ACTIVIDADES

1 Se hace oscilar desde la posición de equilibrio un cuerpo unido a un muelle horizontal, de modo que la separación máxima de dicha posición es de 3 cm. Si se han contado 20 oscilaciones en 5 segundos, ¿cuál es la ecuación representativa de dicho movimiento?

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

Separación máxima = Amplitud = A = 3 cm = 0,03 m.

Frecuencia angular = $\omega = \dfrac{20\text{ oscilaciones}}{5\text{ segundos}} = \dfrac{20\text{ oscilaciones}}{5\text{ segundos}} \cdot \dfrac{2\pi\text{ radianes}}{\text{oscilación}} = 8\pi\dfrac{\text{rad}}{\text{s}}$

Partida = posición de equilibrio

Tenemos dos posibilidades:

❂ La recomendada, ya que para t = 0 x = 0, en función del seno:

$$x = A\,\text{sen}\,\omega t = 0{,}03\,\text{sen}\,8\pi t$$

❂ La opcional, en función del coseno:

$$x = A\cos(\omega t \pm \pi/2) = 0{,}03\cos(8\pi t \pm \pi/2)$$

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

2 Indica cómo convendría escribir la ecuación del movimiento anterior si el cuerpo comienza a oscilar hacia la izquierda. ¿Y si lo hiciera hacia la derecha?

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

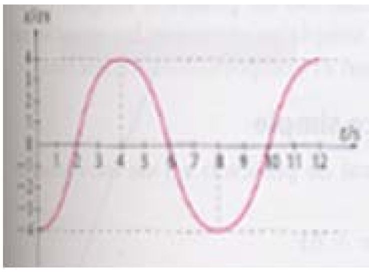
Depende de la opción elegida y el sentido que tomemos como elongaciones positivas (si tomamos el sentido positivo hacia la derecha para coincidir con el sentido posito del eje horizontal:

❂ La recomendada : $x = A\,\text{sen}\,\omega t = 0{,}03\,\text{sen}\,8\pi t$

❂ La opcional : $x = A\cos(\omega t + \pi/2) = 0{,}03\cos(8\pi t + \pi/2)$

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

3 ¿Cuál es la ecuación del MAS representado en la gráfica de la figura ?



Amplitud = máxima elongación = A = 4 cm.

Período =Tiempo entre dos puntos en la igualdad de fase = T = 8 s.

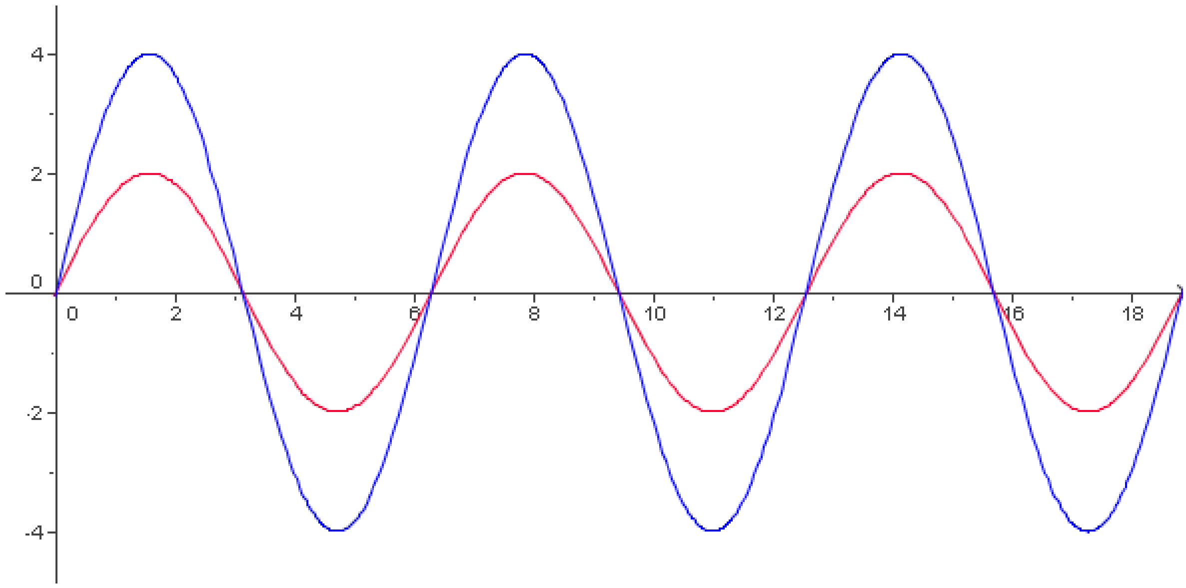
Comienzo en un extremo (en función del coseno): x = A cos$\left(\frac{2\pi}{T}t+\delta\right)$

Desfase : para t = 0, x = -4 = 4 cosδ $\Leftrightarrow$ cosδ = -1 $\Rightarrow$ δ = 180º = π rad

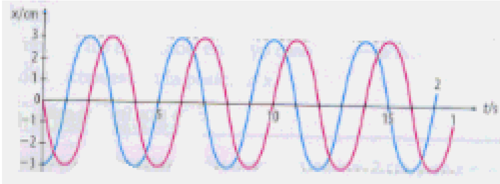
La ecuación sería: $x = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\delta\right) = 4\cos\left(\frac{2\pi}{8}t-\pi\right) = 4\cos\left(\frac{\pi}{4}t-\pi\right)$ cm

4 Representa en una misma gráfica los movimientos de dos osciladores del mismo período, uno con doble amplitud que otro, que comienzan a oscilar desde el extremo positivo.

La ecuación de uno es: x = AcosωT (roja) y el de doble amplitud x = 2Acosωt (azul) ya que el período es el mismo, sus representaciones serían:



5 ¿Qué ecuaciones representan los movimientos 1 y 2 de la figura ? ¿Cuál es el desfase, o diferencia de fase, entre ambos movimientos?



Roja

Amplitud = 3 cm.
Período = T = Intervalo temporal entre dos puntos en fase = 4 s.
Inicio = Posición de equilibrio, luego para t = 0 x = 0 hacia elongaciones negativas

Ecuación: $x = 3\cos\left(\frac{2\pi}{4}t + \frac{\pi}{2}\right)$ cm

Azul

Amplitud = 3 cm.
Período = T = Intervalo temporal entre dos puntos en fase = 4 s.
Inicio = Extremo negativo, luego para t = 0 x = -3 $\Rightarrow$ $\cos\delta = -1 \Leftrightarrow \delta = \pi$

Ecuación: $x = 3\cos\left(\frac{2\pi}{4}t + \pi\right)$ cm

Diferencia de fase = $\Delta\delta = \pi - \pi/2 = \pi/2$ de la azul respecto de la roja.

6 Un cuerpo unido a un muelle comienza a oscilar horizontalmente desde su posición extrema, a 4 cm de la posición de equilibrio, con un período de 0,3 s. Calcula:

a) Su velocidad al pasar por la posición de equilibrio.

b) Su velocidad cuando x = 2 cm.

Amplitud = A = 4 cm
Período = T = 0,3 s

a) Al pasar por la posición de equilibrio su velocidad será la máxima:

$$v = \pm\,\omega A = \pm\frac{2\pi}{T}\cdot A = \pm\frac{2\pi}{0{,}3}4 = \pm 83{,}8\ \frac{cm}{s}$$

b) Cuando x = 2cm la velocidad es: $v = -\frac{2\pi}{T}\sqrt{A^2 - x^2} = -\frac{2\pi}{0{,}3}\sqrt{4^2 - 2^2} \approx 72{,}6\ \frac{cm}{s}$

7 Determina la aceleración en los extremos, en x = 2 cm, y en x = -1 cm, de un oscilador armónico que tenga las características expuestas en la actividad anterior.

✧✧✧⌖⌖⌗⌖⌖✧✧✧

- En los extremos la aceleración es la máxima: $a = -\omega^2 A = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 A = \left(\frac{2\pi}{0{,}3}\right)^2 4 \approx -17{,}5\ \frac{m}{s^2}$
- En x = 2 cm $a = -\omega^2 x = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 x = \left(\frac{2\pi}{0{,}3}\right)^2 2 \approx -8{,}8\ \frac{m}{s^2}$
- En x = -1 cm $a = -\omega^2 x = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 x = \left(\frac{2\pi}{0{,}3}\right)^2 (-1) \approx 4{,}4\ \frac{m}{s^2}$

✧✧✧⌖⌖⌗⌖⌖✧✧✧

8 Consideremos la velocidad y la aceleración máximas de un oscilador:

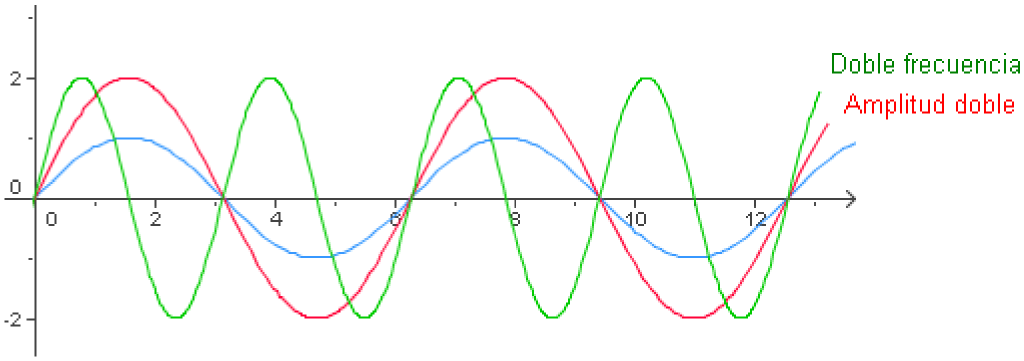
a) ¿Cómo varían si se duplica la amplitud sin modificar el período?

b) ¿Cómo varían si se duplica la frecuencia sin modificar la amplitud?

Haz las gráficas comparativas de ambos casos con la oscilación normal.

