A C T I V I D A D E S

1 *¿A qué distancia de un cuerpo de masa 3 - m tiene el campo gravitatorio el mismo valor que a una distancia r de un cuerpo de masa m?*

✧✧✧⌖⌖⌗⌖⌖✧✧✧

$$g_1 = g_2 \Leftrightarrow G\frac{3m}{r_1^2} = G\frac{m}{r^2} \Leftrightarrow \left(\frac{r_1}{r}\right)^2 = 3 \Leftrightarrow \left(\frac{r_1}{r}\right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow r_1 = \sqrt{3}\,r$$

✧✧✧⌖⌖⌗⌖⌖✧✧✧

2 *Si cavaras un hipotético túnel que se extendiese desde el lugar en el que te encuentras hasta los antípodas (suponiendo que la Tierra tiene densidad constante), ¿qué tipo de movimiento describiría una pelota que se dejara caer por dicho túnel? Explícalo con todo detalle.*

✧✧✧⌖⌖⌗⌖⌖✧✧✧

La variación del campo gravitatorio en el interior de la Tierra varía linealmente con la profundidad r, según la fórmula:

$$\vec{g} = -G\frac{M_T}{R_T^3} r\,\vec{u}_r$$

Luego la fuerza a que se verá sometido un cuerpo de masa m será:

$$\vec{F} = m\cdot\vec{g} = m\left(-G\frac{M_T}{R_T^3} r\,\vec{u}_r\right) = -mG\frac{M_T}{R_T^3} r\,\vec{u}_r = -Kr\,\vec{u}_r$$

siendo máxima en los extremos(a la entrada y salida del hipotético túnel) y nula en el centro luego es una fuerza del tipo F = .-kx de la ley de Hooke que produce un **movimiento vibratorio armónico simple (m.a.s.),** las aceleraciones y elongaciones (profundidades) máximas en los extremos y velocidades nulas y nulas en el centro (velocidad máxima) es decir el cuerpo describiría un movimiento de vaivén desde un punto de la corteza terrestre hasta su antípoda sin poder escapar del túnel y siempre sometido a una fuerza proporcional (y de sentido contrario) a su profundidad (elongación) con velocidades máximas en centro y nulas en los extremos.

✧✧✧⌖⌖⌗⌖⌖✧✧✧

3 *Si la Tierra fuese una corteza esférica y se practicase en ella un orificio, ¿qué movimiento describiría una pelota que fuera lanzada al interior de dicho orificio?*

✧✧✧⌖⌖⌗⌖⌖✧✧✧

Como el campo gravitatorio en el interior de una corteza esférica es nulo, la pelota no se movería de la superficie manteniéndose flotando sobre el orificio.

✧✧✧⌖⌖⌗⌖⌖✧✧✧

4 *Haz una estimación del valor de g en la cima del Everest, teniendo en cuenta el valor de 9,8 m/s² al nivel del mar. ¿Crees que es correcto utilizar 9,8 m/s² como valor general para toda la superficie terrestre?*

Dato: altura del Everest = 8,9 km.

✧✧✧⌖⌖⌗⌖⌖✧✧✧

$$g' = g_0\left(1 - \frac{2h}{r_T}\right) = 9{,}8\left(1 - \frac{8{,}9\ \text{km}}{6370\ \text{km}}\right) = 9{,}7863\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$\varepsilon_r = \dfrac{|\,9{,}8 - 9{,}7863\,|}{9{,}8}\cdot 100 = 0{,}14\ \%$ de error relativo cometemos en el punto más alto de la Tierra, luego el usar 9,8 m/s^2 para toda la Tierra es correcto.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

5 *Considerando que en la superficie de Marte g es 3,72 m/s², calcula cuál sería el valor de la gravedad en la cima del monte Olimpo, que, con sus 25 km de altura, es el monte conocido más alto del sistema solar.*

