrt{\frac{3\cdot(15)^3}{G\cdot\rho\cdot 4\pi}} \Leftrightarrow T^2 = 4\pi^2\cdot\frac{3\cdot(15)^3}{G\cdot\rho\cdot 4\pi} \Leftrightarrow \rho = \frac{10125\cdot\pi}{G\cdot T^2} = \frac{10125\cdot\pi}{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot(6{,}2\cdot10^5)^2} =$$

=1 240,6 kg/m^3.

Para hallar el radio del necesitamos algún dato adicional.

②⑦ Marte tiene dos satélites, Fobos y Deimos, cuyas órbitas tienen unos radios de 9 400 km y 23 500 km respectivamente. Fobos tarda 7,7 horas en dar una vuelta alrededor del planeta. Aplicando las leyes de Kepler, hallar lo que tarda Deimos.

Aplicamos la tercera ley de Kepler:

$$\frac{r_F^3}{T_F^2}=\frac{r_D^3}{T_D^2}\Leftrightarrow T_D=T_F\sqrt{\left(\frac{r_D}{r_F}\right)^3}=7{,}7\text{hr}\cdot\sqrt{\left(\frac{23500\text{km}}{9400\text{km}}\right)^3}=30{,}44\text{ hr.}$$

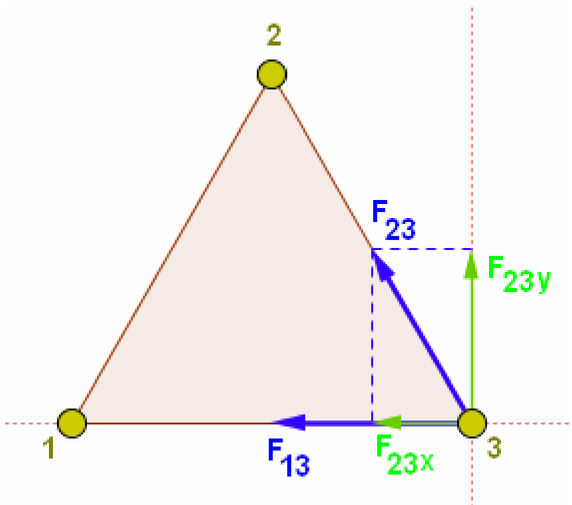
②⑧ Un astronauta cuyo peso en la Tierra es 700 N aterriza en Venus y mide su peso, observando que es 600 N. Si consideramos que el radio de Venus es similar al de la Tierra (6 370 km), calcular la masa de Venus sabiendo que la de la Tierra es 5,98 - 1024 kg.

Peso en la Tierra = P_T = 700 N.
Peso en Venus = P_V = 600 N.
Radio de Venus = radio de la Tierra = R.
Masa de la Tierra = M_T = $5{,}98\cdot10^{24}$ kg.

$$\frac{P_T}{P_V}=\frac{m\cdot g_T}{m\cdot g_V}=\frac{g_T}{g_V}=\frac{G\frac{M_T}{R^2}}{G\frac{M_V}{R^2}}=\frac{M_T}{M_V}\Leftrightarrow M_V=M_T\cdot\frac{P_V}{P_T}=5{,}98\cdot10^{24}\text{kg}\cdot\frac{600\text{N}}{700\text{N}}=5{,}13\cdot10^{24}\text{ kg.}$$

Problemas para profundizar

②⑨ Tres masas de 2 kg cada una están situadas en los vértices de un triángulo equilátero de 1 m de lado. Calcular la fuerza que se ejerce sobre cada masa como resultado de las interacciones de las otras.



Hallamos la fuerza que ejercen las masas 1 y 2 sobre la 3, colocando los ejes de coordenadas en la tercera masa y calculando sus componentes según los ejes:

Eje horizontal

$$\vec{F}_x=-(F_{13}+F_{23x})\vec{i}=-\left(G\frac{m_1\cdot m_3}{d_{13}^2}+G\frac{m_2\cdot m_3}{d_{23}^2}\cos60^\circ\right)\vec{i}=-G\frac{m^2}{l^2}(1+\cos60^\circ)\vec{i}=-6{,}67\cdot10^{-11}\frac{2^2}{1^2}(1+\cos60^\circ)\vec{i}=$$

$= -4\cdot 10^{-10}\ \vec{i}$ N.