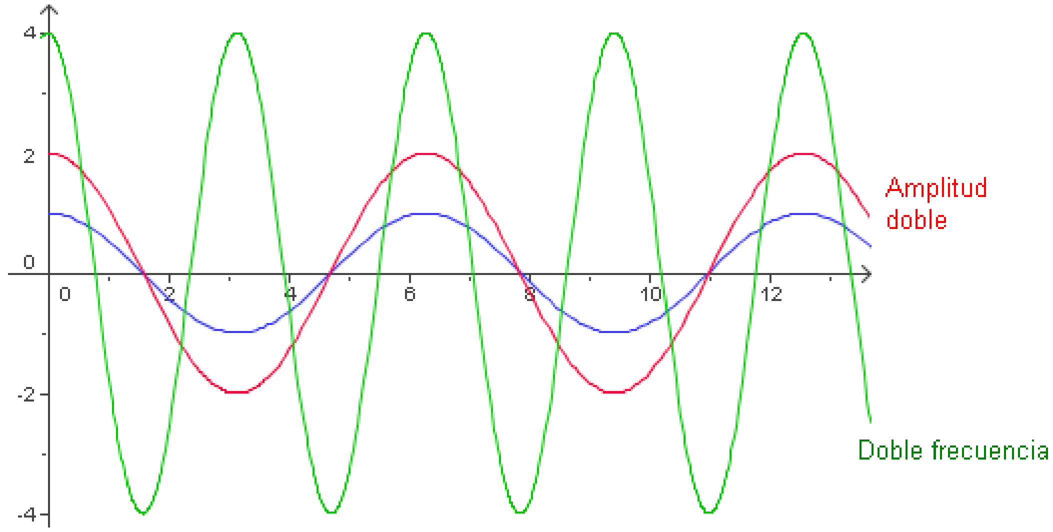
✧✧✧⌖⌖⌗⌖⌖✧✧✧

Como la velocidad máxima es $v_M = \pm\,\omega A = \pm\,2\pi f A$ la velocidad máxima se duplica tanto si se duplica la amplitud como si se duplica la frecuencia, permaneciendo constantes el resto de variables. Su representación es:



Como puede verse en el dibujo, al duplicarse la amplitud (curva roja) el máximo de la velocidad se duplica y lo mismo sucede al duplicarse la frecuencia (curva verde) aunque los máximos se alcanzan en la mitad de tiempo.

Como la aceleración máxima es $a_M = -\,\omega^2 A = -\,4\pi^2 f^2 A$ si se duplica la amplitud se duplica la aceleración (en módulo) pero si se duplica la frecuencia la aceleración máxima se cudruplica. Representación:



En la representación se puede ver como al duplicarse la amplitud (en rojo), la aceleración máxima se duplica pero si se duplica la frecuencia (en verde), además de contraerse a la mitad la aceleración máxima se cuatriplica.

✧✧✧⌖⌖⌗⌖⌖✧✧✧

9 Representa las gráficas de posición, velocidad y aceleración frente al tiempo de un cuerpo unido a un muelle que comienza a oscilar horizontalmente desde un extremo situado a 5 cm de la posición de equilibrio con una frecuencia de 5 Hz.

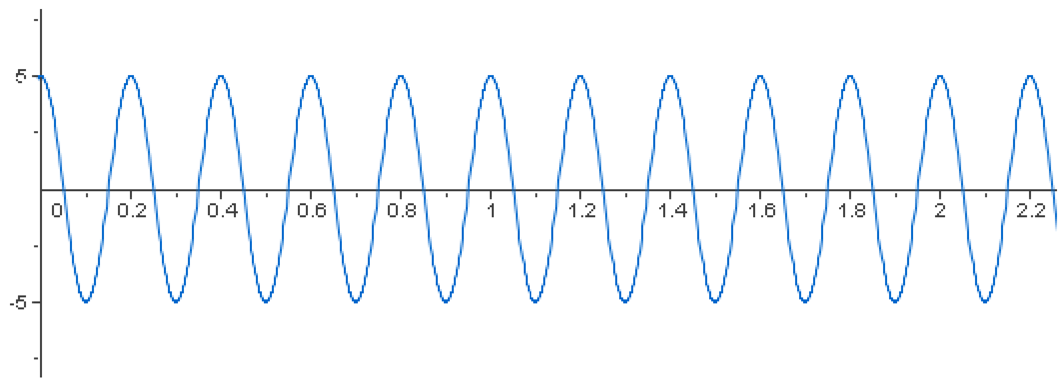
✧✧✧⌖⌖⌗⌖⌖✧✧✧

Amplitud = A = 5 cm.
Frecuencia = f = 5 Hz.
Inicio = Un extremo, δ = 0 para la ecuación en coseno.

Ecuaciones:

❂ Posición (elongación): $x\ (\text{cm}) = A\cos(\omega t + \delta) = 5\cos(2\pi\cdot 5t + 0) = 5\cos 10\pi t$

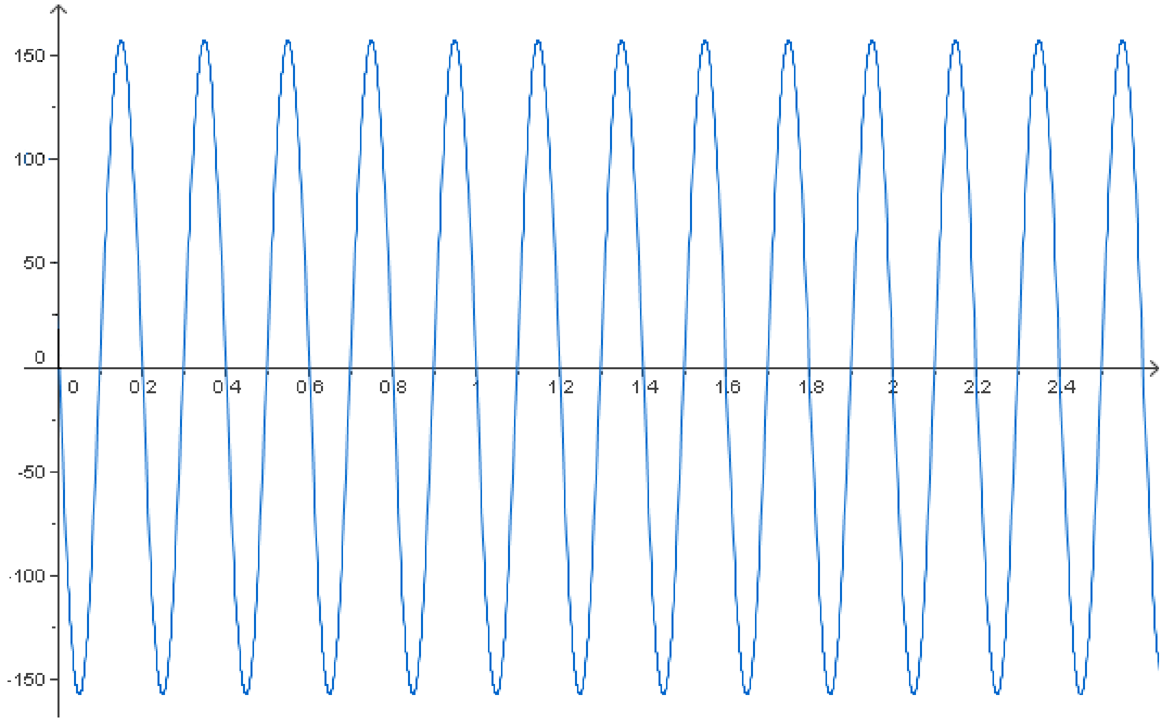
Representación:



❂ Velocidad, podemos usar la fórmula o derivar la elongación:

$$v(cm/s)=\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}(5\cos 10\pi t)=-5{\cdot}10\pi \mathrm{sen}10\pi t=-50\pi \mathrm{sen}10\pi t$$

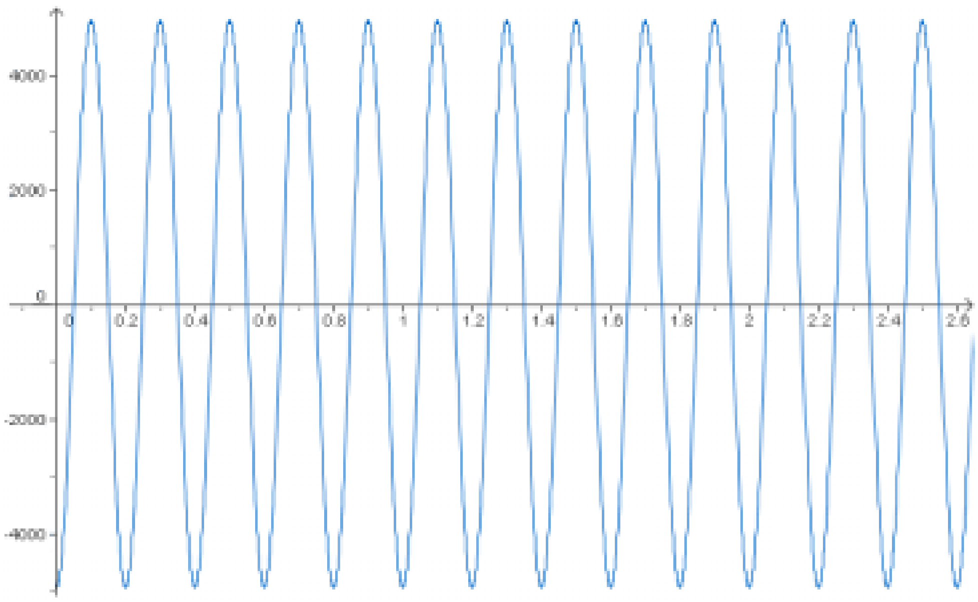
Representación:



❂ Aceleración, derivamos la velocidad:

$$a(cm/s^2)=\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}(-50\pi \mathrm{sen}10\pi t)=-50\pi{\cdot}10\pi\cos 10\pi t=-500\pi^2\cos 10\pi t$$

Representación:



✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

1 0 Demuestra cómo a partir de la igualdad 1/2 mv^2 + 1/2 kx^2 = 1/2 kA^2 puede obtenerse la expresión $v=-\omega\sqrt{A^2-x^2}$, que relaciona la velocidad con la posición del oscilador.