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

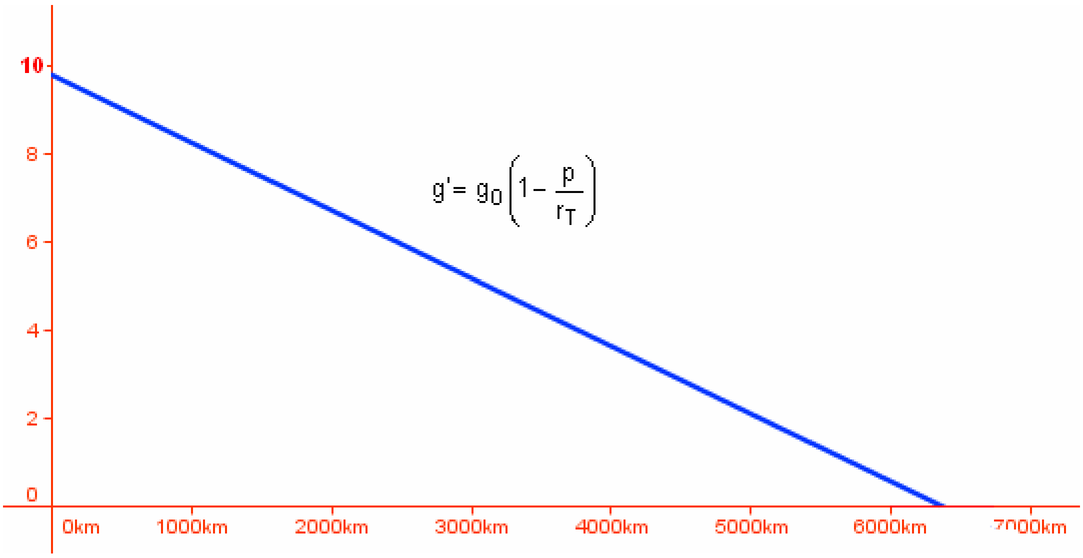
$$g' = g_0\left(1 - \frac{2h}{r_T}\right) = 3{,}72\left(1 - \frac{25\ \text{km}}{3{,}38\cdot 10^3\ \text{km}}\right) = 3{,}692\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

6 *Dibuja una gráfica de las variaciones de la aceleración de la gravedad, g, en función de la distancia r al centro de la Tierra. ¿A qué profundidad, x, por debajo de la superficie terrestre hay que descender para que un cuerpo pese lo mismo que a una altura h sobre la misma?*

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

Como $g' = g_0\left(1 - \frac{p}{r_T}\right)$ siendo p = profundidad medida a partir de la superficie, la representación sería:

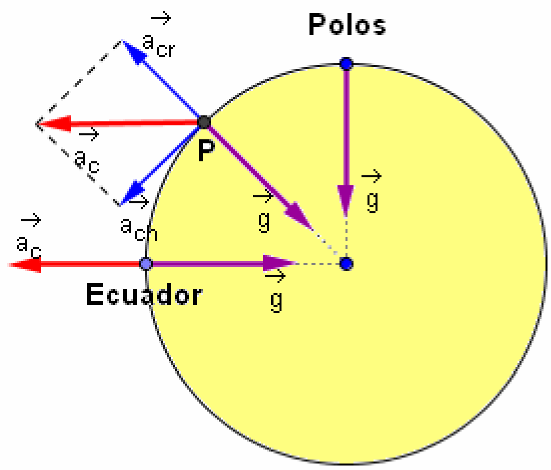


✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

7 *¿Por qué produce la rotación terrestre un abultamiento ecuatorial y un achatamiento por los polos en nuestro planeta?*

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

Como la Tierra gira en torno a su eje la componente radial de la aceleración centrífuga se opone a la atracción gravitatoria de manera que, cuando la Tierra era líquida tendía a expandirse en la dirección radial pero no en los polos que es por donde pasa el eje de giro y al no girar, están sometidos sólo a la atracción gravitatoria. Como esa componente radial de la aceleración centrífuga depende de la latitud φ según $a_{cr} = \omega^2 r_T \cos^2 \varphi$ será mayor a mayor latitud abultamiento y nula en latitud cero (polos) lo que explica en achatamiento.

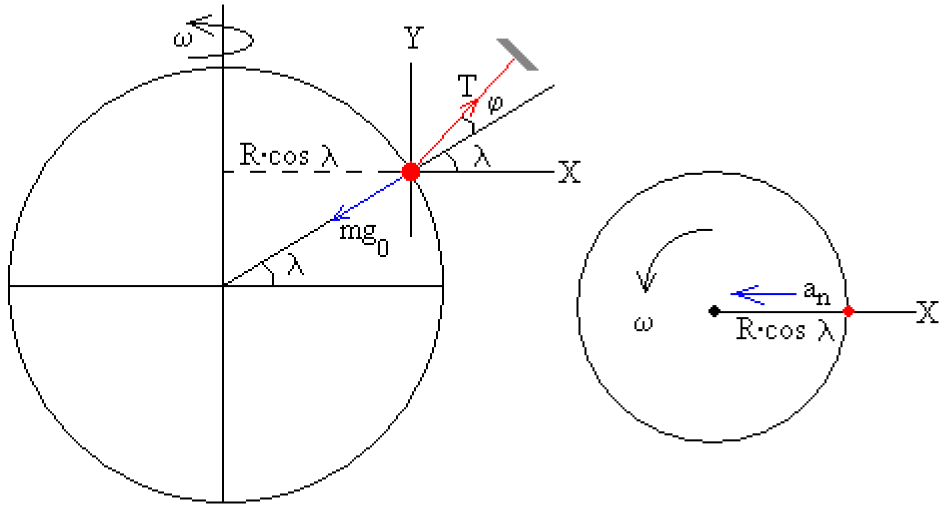


✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

8 ***Determina qué ángulo separa la vertical de la dirección radial en una latitud de 40°.***

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

Supongamos una masa puntual *m* que cuelga de una cuerda, situada en un lugar del hemisferio norte cuya latitud es *λ*. La Tierra gira sobre su eje con velocidad angular constante *ω*. La partícula describe una circunferencia de radio *R*·cos *λ*, siendo *R* el radio de la Tierra para un **observador inercial**



La resultante de las fuerzas que actúan sobre la partícula deberá se igual al producto de la masa por la aceleración normal $a_n=\omega^2 R\cdot\cos\lambda$, y estará dirigida hacia el centro de la circunferencia que describe la partícula.