Eje vertical

$$\vec{F}_y = F_{23y}\ \vec{j} = F_{23}\mathrm{sen}60^\circ\ \vec{j} = G\frac{m_2\cdot m_3}{d_{23}^2}\mathrm{sen}60^\circ\ \vec{j} = G\frac{m^2}{l^2}\mathrm{sen}60^\circ\ \vec{j} = 6{,}67\cdot 10^{-11}.\frac{2^2}{1^2}\mathrm{sen}60^\circ\ \vec{j} = 2{,}31\cdot 10^{-10}\ \vec{j}\ \mathrm{N}$$

Luego la fuerza sobre la masa 3 es:

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y = (-4\cdot 10^{-10}\ \vec{i} + 2{,}3\cdot 10^{-10}\ \vec{j})\,\mathrm{N}$$

Y su módulo: $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{\left(-4\cdot 10^{-10}\right)^2 + \left(2{,}31\cdot 10^{-10}\right)^2} = 4{,}62\cdot 10^{-10}$ N.

Como las masas son iguales y el triángulo es equilátero, el módulo de la fuerza resultante es el mismo sobre cada masa variando la dirección y sentido.

✲✲✲❀❀⊙❀❀✲✲✲

③⓪ Si la densidad de la Tierra es 5,5 g/cm³, calcular su radio sabiendo que la fuerza que ejerce sobre una masa de un kilogramo situada en su superficie es de 9,8 N.

✲✲✲❀❀⊙❀❀✲✲✲

$$\mathrm{Peso} = F = G\frac{M_T\cdot m}{R_T^2} = G\frac{\rho\frac{4}{3}\pi R_T^3 m}{R_T^2} = \frac{4\pi}{3}G\rho R_T m \Leftrightarrow R_T = \frac{3F}{4\pi G\rho m} = \frac{3\cdot 9{,}8\mathrm{N}}{4\pi\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{\mathrm{N\cdot m^2}}{\mathrm{kg^2}}\cdot 5500\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}}\cdot 1\mathrm{kg}} = 6{,}38\cdot 10^6\ \mathrm{m}.$$

✲✲✲❀❀⊙❀❀✲✲✲

③① Una masa cae en las proximidades de la superficie de un planeta, con una aceleración de 5,8 m/s². El planeta tiene un radio que es 0,27 veces el de la Tierra. ¿Qué relación existe entre la masa del planeta y la de la Tierra?

✲✲✲❀❀⊙❀❀✲✲✲

Aceleración de la gravedad en el planeta = a_p = 5,8 m/s^2.
Radio medio del planeta = $R_p = 0{,}27R_T$.

$$\frac{a_P}{g_0} = \frac{G\frac{M_P}{R_P^2}}{G\frac{M_T}{R_T^2}} = \frac{M_P}{M_T}\cdot\left(\frac{R_T}{R_P}\right)^2 = \frac{M_P}{M_T}\cdot\left(\frac{R_T}{0{,}27\cdot R_T}\right)^2 \Rightarrow \frac{5{,}8}{9{,}8} = \frac{M_P}{M_T}\cdot\left(\frac{1}{0{,}27}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{M_P}{M_T} = 0{,}27^2\cdot\frac{5{,}8}{9{,}8} = 0{,}04$$

✲✲✲❀❀⊙❀❀✲✲✲

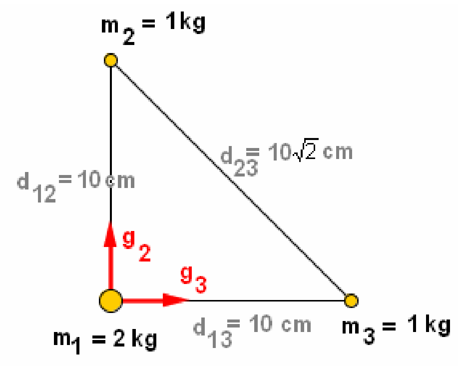
③② Tres masas puntuales, dos de 1 kg y la otra de 2 kg, están situadas en los vértices de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 10 cm cada uno. La masa de 2 kg está en el vértice del ángulo recto y está libre. Las otras dos están fijas e inmóviles. ¿Con qué aceleración se moverá la masa de 2 kg debido a la fuerza gravitatoria ejercida por las otras dos?

✲✲✲❀❀⊙❀❀✲✲✲

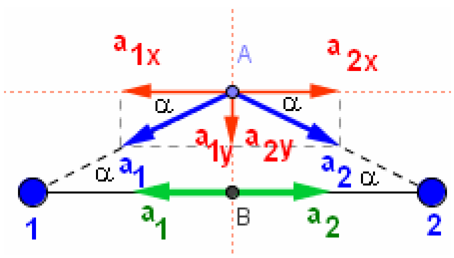
$$g_2 = G\frac{m_2}{d_{12}^2} = 6{,}67\cdot10^{-11}\cdot\frac{1}{0{,}1^2} = 6{,}67\cdot10^{-9}\ \frac{m}{s^2}$$

$$g_3 = G\frac{m_3}{d_{13}^2} = 6{,}67\cdot10^{-11}\cdot\frac{1}{0{,}1^2} = 6{,}67\cdot10^{-9}\ \frac{m}{s^2}$$

$$g = \sqrt{g_2^2 + g_3^2} = g_2\sqrt{2} = 6{,}67\cdot10^{-9}\cdot\sqrt{2}\ \frac{m}{s^2} = 9{,}43\cdot10^{-9}\ \frac{m}{s^2}.$$