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

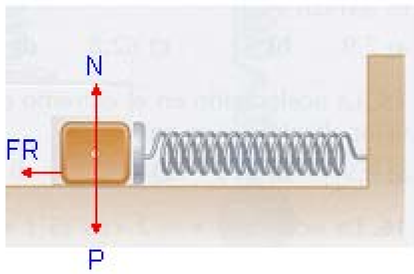
$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow v^2=\frac{k}{m}(A^2-x^2)=\frac{m\omega^2}{m}(A^2-x^2) \Leftrightarrow v=\pm\sqrt{\omega^2(A^2-x^2)}=-\omega\sqrt{(A^2-x^2)}$$

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

1 1 Un cuerpo de 5 kg choca con una velocidad de 10 m/s contra un muelle de constante elástica k = 25 N/m. El coeficiente de rozamiento entre el bloque y la superficie es de 0,2.Calcula la longitud que se comprime el muelle si consideramos la masa despreciable.

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

m = 5 kg
v = 10 m/s
k = 25 N/m
μ = 0,2



La energía cinética del cuerpo que choca se convierte en energía de compresión del muelle y energía que se pierde por las fuerzas de rozamiento:

E_c = $E_{pelástica}$ + E_{FR}, es decir $\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}kx^2+F_R\cdot x$ en donde necesitamos saber la fuerza de de rozamiento F_R = μN = μmg, luego sustituyendo en la fórmula anterior queda:

$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}kx^2+\mu mg\cdot x \rightarrow \frac{1}{2}5\cdot 10^2=\frac{1}{2}25x^2+0{,}2\cdot 5\cdot 9{,}8x \Leftrightarrow 250=12{,}5x^2+9{,}8x$, ecuación de 2º grado que resolvemos para hallar x = 4,1 m la solución positiva (una longitud negativa no tiene sentido físico), que es la longitud que se comprime el muelle.

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

1 2 Un cuerpo de 1,4 kg de masa se conecta a un muelle de constante elástica 15 N/m, y el sistema oscila tal como indica la figura. La amplitud del movimiento es de 2,0 cm. Calcula:

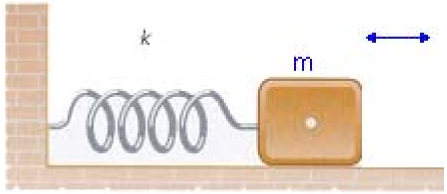
a) La energía total del sistema.

b) Las energías cinética y potencial cuando el desplazamiento del cuerpo es de 1,3 cm.

c) La velocidad máxima del cuerpo.

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

Masa = m = 1,4 kg
Constante elástica = k = 15 N/m.
Amplitud = A = 2,0 cm = 0,02 m.



a) Como no hay fuerzas de rozamiento, la energía mecánica se conserva, luego la energía total es:

$$E_T = E_{mecánica} = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}15\frac{N}{m}\cdot(0{,}02m)^2 = 0{,}003\ J.$$

b) x = 1,3 cm = 0,013 m

$$E_P = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}15\cdot 0{,}013^2 = 0{,}00127\ J$$

La energía cinética se puede calcular de do maneras:

1) Aplicando el principio de conservación de la energía: $E_T = E_M = E_P + E_c$ luego hallamos la energía cinética por diferencia: $E_c = E_T - E_P$ = 0,003 J – 0,00127 J = 0,00173 J

2) Mediante su fórmula: $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(-\omega\sqrt{A^2 - x^2}\right)^2 = \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - x^2)$ y sustituyendo $\omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow E_c = \frac{1}{2}m\frac{k}{m}(A^2 - x^2) = \frac{1}{2}k(A^2 - x^2) = \frac{1}{2}15(0{,}02^2 - 0{,}013^2) = 0{,}00173 J.$

c) $v_M = \pm\omega\ A = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot A = \pm\sqrt{\frac{15}{1{,}4}}\cdot 0{,}02 = \pm 0{,}065\ \frac{m}{s}$

✧✧✧⌖⌖⌗⌖⌖✧✧✧

13 Deduce la expresión de la aceleración en el MAS mediante la proyección de la aceleración centrípeta del MCU.

✧✧✧⌖⌖⌗⌖⌖✧✧✧

Si proyectamos la a_c sobre el eje horizontal que forma un ángulo de 180º + θ, tenemos:

$$a = a_c\cos(\theta + \pi) \overset{(1)}{=} -a_c\cos\theta \overset{(2)}{=} -\frac{v^2}{A}\cos\omega t \overset{(3)}{=} -\frac{\omega^2 A^2}{A}\cos\omega t = -\omega^2 A\cos\omega t$$

(1) ya que cos(π + α) = - cosα

(2) sustituimos la aceleración centrípeta por su fórmula $\Rightarrow a_c = \frac{v^2}{R}$ en donde el radio es la amplitud, R = A.

(3) Sustituimos la velocidad lineal en función de la angular v = ωR = ωA.

✧✧✧⌖⌖⌗⌖⌖✧✧✧

14 ¿Cómo varía el período de un péndulo al duplicar la longitud? ¿Y al disminuirla a 1/3 de su longitud original?

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

Sea T_0 el período inicial u original y l_0 su longitud.

❂ Si duplicamos su longitud $l = 2l_0$ tenemos:

$$\begin{cases} T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l_0}{g}} \\ T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}} \end{cases} \xrightarrow{\text{dividiendo}} \frac{T_0}{T} = \frac{2\pi\sqrt{\dfrac{l_0}{g}}}{2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}} = \sqrt{\frac{l_0}{l}} = \sqrt{\frac{l_0}{2l_0}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow T = \sqrt{2}T_0$$

❂ Si la longitud disminuye en 1/3, $l = l_0/3$, tenemos:

$$\begin{cases} T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l_0}{g}} \\ T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}} \end{cases} \xrightarrow{\text{dividiendo}} \frac{T_0}{T} = \frac{2\pi\sqrt{\dfrac{l_0}{g}}}{2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}} = \sqrt{\frac{l_0}{l}} = \sqrt{\frac{l_0}{\dfrac{l_0}{3}}} = \sqrt{3} \Rightarrow T = \frac{T_0}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}T_0$$

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

15 Se deja oscilar libremente un péndulo de 2 m de longitud después de haberlo desplazado 10º hacia la derecha de la vertical. ¿Cuál es la ecuación que nos da la elongación en función del tiempo? ¿Cuál es el período y la frecuencia de oscilación de dicho péndulo?

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

❂ Hallamos primero el período: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{2}{9{,}8}} = 2{,}84\,\text{s}$

❂ Su frecuencia es pues la inversa del período: $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{2{,}84} = 0{,}35\,\text{Hz}$

❂ La separación máxima de la vertical, que será la Amplitud del movimiento es:

$$\text{sen}10^\circ = \frac{A}{l} \Rightarrow A = l\,\text{sen}10^\circ = 2\,\text{sen}10^\circ = 0{,}35\,\text{m} = 35\ \text{cm}$$

❂ La ecuación de su elongación: x (cm) = $A\cos\omega t = A\cos 2\pi f t = 35\cos(2\pi\cdot 0{,}35t) = 35\cos(0{,}7\pi t)$.

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

CUESTIONES Y PROBLEMAS

De aplicación

1 ¿Qué se entiende por período y frecuencia de un movimiento oscilatorio?

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

Período (T): Tiempo que el oscilador emplea en recorrer una oscilación completa.

Frecuencia (f): Número de oscilaciones que se producen por unidad de tiempo (1 s normalmente). Es, por tanto, la inversa del período.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

2 ¿Cuándo se produce un movimiento oscilatorio?

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

Cuando se realiza un movimiento periódico (se repite cada cierto tiempo) siempre sobre la misma trayectoria.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

3 ¿Qué condiciones deben cumplirse para que un movimiento oscilatorio sea armónico simple?

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

Que el movimiento oscilatorio sea producido por una fuerza proporcional a la distancia de la posición de equilibrio.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

4 ¿Puede escribirse la ecuación de posición de un oscilador armónico indistintamente en función del seno o del coseno? ¿En qué se diferencian ambas formas? ¿Cuándo conviene usar una u otra?

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

Si se hace oscilar un péndulo o un cuerpo unido a un muelle desde su máxima elongación, debe cumplirse que $x_0 = A$ cuando $t = 0$. Por tanto, la ecuación más sencilla para representar esta situación es:

$$x = A\cos\omega t$$

ya que el cos 0 = 1.

Sin embargo, también podríamos escribirla en función del seno si introducimos una contante de fase de $\pi/2$, puesto que el cos*a* = sen *(a* + π/2). Es decir:

$$x = A\text{sen}\,(\omega t + \pi/2)$$

De ese modo, en t = 0 se obtendría que $x_0 = A\text{sen}\,\pi/2 = A$, que es la condición de partida de ese movimiento.