Las fuerzas que actúan sobre la partícula son:

- La fuerza de atracción de la Tierra, que tiene dirección radial y está dirigida hacia su centro, y cuyo módulo es

$$F_g = G\frac{mM}{R^2}$$

- La tensión *T* de la cuerda que sujeta a la partícula, y que forma un ángulo *φ* con la dirección radial, tal como se aprecia en la figura.

La partícula está en equilibrio a lo largo del eje Y.

$T\cdot\text{sen}(\lambda+\varphi)-mg_0\cdot\text{sen}\lambda=0$
La partícula tiene una aceleración a_n a lo largo del eje X.
$T\cos(\lambda+\varphi)- mg_0\cdot\cos\lambda=-m\omega^2R\cdot\cos\lambda$

Eliminando *T* en el sistema de dos ecuaciones, obtenemos

$$\text{tam}(\lambda+\varphi)=\frac{\tan\lambda}{1-\alpha}\ \text{ en donde }\ \alpha=\frac{R\omega^2}{g_0}=3{,}45\cdot10^{-3}\ \ (1)$$

donde hemos tomado $R = 6.37\cdot10^6$ m, $\omega = 2\pi/(23.93\cdot60\cdot60)$ rad/s, y $g_0=9.81$ m/s^2

Después de algunas operaciones trigonométricas, despejamos el ángulo φ que forma la plomada con la dirección radial

$$\tan\varphi=\frac{\alpha\tan\lambda}{1-\alpha+\tan^2\lambda}$$

Como α es pequeño frente a la unidad, y el ángulo φ es pequeño podemos escribir

$$\tan\varphi\approx\frac{\alpha}{2}\text{sen}2\lambda$$

A la latitud correspondiente a $\lambda=40°$, tenemos que tg φ = $\frac{\alpha}{2}\text{sen}2\lambda=\frac{3{,}45\cdot10^{-3}}{2}\text{sen}80°\Leftrightarrow\varphi=0{,}097°$.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

9 ***¿Cuánto trabajo se realiza al desplazar una masa de 1 000 kg desde la superficie terrestre hasta una distancia igual a tres veces el radio de la Tierra?***

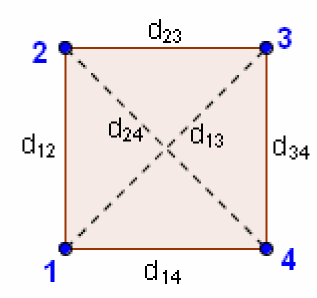
✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

Distancia = d = 3R

$$W=G\cdot M_T\cdot m\cdot\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{R}\right)=G\cdot M_T\cdot m\cdot\left(\frac{1}{3R}-\frac{1}{R}\right)=-\frac{2G\cdot M_T\cdot m}{3R}=-\frac{2\cdot6{,}67\cdot10^{-11}\cdot6\cdot10^{24}\cdot1000}{3\cdot6{,}37\cdot10^6}=-4{,}19\cdot10^9\text{ J}$$

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

10 ***Un sistema consta de cuatro partículas de 10 g situadas en los vértices de un cuadrado de 20 cm de lado. ¿Cuál es la energía potencial del sistema?***



✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

$d_{12} = d_{14} = d_{23} = d_{34} = 0{,}20$ m

$d_{13} = d_{24} = \sqrt{d_{12}^2+d_{14}^2}=\sqrt{2l^2}=l\sqrt{2}=0{,}20\sqrt{2}$ m

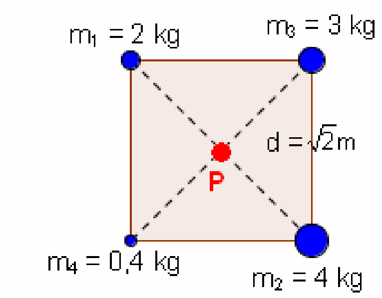
$$Ep = Ep_{12} + Ep_{13} + Ep_{14} + Ep_{23} + Ep_{24} + Ep_{34} = -G\left(\frac{m_1m_2}{r_{12}}+\frac{m_1m_3}{r_{13}}+\frac{m_1m_4}{r_{14}}+\frac{m_2m_3}{r_{23}}+\frac{m_2m_4}{r_{24}}+\frac{m_3m_4}{r_{34}}\right)=$$

$$=-Gm^2\left(\frac{4}{l}+\frac{2}{l\sqrt{2}}\right)=-6{,}67\cdot10^{-11}\cdot10^{-2}\left(\frac{4}{0{,}20}+\frac{2}{0{,}20\sqrt{2}}\right)=-1{,}83\cdot10^{-11}\text{ J.}$$