③③ Dos masas esféricas iguales de 1,5 kg cada una están fijadas a dos puntos separados 16 cm. Una tercera masa se suelta en un punto A equidistante de las masas anteriores y a una distancia de 6 cm de la línea que las une. Calcular la aceleración de dicha masa cuando está en las posiciones A y B (punto medio de la recta que une las masas iguales).



$m_1 = m_2 = 1{,}5$ kg

distancia de la masas 1 y 2 al punto A = $d_A = \sqrt{0{,}08^2 + 0{,}06^2} = \sqrt{0{,}01} = 0{,}1$ m

distancia de la masas 1 y 2 al punto B = $d_B = 0{,}08$ m.

Aceleración en el punto A

Hallamos las componentes de la aceleración gravitatoria según los ejes.

Eje horizontal

$\vec{a}_x = \vec{a}_{1x} + \vec{a}_{2x} = 0$ ya que son vectores que tienen la misma dirección y módulo pero sentidos opuestos.

Eje vertical

$$\vec{a}_y = \vec{a}_{1y} + \vec{a}_{2y} = -(a_{1y} + a_{2y})\operatorname{sen}\alpha\ \vec{j} = -\left(G\frac{m_1}{d_A^2} + G\frac{m_2}{d_A^2}\right)\operatorname{sen}\alpha\ \vec{j} = -2G\frac{m_1}{d_A^2}\operatorname{sen}\alpha\ \vec{j} = -2\cdot6{,}67\cdot10^{-11}\frac{1{,}5}{0{,}01}\frac{0{,}06}{0{,}1}\vec{j} =$$

$- 1{,}2\cdot10^{-8}\ \vec{j}$ m/s^2.

Ya que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{AB}}{d_A} = \frac{0{,}06}{0{,}1}$

Luego la aceleración es A es $\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y = -1{,}2\cdot10^{-8}\ \vec{j}$ m/s^2.

Aceleración en el punto B

Es nula ya que por ser el punto medio los vectores tienen el mismo módulo y dirección pero sentido contrario(en verde en la figura).

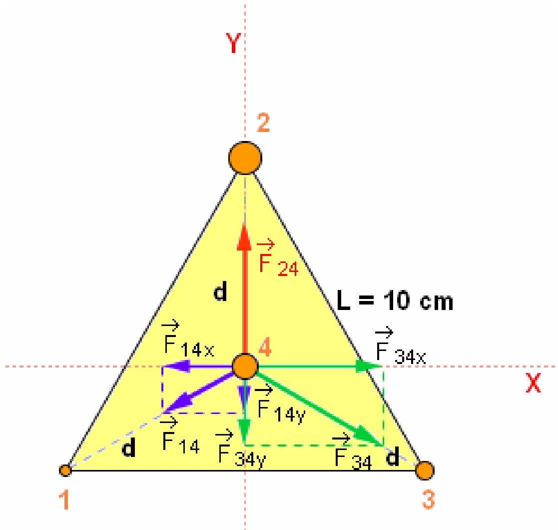
③④ Dos masas puntuales iguales de valor m están situadas a una distancia r y se atraen con una fuerza $F = 2 \cdot 10^{-8}$ N. ¿Con qué fuerza se atraerían si la distancia entre ellas se redujese a su mitad?

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{G\dfrac{m^2}{r^2}}{G\dfrac{m^2}{\left(\dfrac{r}{2}\right)^2}} = \frac{1}{4} \Rightarrow F_2 = 4F_1 = 4{\cdot}2{\cdot}10^{-8}\,\text{N} = 8{\cdot}10^{-8}\,\text{N}$$

③⑤ ¿A qué altura con respecto a la superficie terrestre habría que colocar un cuerpo para que la fuerza con que es atraído fuese la mitad de la que experimenta en su superficie?

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{1}{2} = \frac{G\dfrac{M_T{\cdot}m}{(R+h)^2}}{G\dfrac{M_T{\cdot}m}{R^2}} = \left(\frac{R}{R+h}\right)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{R+h}{R}\right) = \sqrt{2} \Leftrightarrow 1+\frac{h}{R} = \sqrt{2} \Leftrightarrow h = R(\sqrt{2}-1) = 6{,}37{\cdot}10^3\,\text{km}{\cdot}\left(\sqrt{2}-1\right) = 2638{,}5\ \text{km.}$$

③⑥ Tres masas puntuales m, 2 m y 4 m están en sendos vértices de un triángulo equilátero de 10 cm de lado. ¿Qué fuerza se ejerce sobre una masa 3 m situada en su centro?