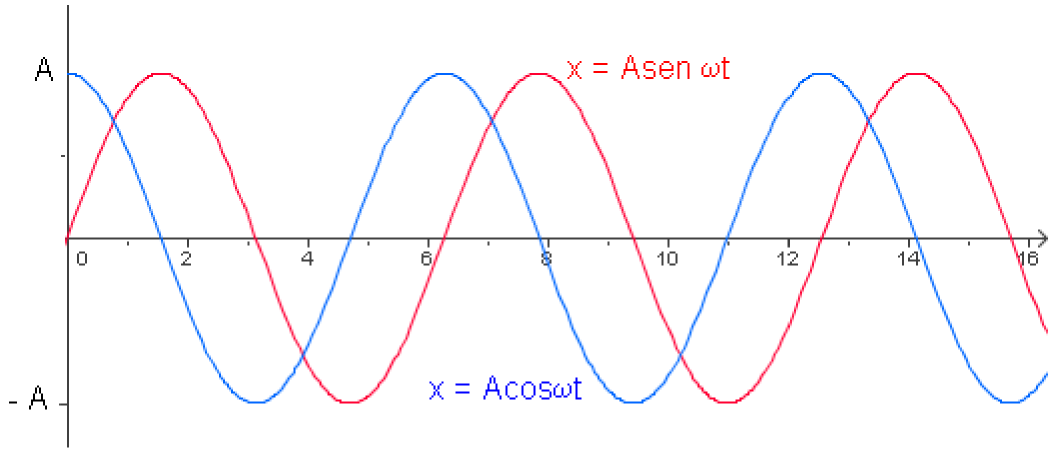
Igualmente, si la oscilación comienza desde la posición de equilibrio hacia elongaciones positivas, debe cumplirse que $x_0 = 0$ cuando $t = 0$. En este caso, la forma más sencilla de representar el movimiento es:

$$x = A\text{sen}\ \omega t$$

Pero también podría escribirse como:

$$x = A\cos\ (\omega t \pm \pi/2)$$

Aquí, el doble signo indica la posibilidad de empezar a oscilar en un sentido u otro a partir de la posición de equilibrio (negativo si lo hace hacia elongaciones positivas y positivo en caso contrario).



Así pues podemos escribir la ecuación de un movimiento armónico simple indistintamente en función del seno o del coseno introduciendo la correspondiente constante de fase.

Sin embargo, conviene tener presente:

- La ecuación suele escribirse como $x = A\cos\omega t$ cuando la oscilación comienza en un extremo.

- La ecuación suele escribirse como $x = A\text{sen}\omega t$ cuando la oscilación comienza en la posición de equilibrio.

- Si el movimiento se inicia en una posición intermedia entre la de equilibrio y un extremo, se calcularía el valor de la constante de fase δ a partir de x_0, A y ω con la función trigonométrica elegida, seno o coseno.

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

5 ¿Qué representan los distintos factores que aparecen en la ecuación del oscilador? ¿Hay alguno de ellos que dependa de las propiedades físicas del oscilador?

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

Le ecuación general de un movimiento armónico simple, en función del coseno, puede escribirse:

$$x = A\cos(\omega t + \delta)$$

En donde:

❂ x representa la posición del móvil que oscila armónicamente en función del tiempo, y se denomina **elongación**.

❂ A representa el máximo o mínimo valor posible de la elongación x, pues los valores límite del coseno son + 1 y -1. Por ese motivo, recibe el nombre de elongación máxima o, más comúnmente, **amplitud**.

❂ ω es la frecuencia angular y se relaciona con la frecuencia(f) y el período(T) de la manera que ya conocemos:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

❂ $\omega t + \delta$ se denomina fase del movimiento. Puede observarse que, al cabo de una oscilación completa, la fase aumenta en 2π radianes y la posición x vuelve a ser la misma, pues $\cos(\omega t + \delta) = \cos(\omega t + \delta + 2\pi)$.

❂ δ es la llamada constante de fase o fase inicial. Su valor se calcula de modo que, al hacer t = 0, se obtiene la posición inicial del oscilador:

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

6 ¿Qué expresión tiene la velocidad en un movimiento armónico simple? ¿Cuándo es máxima y cuándo es cero?

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

Como $x = A\cos(\omega t + \delta)$ $\Rightarrow v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(A\cos(\omega t + \delta)) = -\omega A\,\mathrm{sen}(\omega t + \delta)$ que puede escribirse también, utilizando la ecuación fundamental de la trigonometría en función de la elongación $v = -\omega\sqrt{A^2 - x^2}$.

❂ La velocidad será máxima si x = 0 (punto central o de equilibrio) y entonces $v = -\omega\sqrt{A^2} = \mp\omega A$

❂ La velocidad será nula cuando x = A ($A^2 - x^2 = 0$) en los extremos.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

7 ¿Qué expresión tiene la aceleración en un movimiento armónico simple? ¿Cuándo es máxima y cuándo es cero? ¿Qué sentido tiene en función de la posición?

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

La aceleración es la derivada de la velocidad con respecto del tiempo:

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}(-\omega A\,sen(\omega t+\delta))=-\omega^2 A\cos(\omega t+\delta)\;=-\,\omega^2 x$$

...que es proporcional a la elongación, luego :

Será máxima cuando la elongación lo sea, en los extremos, a = - ω^{2a} y mínima en el centro o punto de equilibrio en que la elongación es nula, a = 0.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

8 En un movimiento armónico simple, la posición, la velocidad y la aceleración varían periódicamente. ¿Son iguales los períodos en los tres casos?

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

Las tres magnitudes tiene la misma fase, $\omega t + \delta$, y como son función del seno y el coseno que tienen el mismo período, tendrán el mismo período T.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

9 Demuestra que la ecuación del oscilador armónico es congruente con la consideración dinámica del sistema, es decir, con el hecho de que la fuerza obedezca la ley de Hooke.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

La ley de hooke es F = - kx además F = ma y a = - $\omega^2 A\cos(\omega t + \delta)$, sustituyendo tenemos:
F = ma = -mω^2 A$\cos(\omega t + \delta)$ si mω^2 = k, nos quedaría F = - k A$\cos(\omega t + \delta)$ = - kx ya que x = A$\cos(\omega t + \delta)$, que es la expresión de la ley de Hooke.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

10 ¿Por qué decimos que la frecuencia angular del oscilador armónico es una característica de las propiedades físicas del sistema?

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

En la cuestión anterior hemos obtenido mω^2 = k, además $\omega = 2\pi f$, luego:

$$m\omega^2=m(2\pi f)^2=k\Leftrightarrow f^2=\frac{k}{(2\pi)^2 m}\Leftrightarrow f=\sqrt{\frac{k}{(2\pi)^2 m}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

expresión que nos dice que la frecuencia sólo depende de la raíz de la constante de recuperación del oscilador (k) (directamente) y de la masa del mismo (inversamente), es decir de propiedades físicas del sistema.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

1 1 ¿De qué depende el período de un oscilador armónico, de la amplitud de la oscilación?

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

Como $T = \frac{1}{f} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ sustituyendo en la expresión de la frecuencia obtenida en la cuestión anterior, luego el período depende de la masa del oscilador y de la constante recuperadora del sistema pero no de la amplitud del oscilador.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

1 2 ¿Cómo varían las energías cinética y potencial de un oscilador armónico? ¿Cuál es su valor máximo? ¿Por qué permanece constante la energía mecánica?

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

La energía potencial de un oscilador armónico varía de forma periódica entre un valor mínimo en la posición de equilibrio (Ep = 0) Y un valor máximo en los extremos (Ep = 1/2 kA^2.

Ahora bien, cuando el oscilador se deja libre en un extremo, su energía potencial comienza a decrecer a medida que se mueve hacia la posición de equilibrio, mientras que, por el contrario, su energía cinética empieza a aumentar. Dicha energía cinética viene dada por:

$$Ec = 1/2\ mv^2$$

donde m es la masa del cuerpo unido al resorte (que suponemos de masa despreciable). Teniendo en cuenta la expresión $v = -\ \omega A\text{sen}(\omega t + \delta)$, podemos estudiar cómo varía la energía cinética del oscilador:

$$Ec = 1/2\ m\omega^2 A^2\ \text{sen}^2\ (\omega t + \delta)$$

Puesto que $\omega^2 = k/m$, es posible concluir que:

$$Ec = 1/2\ kA^2\ \text{sen}^2\ (\omega t + \delta)$$

Por tanto:

La energía cinética de un oscilador armónico varía periódicamente entre un valor mínimo en los extremos (Ec = 0) Y un valor máximo en la posición de equilibrio (Ec = 1/2 kA^2.

Comparando las expresiones de la Ep y la Ec, y teniendo en cuenta que el seno vale 0 cuando el coseno vale 1, y viceversa, podemos comprobar que la energía mecánica de un oscilador armónico (Ep + Ec) permanece constante:

$$E = Ep + Ec = 1/2\ kA^2 \cos^2\ (\omega t + \delta) + 1/2\ kA^2\ \text{sen}^2\ ((\omega t + \delta)$$

Reorganizando la expresión anterior, se obtiene:

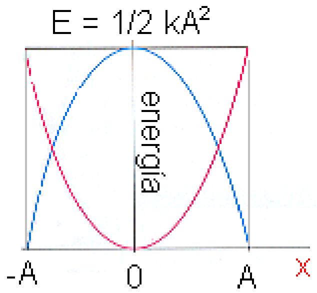
$$E = 1/2\ kA^2\ [\cos^2\ (\omega t + \delta) + \text{sen}^2\ ((\omega t + \delta)]$$

Y como:

$$\text{sen}^2\ (\omega t + \delta) + \cos^2(\omega t + \delta)) = 1$$

entonces:

La energía mecánica de un oscilador armónico permanece constante si no actúan fuerzas disipativas, y su valor es directamente proporcional al cuadrado de la amplitud:



$$E = 1/2\ kA^2$$

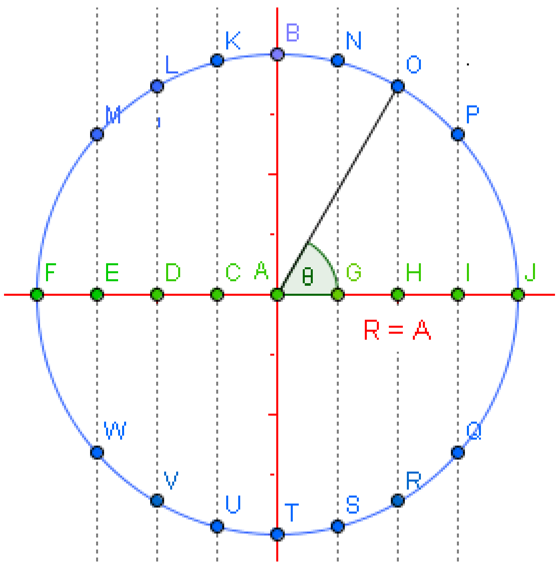
La figura muestra cómo varían conjuntamente la energía potencial y la cinética durante un tiempo t de oscilación. Puede observarse que lo hacen de forma periódica. La línea horizontal representa la energía mecánica del oscilador, que es constante y tiene como valor 1/2 kA2.