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

11 *Cuatro masas de 2, 4, 3 y 0,4 kg, respectivamente, se encuentran en los vértices de un cuadrado de 2 m de lado. ¿Cuánto vale el potencial en el centro del cuadrado? ¿Qué energía potencial adquirirá una masa de 10 kg colocada en dicho punto?*

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧



m_1 = 2 kg ; m_2 = 4 kg; m_3 = 3 kg ; m_4 = 0,4 kg;

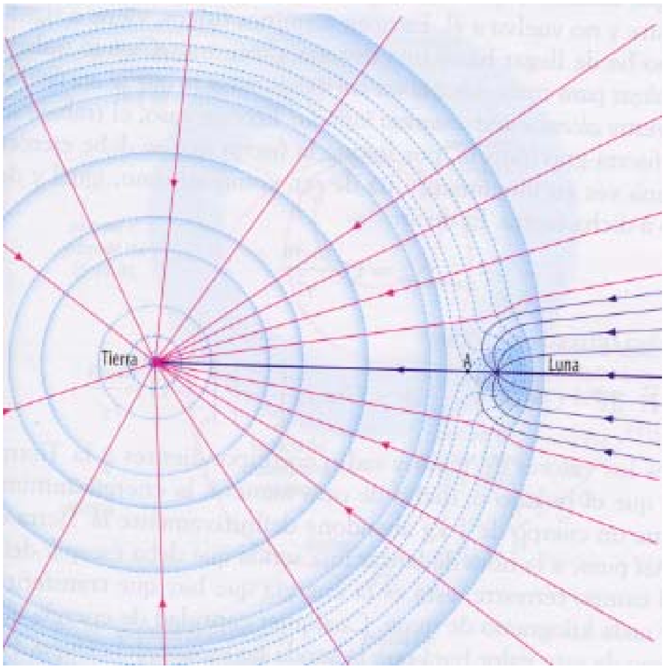
$$d = \frac{\text{diagonal}}{2} = \frac{L\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2}m = \sqrt{2}m$$

$$V = -G\left(\frac{m_1}{d} + \frac{m_2}{d} + \frac{m_3}{d} + \frac{m_4}{d}\right) = -\frac{G}{d}(m_1 + m_2 + m_3 + m_4) = -\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}}{\sqrt{2}}(2 + 4 + 3 + 0{,}4) = -4{,}43\cdot 10^{-10}\text{ J/kg.}$$

$$Ep = V\cdot m = -4{,}43\cdot 10^{-10}\text{ J/kg}\cdot 10\text{ kg} = -4{,}43\cdot 10^{-9}\text{ J.}$$

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

12 *¿Qué valor tiene el campo gravitatorio en el punto A de la figura ? Razona tu respuesta.*



✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

x = distancia del punto A a la Tierra
d = distancia Tierra Luna

El valor del campo será (en módulo) la diferencia de los valores del de la Tierra menos el de la Luna en ese punto A:

$$g = g_T - g_L = G\frac{M_T}{x^2} - G\frac{M_L}{(d-x)^2}$$

Habrá punto intermedio (puede ser A ya que es el único punto en que se cortan las líneas equipotenciales) en el cual ambos campos tengan el mismo módulo y, como tienen la misma dirección pero distinto sentido, la resultante será nula.

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

13 *¿Cuánto vale la velocidad de escape del Sol a una distancia igual al radio orbital terrestre? ¿Qué te sugiere el resultado?*

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

$$v = \sqrt{\frac{2Gm_{Sol}}{(R_{Sol} + d_{TSol})}} = \sqrt{\frac{2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 2{,}0\cdot 10^{30}}{(6{,}96\cdot 10^{8} + 1{,}496\cdot 10^{11})}} = 42133\,\frac{m}{s}$$

Que se necesitaría una gran energía para que la Tierra pudiese escapar a la atracción solar.

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

CUESTIONES Y PROBLEMAS

De aplicación

1 *¿Qué importante diferencia se establece a partir de los trabajos de Maxwell en el tratamiento de la interacción a larga distancia y que marca una significativa diferencia entre el concepto de campo y el de acción a distancia?*

La desviación fundamental de Maxwell respecto a Faraday era su concepto de materia y campo como entes totalmente diferentes. El campo producido por la materia interactúa con otro sin necesidad de contacto físico a través de las líneas de fuerza del campo, cuando un objeto se coloca en la zona de influencia del campo, se ve sometido a una fuerza.

2 *¿Qué se entiende por campo gravitatorio?*

Campo gravitatorio es la zona del espacio en donde una masa ejerce su influencia, viene definido por su vector intensidad gravitatoria $\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = -G\frac{m}{r^2}\vec{u}_r$.