$m_1 = m$; $m_2 = 4m$; $m_3 = 2m$; $m_4 = 3m$

Lado del triángulo = L = 10 cm

Altura = mediana = $h = \sqrt{10^2 - 5^2} = 8{,}66\ \text{cm}$

Distancia vértices-centro = $d = \dfrac{2h}{3} = \dfrac{2{\cdot}8{,}66}{3} = 5{,}77\ \text{cm}$

Si colocamos los ejes de coordenadas en la masa que está en el centro podemos hallar las componentes según esos ejes de las fuerzas que ejercen las masas de los vértices sobre la masa 4 colocada en el centro:

Eje horizontal

$$\vec{F}_x = \vec{F}_{14x} + \vec{F}_{34x} = \left(-F_{14x} + F_{34x}\right)\vec{i} = \left(-F_{14}\cos 30° + F_{34}\cos 30°\right)\vec{i} = \left(-G\frac{m_1{\cdot}m_4}{d^2} + G\frac{m_3{\cdot}m_4}{d^2}\right)\cos 30°\,\vec{i} =$$

$$= \left(-G\frac{m{\cdot}3m}{d^2} + G\frac{2m{\cdot}3m}{d^2}\right)\cos 30°\,\vec{i} = G\frac{m^2}{d^2}\cos 30°(-3+6)\,\vec{i} = 3\cos 30°\,G\frac{m^2}{d^2}\,\vec{i} = 3\cos 30°{\cdot}6{,}67{\cdot}10^{-11}\,\frac{m^2}{5{,}77^2}\,\vec{i} =$$

$$5{,}2{\cdot}10^{-12}m^2\,\vec{i}\ \text{N.}$$

Eje vertical

$$\vec{F}_y = \vec{F}_{24} + \vec{F}_{14y} + \vec{F}_{34y} = (F_{24} - F_{14}\text{sen}30^\circ - F_{34}\text{sen}30^\circ)\,\vec{j} = \left(G\frac{m_2 \cdot m_4}{d^2} - G\frac{m_1 \cdot m_4}{d^2}\text{sen}30^\circ - G\frac{m_3 \cdot m_4}{d^2}\text{sen}30^\circ\right)\vec{j} =$$

$$= \left(G\frac{4m \cdot 3m}{d^2} - G\frac{m \cdot 3m}{d^2}\text{sen}30^\circ - G\frac{2m \cdot 3m}{d^2}\text{sen}30^\circ\right)\vec{j} = G\frac{m^2}{d^2}(12 - 3\text{sen}30^\circ - 6\text{sen}30^\circ)\,\vec{j} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{m^2}{5{,}77^2} \cdot 7{,}5\,\vec{j} =$$

$$= 1{,}5 \cdot 10^{-11} m^2\,\vec{j}\ \text{N}.$$

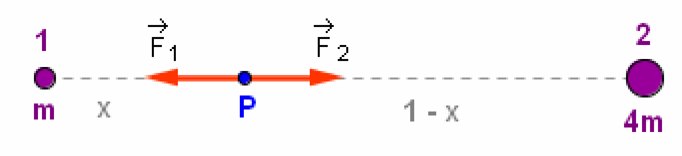
Luego la resultante es:

$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y = 5{,}2 \cdot 10^{-12} m^2\,\vec{i} + 1{,}5 \cdot 10^{-11} m^2\,\vec{j}$ N, y su módulo:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(5{,}2 \cdot 10^{-12} m^2)^2 + (1{,}5 \cdot 10^{-11} m^2)^2} = 1{,}59 \cdot 10^{-11} m^2\ \text{N}$$

❸❼ ¿ En qué punto entre dos masas m y 4m separadas 1 m, la fuerza sobre cualquier cuerpo es nula?.

En el punto P, más cercano a la masa 1, las fuerzas de atracción sobre cualquier cuerpo (de masa M), debidos a las masas 1 y 2 han de ser del mismo módulo, ya tienen la misma dirección pero sentidos contrarios:



$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \Leftrightarrow F_1 = F_2 \Rightarrow G\frac{m_1 \cdot M}{x^2} = G\frac{m_2 \cdot M}{(1-x)^2} \Leftrightarrow \frac{m}{x^2} = \frac{4m}{(1-x)^2} \Leftrightarrow \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 = 4 \Leftrightarrow \left(\frac{1-x}{x}\right) = \sqrt{4} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{x} - 1 = 2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{x} = 3 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}\text{m}.$$