✧✧✧⌖⌖⌗⌖⌖✧✧✧

1 3 ¿Qué relación hay entre el movimiento circular uniforme y el armónico simple?

✧✧✧⌖⌖⌗⌖⌖✧✧✧

El movimiento armónico simple puede considerarse como la proyección del movimiento circular uniforme sobre uno de los ejes (el horizontal, si la posición inicial es uno de los extremos y, el eje vertical si partimos del punto de equilibrio)



Si proyectamos las posiciones del móvil en el movimiento circular (en azul) sobre el eje horizontal se obtienen las elongaciones del M.A.S. (en verde). También podemos demostrar que en su proyección se obtiene la ecuación del M.A.S.:

Tomamos, por ejemplo, el punto O, su proyección sobre el eje horizontal es H y en el triángulo rectángulo AOH se cumple:

$\cos\theta = \dfrac{\overline{AH}}{\overline{AO}} \Leftrightarrow \cos\omega t = \dfrac{x}{A} \Leftrightarrow x = A\cos\omega t$, ya que en el movimiento circular la velocidad angular:

$\omega = \dfrac{\text{ángulo}}{\text{tiempo}} = \dfrac{\theta}{t}$ es decir $\theta = \omega t$,

AH = x = elongación del M.A.S. y AO = R = A = amplitud del M.A.S.

Obtenemos pues al proyecta O sobre H la ecuación de la elongación del M.A.S.:

$$x = A\cos\omega t$$

También podríamos obtener la ecuación de la velocidad por proyección de la velocidad lineal del movimiento circular y la aceleración la hemos obtenido en la cuestión 1 3 anterior.

✧✧✧⌖⌖⌗⌖⌖✧✧✧

14 ¿Bajo qué condiciones podemos decir que un péndulo simple oscila de forma armónica? ¿Cuál es la fuerza restauradora en el caso del péndulo simple?

Si el ángulo de desplazamiento respecto de la vertical es pequeño, se puede considerar armónico simple, en el caso ideal, ya que la fuerza recuperadora F = -mg sen$\theta \approx$ - mg θ, seria proporcional al ángulo girado.

15 ¿De qué depende el período de un péndulo simple si la amplitud de la oscilación es pequeña comparada con la longitud del péndulo?

El período de un péndulo simple viene dado por $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ para pequeñas oscilaciones, luego depende de:

La longitud (l), directamente proporcional a su raíz y del valor de la gravedad en ese punto (g) de forma inversamente proporcional a su raíz.

16 ¿Qué es una oscilación forzada?

Son aquellas oscilaciones que tienen lugar bajo la acción de fuerzas periódicas externas.

17 ¿Cuándo se produce el fenómeno de resonancia en la amplitud?

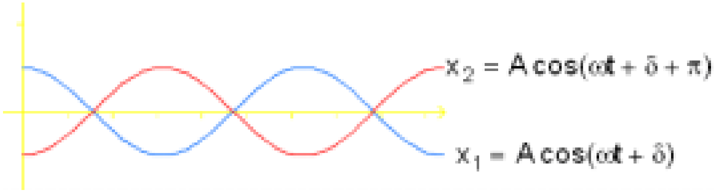
El fenómeno de la resonancia se produce cuando la frecuencia angular de la fuerza periódica externa coincide con la frecuencia natural del oscilador.

De razonamiento

18 Razona cómo son los movimientos de dos osciladores armónicos idénticos que oscilan con un desfase de π radianes. ¿En qué punto de la trayectoria se cruzan?

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

Partimos de las ecuaciones de sus elongaciones: $\begin{cases} x_1 = A\cos(\omega t + \delta) \\ x_2 = A\cos(\omega t + \delta + \pi) \end{cases}$ como $\cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha$ según la trigonometría, entonces $x_2 = A\cos[(\omega t + \delta) + \pi] = -A\cos(\omega t + \delta) = -x_1$, es decir serían opuestos como puede apreciarse en las graficas adjuntas.



✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

19 Imaginemos que tenemos un cuerpo de masa desconocida y un resorte de constante k también desconocida. ¿Cómo podríamos averiguar el período de oscilación de dicho sistema sin hacerlo oscilar?

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

Le aplicamos una fuerza F conocida, medimos su alargamiento Δl y lo de volvemos a su posición de equilibrio sin que oscile, entonces $k = \frac{F}{\Delta l}$. Después medimos su masa (m) en una balanza, por últimos calculamos su período mediante la fórmula: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

20 Razona cómo podríamos comparar masas midiendo sus frecuencias de oscilación al colgarlas de un mismo resorte.

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

Sean f_1 y f_2 las frecuencias obtenidas al colgar las masas m_1 y m_2, entonces:

$$\begin{cases} f_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m_1}{k}} \\ f_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m_2}{k}} \end{cases} \xrightarrow{\text{Dividiendo}} \frac{f_1}{f_2} = \frac{\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m_1}{k}}}{\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m_2}{k}}} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \left(\frac{f_1}{f_2}\right)^2$$

es decir la relación entre las masas es el cuadrado de la relación entre las frecuencias de oscilación.

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

2 1 La frecuencia de oscilación de cierta masa m en un resorte es el triple que la de otra masa m´¿Qué relación guardan ambas masas entre sí?

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

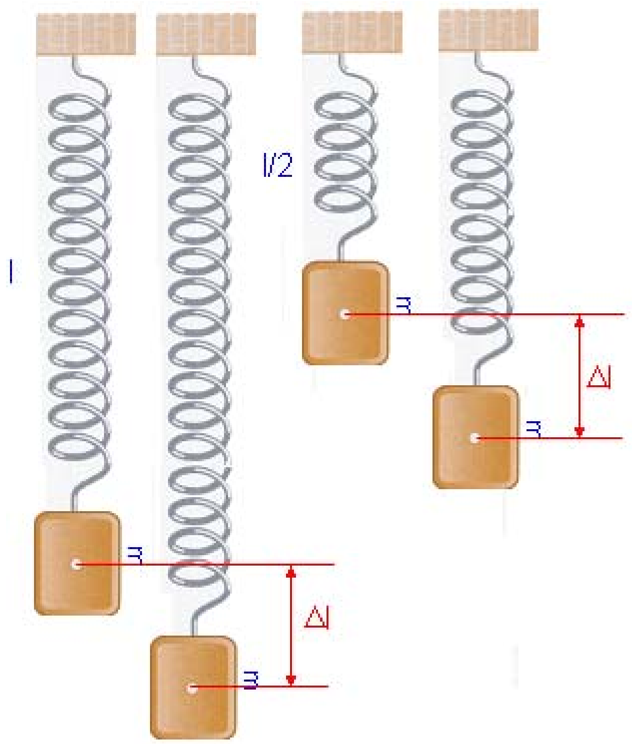
Según el enunciado f = 3f´, luego, según el ejercicio anterior:

$\frac{m}{m'} = \left(\frac{f}{f'}\right)^2 = \left(\frac{3f'}{f'}\right)^2 = 3^2 = 9 \Leftrightarrow m = 9m'$ es decir la primera masa es nueve veces la segunda.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

2 2 Un resorte del que pende una masa m tiene una constante de fuerza k. El resorte se corta por la mitad, y la masa se cuelga de una de las mitades. ¿Oscilará ahora con el mismo período que antes? Razona y demuestra tu afirmación.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧



El período de oscilación de un resorte viene dado por la fórmula: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, como la masa es la misma, el quiz de la cuestión estriba en la constante de recuperación k, ¿es la misma si el resorte mide una longitud l que si mide la mitad l/2?. La constante de recuperación (según la ley de Hooke) es el cociente $k = \frac{F}{\Delta l}$ entre la fuerza aplicada y el alargamiento producido por esa fuerza, si colgamos la misma masa la fuerza aplicada para su alargamiento será la misma (si estamos en un mismo lugar, el mismo valor de la gravedad g), su peso F = P mg, pero ¿es igual el alargamiento si la longitud del resorte es l que si es su mitad l/2?, sí, lo que no serán iguales serán las longitudes finales en sendos casos, pero lo que se alarga (diferencia entre la longitud final e inicial) sí será la misma pues sólo depende de la fuerza aplicada y de la elasticidad del resorte que son iguales (misma masa y mismo material).

Deducimos, pues que si la masa es la misma y el estiramiento (elongación) son iguales, el período de oscilación será idéntico en ambos casos.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

2 3 Dos partículas efectúan movimientos armónicos simples de la misma amplitud y período a lo largo de la misma recta. ¿Cuál es la diferencia de fase entre ellas si se cruzan cuando su elongación es la mitad de la amplitud?

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

Sean las ecuaciones de las elongaciones:

$$\begin{cases} \frac{A}{2} = A\cos(\omega t + \delta_1) \Rightarrow \cos(\omega t + \delta_1) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (\omega t + \delta_1) = \frac{\pi}{3} \\ \frac{A}{2} = A\cos(\omega t + \delta_2) \Rightarrow \cos(\omega t + \delta_2) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (\omega t + \delta_2) = \frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \Delta\delta = (\omega t + \delta_2) - (\omega t + \delta_1) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 0$$

están en fase.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

2 4 Consideremos el desplazamiento de una partícula que oscila con movimiento armónico simple entre t = 0 y un instante cualquiera t; ¿es necesariamente igual a la posición de la partícula en ese instante t?