Si se dispone en cierta región del espacio una masa M, el espacio alrededor de M adquiere ciertas características que no disponía cuando no estaba M. Este hecho se puede comprobar acercando otra masa m y constatando que se produce la interacción. A la situación física que produce la masa M se la denomina campo gravitatorio. Afirmar que existe algo alrededor de M es puramente especulativo, ya que sólo se nota el campo cuando se coloca la otra masa m, a la que se llama masa testigo.

3 *¿Qué magnitudes se utilizan como inherentes o propias del campo gravitatorio? ¿Y cuáles se usan para describir la interacción del campo con una partícula testigo?*

Inherentes del campo:

- **Intensidad** del campo en un punto $\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = -G\frac{m}{r^2}\vec{u}_r$.
- **Potencial** del campo en un punto $V = \frac{Ep}{m'} = -G\frac{m}{r}$

Inherentes a la interacción del campo con una partícula:

- **Fuerza** que actúa sobre la partícula : $\vec{F} = -G\frac{m{\cdot}m'}{r^2}\vec{u}_r$
- **Energía potencial** de la partícula asociada a su posición relativa en el campo: $Ep_r = -G\frac{m{\cdot}m'}{r}$.

4 *¿Cuál es la expresión para la intensidad del campo debido a una masa puntual en un punto P distante?*

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

Intensidad del campo en un punto $\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = -G\frac{m}{r^2}\vec{u}_r$.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

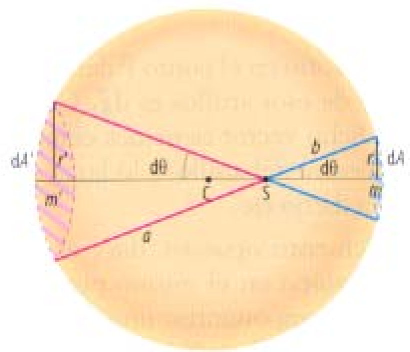
5 *¿Cómo es el campo gravitatorio debido a una corteza esférica en un punto exterior? ¿Y en uno interior? ¿Podrías demostrar tu respuesta a esta última cuestión desde un punto de vista cualitativo?*

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

En el exterior el campo gravitatorio viene dado por $\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = -G\frac{m}{r^2}\vec{u}_r$ como si la esfera fuese sólida.

En el interior el campo es nulo:

Consideremos ahora un punto S localizado en el interior de la esfera. Para facilitar la comprensión del análisis cualitativo, supongamos que S está situado en un diámetro de la esfera, de modo que la distancia a hasta un extremo de la esfera sea el doble que la distancia b al otro extremo.



Hagamos a continuación el siguiente planteamiento: podemos calcular las contribuciones al campo producidas en S por un elemento de área dA subtendido bajo un ángulo dθ y el correspondiente elemento del lado opuesto de la corteza, subtendido bajo el mismo ángulo, de área dA'. Observando la figura, vemos que:

$dA = -\pi r^2 = \pi\,(b \text{ sen } d\theta)^2$

$dA' = -\pi r'^2 = \pi\,(a \text{ sen } d\theta)^2 = \pi\,(2b \text{ sen } d\theta\,)^2 = 4\,dA$

Si la corteza tiene la masa distribuida uniformemente, entonces la masa correspondiente a dA' será también cuatro veces mayor que la del área dA. Es decir:

$$m' = 4 \cdot m$$

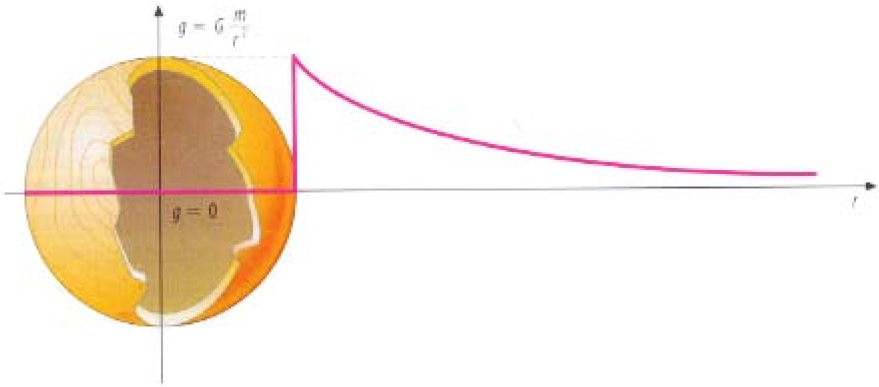
Por tanto, y considerando que los campos originados por m' y m tienen sentidos opuestos, tenemos que el campo total originado por ambos elementos en el punto S es:

$$g = G\frac{m'}{a^2} - G\frac{m}{b^2} = G\left(\frac{4m}{(2b)^2} - \frac{m}{b^2}\right) = G\left(\frac{m}{b^2} - \frac{m}{b^2}\right) = 0$$

Al extender este mismo análisis a toda la esfera, se obtiene un importante resultado:

El campo neto en el interior de una corteza esférica es nulo.