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

Depende de lo que entendamos por desplazamiento y posición:

Si por desplazamiento entendemos el vector desplazamiento, es claro que nunca podrán ser iguales pues uno sería un vector y la posición un escalar pero si prescindimos del carácter vectorial del desplazamiento (ya que siempre será en una misma dirección) y entendemos el desplazamiento como distancia entre las posiciones inicial y final, tampoco coinciden siempre ambos conceptos ya que si la posición inicial es un extremo, el desplazamiento es nulo y la posición la máxima amplitud x = A, pero además al cabo de n oscilaciones la posición vuelve a coincidir sin embargo el desplazamiento es n veces mayor.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

2 5 Dos partículas de masas m y m´ respectivamente, efectúan oscilaciones armónicas de igual amplitud unidas a resortes de la misma constante k. Si m'> m:

a) ¿Qué partícula tiene mayor energía mecánica?

b) ¿Cuál de las dos tiene mayor energía cinética al pasar por el punto más bajo?

c) ¿Son iguales sus velocidades en el punto más bajo?

d) ¿Son iguales sus períodos de oscilación?

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

a) La fórmula de la energía mecánica es $E_M = \frac{1}{2}kA^2$ como ambas partículas tienen la misma amplitud(A) y constante recuperadora(k), la energía mecánica es la misma para ambas.

b) En el punto más bajo la velocidad es nula en ambos casos y la energía cinética nula en ambos casos.

c) Sí, sus velocidades en el punto más bajo son nulas y por tanto iguales.

d) El período viene dado por $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ como $m' > m \Rightarrow T' > T$.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

26 La longitud de un péndulo simple es el cuádruple que la de otro. Compara sus períodos de oscilación.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

Si $l_0 = 4l$

$$\left.\begin{cases} T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l_0}{g}} \\ T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \end{cases}\right. \xrightarrow{\text{dividiendo}} \frac{T_0}{T} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{l_0}{g}}}{2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}} = \sqrt{\frac{l_0}{l}} = \sqrt{\frac{4l}{l}} = \sqrt{4} = 2 \Rightarrow T_0 = 2T$$

, el período del péndulo de longitud cudrúple es el doble del otro.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

27 Imagina que te encuentras en el interior de un elevador sin referencias visuales externas. Del techo del elevador cuelga un péndulo. Determina cómo podrías saber por el movimiento del péndulo si el elevador:

a) Se acelera hacia arriba.

b) Se acelera hacia abajo.

c) Se mueve con velocidad constante.

d) Está en reposo o se mueve con velocidad constante.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

Como hemos visto ya en ejercicios anteriores el período de un péndulo viene dado por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

fórmula en la cual, en las condiciones del experimento, lo único que puede variar es la aceleración de la gravedad g:

a) Si el ascensor acelera hacia arriba, a la aceleración de la gravedad se suma la inercial del ascensor luego el péndulo se ve sometido a una aceleración mayor que parado y su período disminuye (T es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la aceleración), oscila más despacio, luego subimos.

b) Si el ascensor acelera hacía abajo la aceleración gravitatoria disminuye al restarle la inercial y el período del oscilador aumentará, oscila más deprisa luego bajamos.

c) y **d)** Si el ascensor no se mueve o lo hace con velocidad constante, el movimiento no influye en la aceleración y el péndulo no altera su período de oscilación.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

De cálculo

28 Representa en una misma gráfica los movimientos de los siguientes osciladores:

- Oscilador A: se suelta desde el extremo x = +2 cm de la posición de equilibrio, y su período es de 2 s.
- Oscilador B: idéntico al anterior, pero la oscilación parte de la posición de equilibrio hacia amplitudes positivas.

¿Qué ecuaciones representan a ambos osciladores? ¿En qué puntos se cruzan estos?

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

Amplitudes positivas para ambas.

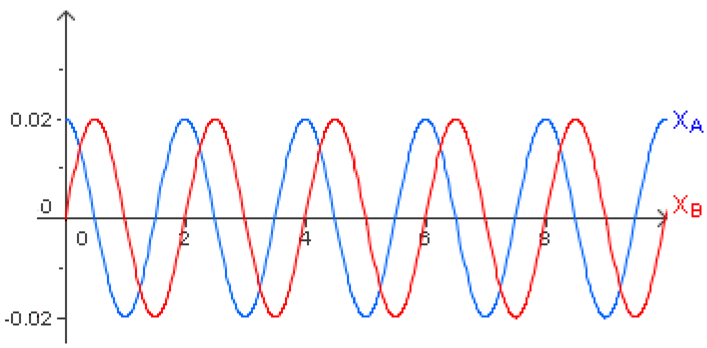
Oscilador A

$$\left.\begin{array}{r} A = 2\text{cm} = 0{,}02\text{m} \\ T = 2\,\text{s} \\ \text{Para } t = 0,\ x = A\ (\text{coseno}) \end{array}\right\} \Rightarrow x_A = A\cos\omega t = A\cos\frac{2\pi}{T}t = 0{,}02\cos\frac{2\pi}{2}t = 0{,}02\cos\pi t$$

Oscilador B

$$\left.\begin{array}{r} A = 2\text{cm} = 0{,}02\text{m} \\ T = 2\,\text{s} \\ \text{Para } t = 0,\ x = 0\ (\text{seno}) \end{array}\right\} \Rightarrow x_B = A\text{sen}\omega t = A\text{sen}\frac{2\pi}{T}t = 0{,}02\text{sen}\frac{2\pi}{2}t = 0{,}02\text{sen}\pi t$$

La representación gráfica puede verse en la figura adjunta.



Se cruzarán cuando $x_A = x_B$ es decir $0{,}02\cos\pi t = 0{,}02\text{sen}\pi t \Rightarrow \cos\pi t = \text{sen}\pi t$ que equivale a $\frac{\text{sen}\pi t}{\cos\pi t} = 1 \Leftrightarrow \text{tg}\pi t = 1 \Leftrightarrow \pi t = \frac{\pi}{4} + \pi n$

y despejando $t = \frac{1}{4} + n\,\text{s}$ que se corresponde con elongaciones $\begin{cases} x_A = 0{,}02\cos\frac{\pi}{4} = 0{,}02\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}01\sqrt{2}\text{ m} \\ x_B = 0{,}02\text{sen}\frac{\pi}{4} = 0{,}02\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}01\sqrt{2}\text{ m} \end{cases}$ y sus valores negativos.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

29 Tenemos dos osciladores armónicos cuyas ecuaciones de posición son $x_1 = A\cos(\omega t + \pi/2)$ y $x_2 = A\cos(\omega t - \pi/2)$. Determina:

a) La posición inicial.

b) El sentido en que comienzan a moverse uno y otro oscilador.

c) El punto en el que se cruzan.

d) La diferencia de fase entre los dos.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

a) Para t = 0, $\begin{cases} x_1 = A\cos\frac{\pi}{2} = 0 \\ x_2 = A\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$, ambos empiezan en la posición de equilibrio pero el primero hacia la izquierda y el segundo hacia la derecha.

b) El primero hacia la izquierda y el segundo hacia la derecha.

c) Comienzan en la posición de equilibrio y se cruzan en sucesivas posiciones de equilibrio.

d) La diferencia de fase es $\delta_1 - \delta_2 = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

30 La ecuación de posición de un oscilador es: $x = 5\cos(\pi t + \pi)$ cm Determina:

a) La frecuencia y el período de oscilación.

b) La amplitud.

c) La posición inicial de la partícula.

d) La gráfica de su movimiento en los cuatro primeros segundos.

e) La velocidad y la aceleración del oscilador en t = 5 s.

f) La velocidad y la aceleración máximas.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

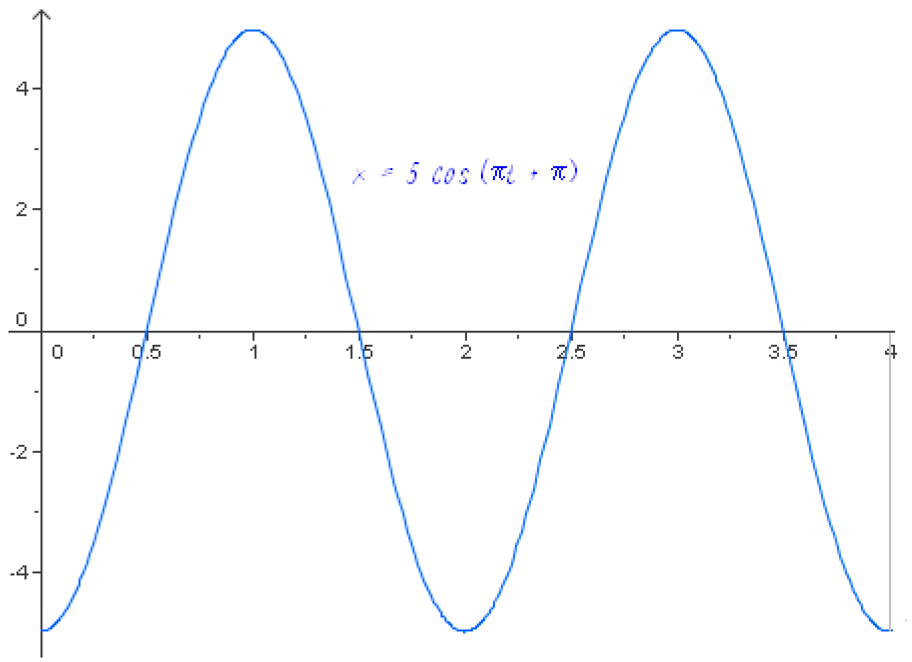
a) Si comparamos la fórmula general con la que se nos da:

$$\begin{cases} x = A\cos(\omega t + \delta) \\ x = 5\cos(\pi t + \pi) \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A = 5\ \text{cm} \\ \omega = \dfrac{2\pi}{T} = \pi \Leftrightarrow T = 2s \Rightarrow f = \dfrac{1}{T} = 0{,}5\ \text{Hz} \\ \delta = \pi\ \text{rad} \end{matrix}$$

b) A = 5 cm

c) Para t = 0 x_0 = 5cosπ = - 5 cm, en el extremo izquierdo (negativo).

d)



e) $$\begin{cases} v(t) = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{d}{dt}(5\cos(\pi t + \pi)) = -5\pi \text{sen}(\pi t + \pi) \Rightarrow v(5) = -5\pi \text{sen}(\pi 5 + \pi) = 0 \\ a(t) = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d}{dt}(-5\pi \text{sen}(\pi t + \pi)) = -5\pi^2 \cos(\pi t + \pi) \Rightarrow a(5) = -5\pi^2 \cos(\pi 5 + \pi) = -5\pi \dfrac{cm}{s^2} \end{cases}$$

f) $$\begin{cases} v_M = -5\pi \dfrac{cm}{s} \\ a_M = -5\pi^2 \dfrac{cm}{s^2} \end{cases}$$ que obtenemos haciendo sen(πt + π) = 1 y cos(πt + π) = 1

31 Una partícula oscila en el eje X con movimiento armónico simple. Si parte de la posición de equilibrio y comienza a oscilar hacia la derecha con una amplitud de 4 cm y una frecuencia de 1/3 Hz, determina:

a) La ecuación de posición escrita en función del seno y del coseno.

b) La velocidad y la aceleración cuando t = 5 s.

c) La velocidad cuando pasa por la posición x = -1 cm.

d) El desplazamiento neto y el espacio recorrido en 1 s.