Observa en la figura siguiente la variación del campo gravitatorio en el interior (g = 0) y en el exterior de la corteza esférica. En el exterior se aprecia una variación conforme al inverso del cuadrado de la distancia idéntica a la que seguiría el campo si la masa estuviera concentrada en el centro.



✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

6 *¿Bajo qué aproximaciones equivale el campo creado por una esfera sólida en un punto exterior de esta al de esa misma masa considerada puntual y concentrada en el centro de la esfera?*

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

Ha de ser homogénea es decir si su densidad es uniforme o sí la densidad varía con la distancia al centro de manera uniforme (aunque sea inversa).

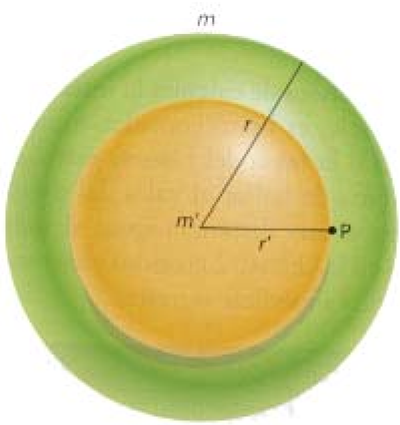
✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

7 *¿De qué forma varía el campo en el interior de una esfera sólida? ¿Bajo qué suposiciones?*

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

El cálculo del campo en el interior de una esfera sólida puede ser muy complejo, salvo que consideremos que esta tiene una densidad uniforme o, cuando menos, dependiente de la distancia al centro.

Imaginemos una esfera sólida homogénea de masa m y densidad constante ρ. Si el volumen de una esfera de radio r es 4/3 •πr3, tendremos que:



$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi r^3}$$

Deseamos ahora hallar el campo en un punto interior P que se encuentra a una distancia r' del centro. Para ello, haremos la siguiente consideración: dado que el campo en el interior de una corteza esférica es nulo, podemos suponer que la corteza externa al punto P (en verde en la figura) no contribuye al valor del campo sobre ese punto. En consecuencia, es lícito considerar que el campo en el punto P es el creado por la masa m' encerrada en el volumen limitado por r'. El valor de dicha masa es:

$$m' = \rho V' = \rho 4/3 \cdot \pi r'^3$$

Y, dado el valor de densidad obtenido para la esfera completa, tenemos:

$$m' = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi r^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r'^3 = m\frac{r'^3}{r^3}$$

En consecuencia, el vector g en un punto del interior será:

$$\vec{g} = -G\frac{m'}{r'^2}\vec{u}_r = -G\frac{mr'^3/r^3}{r'^2}\vec{u}_r$$

de donde se obtiene:

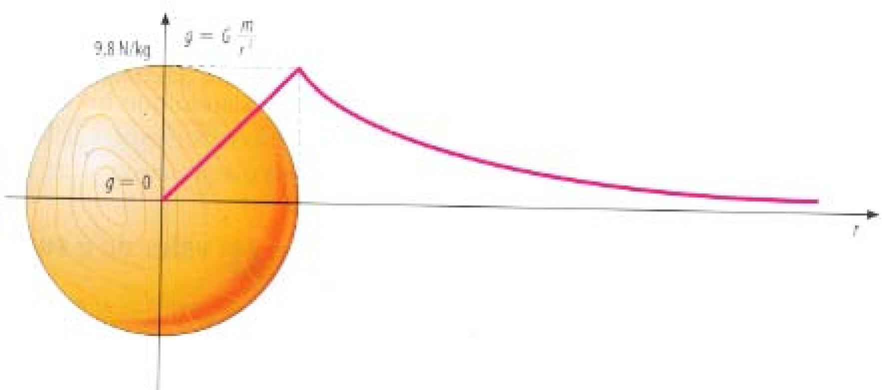
$$\vec{g} = -G\frac{m}{r^3} \cdot r'\vec{u}_r$$

Esta expresión nos permite extraer unas conclusiones muy interesantes:

◈**El campo en el centro (r' = 0) de una esfera sólida homogénea es nulo**.

◈ **El valor del campo en el interior de una esfera sólida homogénea aumenta linealmente conforme a r'**.

Observa en la figura siguiente la variación del valor del campo gravitatorio terrestre en el interior y en el exterior de la Tierra, considerada como una esfera sólida. El valor, partiendo de cero en el centro de la esfera, aumenta hasta 9,8 en la superficie, desde donde va disminuyendo conforme al inverso del cuadrado de la distancia hasta hacerse cero de nuevo en el infinito.



✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

8 *¿Cómo se modifica la aceleración gravitatoria efectiva en la superficie en función de la altitud? ¿Y en función de la latitud?*

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

Si h = altitud: $g_h = g_0\left(1 - \frac{2h}{r_T}\right)$

Si la latitud es φ: $g_{latitud} = g_0 - \omega^2 \cdot r_T \cdot \cos^2\varphi$

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

9 *¿En qué condiciones es lícito utilizar el término mgh, en el que g es constante?*

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

La energía potencial de una masa m a nivel del suelo es $Ep = -G\frac{m_T m}{r_T}$.

La energía potencial de esa masa m a una altura h es: $Ep_h = -G\frac{m_T m}{r_T + h}$.

Luego la diferencia de energía potencial de un cuerpo de masa m al caer desde una altura h es:

$$\Delta Ep = Ep_h - Ep = -G\frac{m_T m}{r_T + h} - \left(-G\frac{m_T m}{r_T}\right) = Gm_T m\left(\frac{1}{r_T} - \frac{1}{r_T + h}\right) = Gm_T m\left(\frac{h}{r_T^2 + r_T h}\right)$$

Si h << r_T podemos despreciar el producto $r_T h$ frente a r_T^2 con lo que queda:

$$\Delta Ep = Gm_T m\left(\frac{h}{r_T^2}\right) = m\cdot G\frac{m_T}{r_T^2}\cdot h = mgh$$

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

10 *¿Qué significado físico tiene hablar de energía potencial de un conjunto de partículas?*

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

El trabajo que habría que hacer para separar el sistema de partícula de manera que la distancia entre ellas fuese infinita.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

11 *¿Cuál es el significado físico de la energía de amarre o de ligadura?*

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

El la energía mínima que ha de tener un cuerpo para poder escapar a la atracción gravitatoria de otro, por debajo de este valor queda amarrado ligado al segundo cuerpo.

Para que una nave espacial pueda escapar a la atracción gravitatoria de la Tierra ha de comunicársele una energía superior a la de amarre o ligadura.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

12 *¿Qué le ocurriría a un cuerpo lanzado desde la Tierra a una velocidad de 11,2 km/s si tenemos presente su situación en el sistema solar?*

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

Como este valor 11,2 km/s es la velocidad de escape de un cuerpo de la atracción gravitatoria de la Tierra, si lanzamos un cuerpo con esa velocidad escapará del campo gravitatorio terrestre.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

De razonamiento

13 *Dos cortezas esféricas de distinto radio tienen la misma masa. ¿Son iguales los valores del campo que originan en un punto situado a la misma distancia de sus respectivos centros?*

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

Punto situado en el interior

Los campos son iguales para ambas cortezas ya que en los dos casos es nulo.

Punto situado en el exterior

Los valores sería idénticos pues el campo es idéntico al que tendría si toda su masa estuviera concentrada en el centro, como la masa es la misma y la distancia también el campo también lo sería.

El campo en el exterior es (en módulo) $g = G\frac{m}{d^2}$ si la masa (m) y la distancia al centro (d) son iguales la gravedad sería la misma.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

***14** Dos cortezas esféricas de la misma densidad tienen distinto radio. ¿Son iguales los valores del campo que originan en un punto equidistante de sus respectivos centros?*

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

Punto situado en el interior

Los campos son iguales para ambas cortezas ya que en los dos casos es nulo.

Punto situado en el exterior

Si los radios son iguales pero las densidades (ρ) son distintas las masa (m) también los será ya que el volumen (V) es el mismo pero no la densidad:

$$\rho = \frac{m}{V} \Leftrightarrow m = \rho \cdot V$$

Si las masas son distintas el campo gravitatorio a una misma distancia será diferente ya que $g = G\frac{m}{d^2}$ y si $m_1 \neq m_2 \Rightarrow g_1 \neq g_2$.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

***15** En los textos de física se afirma que la diferencia más importante de la interacción gravitatoria con respecto a las demás es que «no existen barreras antigravitatorias». Sin embargo, dado que el campo neto en el interior de una corteza esférica es nulo, ¿podría suponerse que dicha corteza constituye una «jaula de Faraday gravitatoria» y, por consiguiente, un escudo antigravitatorio? Razona tu respuesta.*

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

En el interior de una corteza esférica el campo debido **a la masa de esa corteza esférica** es nulo pero no es nulo el campo debido a otra masa situada en su interior o exterior, de manera que el cuerpo no tendría campo nulo pues aunque lo fuese el campo debido a la corteza no lo sería el campo debido a otra masa en cuyo campo estuviese situada o fuese afectada.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

***16** Observa que la variación de $\vec{g}$ con respecto a r en el interior de una esfera sólida puede expresarse mediante la igualdad $\vec{g} = -kr\,\vec{u}_r$. En consecuencia, ¿cómo varía la fuerza gravitatoria con la distancia en el interior de dicha esfera? ¿Qué fuerzas de las que estudiaste en 1.° de Bachillerato variaban de igual manera con la distancia?*

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

G varía directamente proporcional y en sentido contrario con la distancia. Este tipo de fuerzas son las llamadas fuerzas elásticas o restauradores (ley de Hooke) F = - kx.