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

a) $$\begin{cases} A = 4\text{cm} \\ f = \dfrac{1}{3}\text{Hz} \\ \text{Para } t = 0,\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = A\text{sen}2\pi ft \Rightarrow x = 4\text{sen}(\dfrac{2\pi}{3}t)\text{cm} \\ x = A\cos(2\pi ft - \dfrac{\pi}{2}) = 4\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}t - \dfrac{\pi}{2}\right)\text{cm} \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} v(t) = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{d}{dt}(4\text{sen}(\dfrac{2\pi}{3}t)) = \dfrac{8\pi}{3}\cos(\dfrac{2\pi}{3}t) \Rightarrow v(5) = \dfrac{8\pi}{3}\cos(\dfrac{10\pi}{3}) = -\dfrac{4\pi}{3}\dfrac{\text{cm}}{\text{s}} \\ a(t) = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{8\pi}{3}\cos(\dfrac{2\pi}{3}t)\right) = -\dfrac{16\pi^2}{9}\text{sen}(\dfrac{2\pi}{3}t) \Rightarrow a(5) = -\dfrac{16\pi^2}{9}\text{sen}(\dfrac{10\pi}{3}) = 15{,}2\dfrac{\text{cm}}{\text{s}^2} \end{cases}$$

c) Si x = -1 = $4\text{sen}(\frac{2\pi}{3}t) \Rightarrow \text{sen}(\frac{2\pi}{3}t) = -\frac{1}{4} \Rightarrow \cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right) = -\sqrt{1 - \frac{1}{16}} = -\frac{\sqrt{15}}{4}$

La velocidad será v = $\frac{8\pi}{3}\cos(\frac{2\pi}{3}t) = \frac{8\pi}{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right) = -8{,}11$ cm/s.

d) Desplazamiento = x(1) = $4\text{sen}(\frac{2\pi}{3}t) = 4\text{sen}(\frac{2\pi}{3}) = 3{,}464$ cm.

Para hallar el espacio recorrido hemos de tener en cuenta que si la frecuencia es 1/3 el período es T = 3s, luego recorre una amplitud en ¾ de segundo (una amplitud es la cuarta parte de una oscilación completa, es decir recorre una amplitud A = 4 cm el espacio recorrido en ¼ de s a partir del extremo es decir lo que le falta a la elongación x(1) para llegar a los 4 cm de amplitud 4 – 3,464 = 0,536. El espacio recorrido es, por tanto, 4 + 0,536 = 4,536 cm

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

32 Una masa de 50 g unida a un resorte horizontal de constante restauradora k = 200 N/m es soltada después de haber sido desplazada 2 cm con respecto a su posición de equilibrio.

a) Determina su período y su frecuencia de oscilación.

b) Escribe su ecuación de movimiento.

c) Calcula la velocidad máxima de su movimiento.

d) Halla la aceleración máxima en los extremos.

e) Establece la velocidad y la aceleración cuando la posición es x = 1 cm.

f) Representa con los valores correspondientes las gráficas x, v y a frente al tiempo.

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

m = 50 g = 0,05 kg.
k = 200 N/m.
A = 2 cm.

a) $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}05}{200}} = 0{,}099 \approx 0{,}1\,s \Rightarrow f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}1} = 10\,Hz$

b) Como el movimiento comienza en un extremo usamos la elongación en función del coseno:

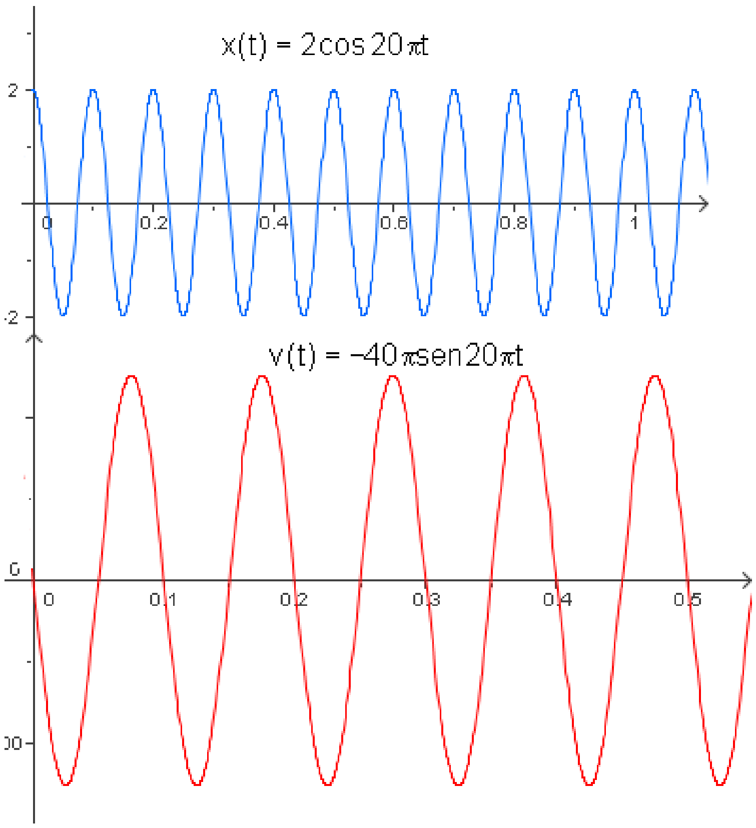
$x = A\cos(2\pi ft) = 2\cos(2\pi\cdot 10t) = 2\cos(20\pi t)$ cm.

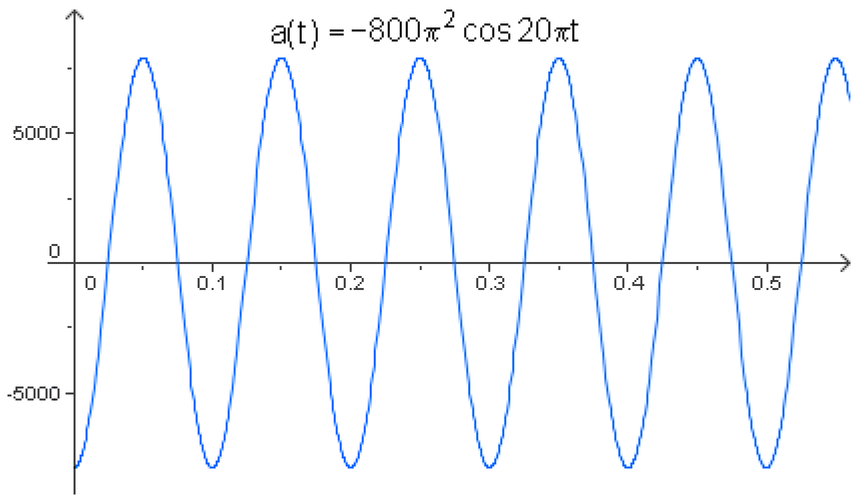
c) $v_M = -2\pi fA = -2\pi 10\cdot 2 = -40\pi$ cm/s.

d) $a_M = -(2\pi f)^2 A = -(2\pi\cdot 10)^2\cdot 2 = -7895{,}7$ cm/s^2.

e) $$\begin{cases} v = \pm 2\pi f\sqrt{A^2 - x^2} = \pm 2\pi 10\sqrt{2^2 - 1^2} \approx \pm 108{,}8\,\frac{cm}{s} \\ a = -(2\pi f)^2 x = -(2\pi 10)^2 \approx -39{,}5\,\frac{m}{s^2} \end{cases}$$

f) $$\begin{cases} x(t) = 2\cos 20\pi t \\ v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(2\cos 20\pi t) = -40\pi \text{sen} 20\pi t \\ a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(-40\pi \text{sen} 20\pi t) = -800\pi^2\cos 20\pi t \end{cases}$$ funciones que representamos:





✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

33 Una masa de 200 g colgada de un resorte de constante k = 10 N/m oscila con una amplitud de 4 cm. Calcula:

a) La velocidad y la aceleración del oscilador cuando la posición de la partícula es x = 3 cm.

b) El valor máximo de la aceleración y la velocidad.

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

m = 200 g = 0,2 kg
k = 10 N/m.
A = 4 cm = 0,04 m.

a) $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}2}{10}} = 0{,}9\ \text{s} \Rightarrow f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}9} = 1{,}13\ \text{Hz}$

$$\begin{cases} v = 2\pi f\sqrt{A^2 - x^2} = 2\pi \cdot 1{,}13\sqrt{0{,}04^2 - 0{,}03^2} \approx 0{,}188\ \frac{m}{s} \\ a = -(2\pi f)^2 x = -(2\pi \cdot 1{,}13)^2 \cdot 0{,}03 \approx -1{,}51\ \frac{m}{s^2} \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} v_{máx} = \pm 2\pi f A = \pm 2\pi \cdot 1{,}13 \cdot 0{,}04 \approx \pm 0{,}28\ \frac{m}{s} \\ a_{máx} = -(2\pi f)^2 A = -(2\pi \cdot 1{,}13)^2 \cdot 0{,}04 \approx -2\ \frac{m}{s^2} \end{cases}$$

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

3 4 Una masa de 500 g unida a un resorte oscila armónicamente con una frecuencia de 0,4 Hz. Si la energía mecánica del oscilador es de 3 J:

a) Calcula la constante k del resorte.

b) Determina la amplitud de la oscilación.

c) Representa en una misma gráfica las variaciones de la energía cinética y potencial del oscilador frente al tiempo en los cinco primeros segundos y compara dicha gráfica con la de posición.

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

m = 500 g = 0,5 kg.
f = 0,4 Hz.
E_M = 3 J.

a) Conocida la frecuencia y la masa posemos hallar la k:

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}\Rightarrow 0{,}4=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{0{,}5}}\Leftrightarrow k=0{,}5(0{,}4\cdot 2\pi)^2=3{,}16\,\frac{N}{m}$$

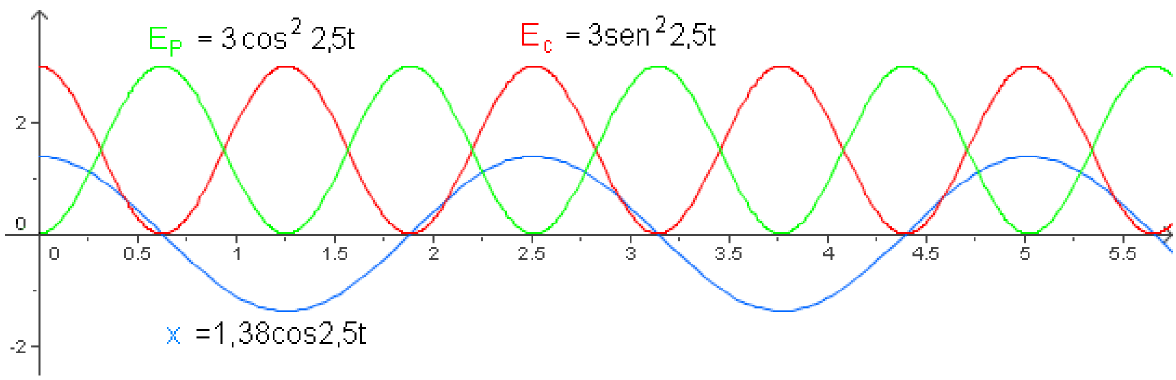
b) Ahora podemos hallar la amplitud a partir de la fórmula de la energía mecánica:

$$E_M=\frac{1}{2}kA^2\Leftrightarrow A=\sqrt{\frac{2E_M}{k}}=\sqrt{\frac{2\cdot 3}{3{,}16}}=1{,}38\text{ m.}$$

c) x = A cos(2πft) = 1,38cos(2π·0,4t)=1,38cos2,5t

$$E_P=\frac{1}{2}kA^2\cos^2 2\pi ft=\frac{1}{2}3{,}16\cdot 1{,}38^2\cos^2 2\pi\cdot 0{,}4t=3\cos^2 2{,}5t$$

$$E_c=\frac{1}{2}kA^2\text{sen}^2 2\pi ft=\frac{1}{2}3{,}16\cdot 1{,}38^2\text{sen}^2 2\pi\cdot 0{,}4t=3\text{sen}^2 2{,}5t$$



✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

3 5 Una masa de 10 g sujeta a un resorte de k = 150 N/m es liberada en x = +20 cm para que oscile. Deduce:

a) Su ecuación de posición en función del tiempo.

b) Su ecuación de velocidad en función del tiempo.

c) Su ecuación de aceleración en función del tiempo.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

m = 10 g = 0,01 kg
k = 150 N/m
x_0 = A = 20 cm.

Hallamos el período de oscilación y la frecuencia:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}01}{150}} = 0{,}051\,s \Rightarrow f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}051} = 19{,}5\,Hz$$

a) Como el movimiento empieza en un extremo usamos la ecuación en función del coseno con $\delta = 0$:

$$x(t) = A\cos(2\pi ft) = 20\cos(2\pi\cdot 19{,}5t) = 20\cos 122{,}5t\ cm$$

b) $v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(20\cos 122{,}5t) = -2450\,sen\,122{,}5t\ \frac{cm}{s}$.

$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(-2450\,sen\,122{,}5t) = -300125\cos 122{,}5t\ \frac{cm}{s^2}$.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

3 6 Si la amplitud de un cuerpo que oscila con movimiento armónico simple es A:

a) ¿En qué punto son iguales su energía cinética y su energía potencial?

b) ¿En qué punto es su energía potencial el doble que la cinética?

c) ¿En qué punto es su energía cinética el doble que la potencial?

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

Amplitud = A

a) La energía mecánica es la suma de la energía potencial y la cinética y además $E_P = E_c$:

$$E_M = E_P + E_c \Rightarrow E_M = 2E_P \Leftrightarrow \frac{1}{2}kA^2 = 2\left(\frac{1}{2}kx^2\right) \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{1}{2}A^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}A$$

b) $E_P = 2E_C$

$$E_M = E_P + E_c = E_P + \frac{1}{2}E_P \Rightarrow E_M = \frac{3}{2}E_P \Leftrightarrow \frac{1}{2}kA^2 = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{2}{3}A^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}A$$

c) $2E_P = E_C$

$$E_M = E_P + E_c = E_P + 2E_P \Rightarrow E_M = 3E_P \Leftrightarrow \frac{1}{2}kA^2 = 3\left(\frac{1}{2}kx^2\right) \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{1}{3}A^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}A$$

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

3 7 Si la amplitud de un movimiento armónico simple se duplica, calcula cuánto varía:

a) Su energía mecánica.

b) Su período.

c) Su velocidad máxima.

d) Su aceleración máxima.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

Amplitud inicial = A.
Amplitud final = doble de la inicial = 2A.

a) $$\begin{cases} E_M^0 = \frac{1}{2}kA^2 \\ E_M = \frac{1}{2}k(2A)^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{E_M^0}{E_M} = \frac{\frac{1}{2}kA^2}{\frac{1}{2}k(2A)^2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow E_M = 4E_M^0 .$$

b) Como $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, el período no depende de la Amplitud, luego $T = T_0$.

c) $$\begin{cases} v_{máx}^0 = \omega A \\ v_{máx} = \omega(2A) \end{cases} \Rightarrow \frac{v_{máx}^0}{v_{máx}} = \frac{\omega A}{2\omega A} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow v_{máx} = 2v_{máx}^0 .$$

d) $$\begin{cases} a_{máx}^0 = -\omega^2 A \\ a_{máx} = -\omega^2(2A) \end{cases} \Rightarrow \frac{a_{máx}^0}{a_{máx}} = \frac{-\omega^2 A}{-2\omega^2 A} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a_{máx} = 2a_{máx}^0 .$$

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

3 8 Un péndulo simple de 2 m de longitud tiene un período de 2,84 s para pequeñas oscilaciones:

a) Determina la intensidad del campo gravitatorio en el lugar de la medición.

b) Si la velocidad de la bolita del péndulo cuando pasa por la posición de equilibrio es de 0,4 m/s, calcula la amplitud de la oscilación.

c) Si la oscilación comienza en uno de los extremos, escribe la ecuación de posición en el eje X y represéntala gráficamente en función del tiempo.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

Longitud del péndulo = l = 2 m.
Período = T = 2,84 s.

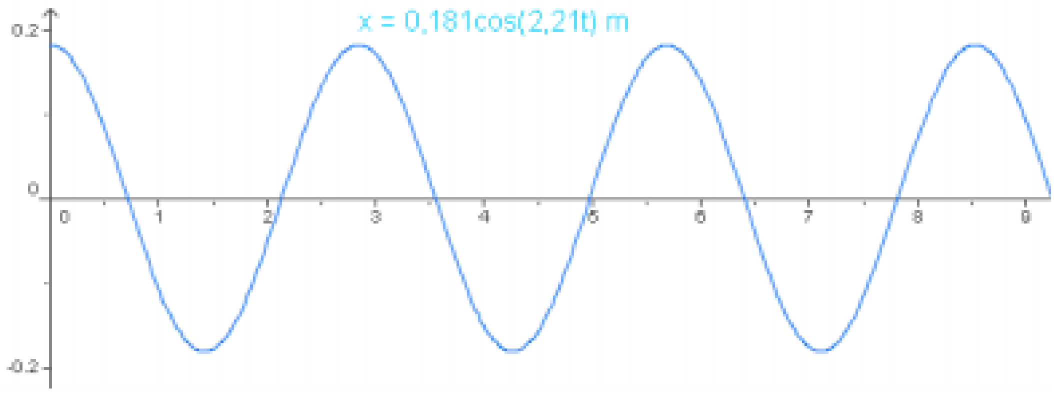
a) $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \Leftrightarrow g = l\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = 2\left(\frac{2\pi}{2,84}\right)^2 = 9,79 \text{ s}$.

b) La velocidad en el punto de equilibrio es la velocidad máxima del movimiento oscilatorio del péndulo, luego:

$$v_{máx} = \omega A \Leftrightarrow A = \frac{v_{máx}}{\omega} = \frac{0,4}{\frac{2\pi}{T}} = \frac{0,4}{\frac{2\pi}{2,84}} = 0,181\,\text{m}$$

c) Si la oscilación empieza en un extremo, la ecuación de la elongación será función del coseno y $\delta = 0$:

$$x = A\cos((2\pi/T)t) = 0,181\cos(2\pi/2,84)\cdot t = 0,181\cos(2,21t)\text{ m.}$$



✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