17 *Comprueba que, utilizando la expresión del campo en el interior de una esfera sólida, se obtiene el mismo valor de intensidad para el campo en la superficie terrestre.*

Módulo: $g = G\dfrac{M_T}{r_T^2} = 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\dfrac{6\cdot 10^{24}}{(6{,}37\cdot 10^6)^2} = 9{,}86\dfrac{m}{s^2}$

18 *Si entendemos que la energía potencial es algo así como la capacidad de realizar un trabajo en función de la posición, ¿consideras acertado el criterio de que la energía potencial es cero en el infinito?*

Sí ya que el infinito el punto en el cual, según la ley de Newton de gravitación Universal, en el que la fuerza gravitatoria es nula.

19 *Si elegimos como criterio que la energía potencial es cero en la superficie terrestre, ¿cuánto valdría en el infinito?*

Como $Ep = -G\dfrac{m_T m}{r}$ si $r \to \infty \Rightarrow Ep \to 0$.

20 *Determina la velocidad con que llega a la superficie terrestre un cuerpo que se deja caer desde una altura h no despreciable medida desde la superficie. Demuestra, así mismo, que si h es despreciable comparada con el radio terrestre, se obtiene la conocida expresión:*

$$v = \sqrt{2gh}$$

Aplicamos el principio de conservación de la energía mecánica a un cuerpo de masa m:

$$\Delta Ep = Ep_h - Ep = Ec(\text{en la superficie de la Tierra})$$

$$Gm_T m\left(\frac{h}{r_T^2 + r_T h}\right) = \frac{1}{2}mv^2 \Leftrightarrow v = \sqrt{2G\frac{m_T h}{r_T(r_T + h)}} \overset{(1)}{=} \sqrt{2G\frac{m_T}{r_T^2}\frac{r_T}{r_T + h}\cdot h} = \sqrt{2g_0\frac{r_T}{r_T + h}\cdot h}$$

(1) Multiplicamos numerador y denominador por r_T y agrupamos

Si h es despreciable frente a r_T, es decir si $h \ll r_T \Rightarrow r_T + h \approx r_T \Rightarrow \dfrac{r_T}{r_T + h} \approx \dfrac{r_T}{r_T} = 1$ y queda:

$$v = \sqrt{2g_0 h}$$

21 *Si el campo en el interior de una esfera sólida homogénea varía conforme a r, ¿cómo lo hará el potencial en función de r en el interior de dicha esfera?*

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

Si el módulo del campo gravitatorio en el interior de una esfera sólida varia según g = - kr, el potencial variará según:

$$g = -\frac{dV}{dr} \Leftrightarrow dV = -gdr \Leftrightarrow \int dV = -\int gdr = \int krdr \Leftrightarrow V = \frac{1}{2}kr^2 + K$$

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

22 *¿Qué puede decirse del potencial gravitatorio en el interior de una corteza esférica?*

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

Como g = 0 en el interior de una corteza esférica:

$$g = -\frac{dV}{dr} \Leftrightarrow dV = -gdr \Leftrightarrow \int dV = -\int gdr = \int odr \Leftrightarrow V = K$$

Es decir el potencial en el interior de una corteza esférica es constante.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

23 *¿Qué tipo de movimiento describiría una partícula en el interior de un hipotético túnel que se cavara desde un punto de latitud 60° N-longitud 0° hasta otro de latitud 60° N-longitud 180°, si la partícula se abandonara en la entrada del túnel?*

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

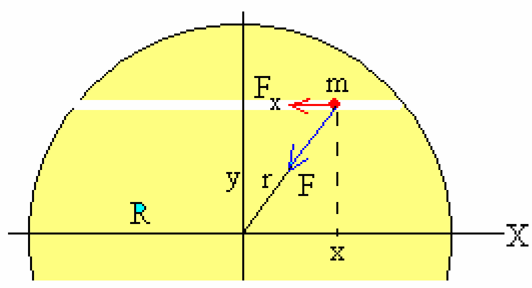
Como los dos puntos tienen la misma latitud y las longitudes son 0º y 180º en el hemisferio N, se trata de un túnel escavado según una cuerda en ese hemisferio.

La fuerza *F* sobre la partícula de masa *m* situada a una distancia *r* < *R* del centro de la Tierra vale

$$F = mg = G\frac{Mm}{r_T^3}\cdot r$$

La componente de dicha fuerza F_x a lo largo del eje del túnel es

$$F_x = -F\frac{x}{r} = -G\frac{Mm}{r_T^3}r\cdot\frac{x}{r} = -G\frac{Mm}{r_T^3}x$$



La fuerza F_x es proporcional al desplazamiento *x* de la partícula respecto de la posición de equilibrio estable (F_x = 0) y de sentido contrario al mismo, un signo inequívoco de que la partícula describe un Movimiento Armónico Simple (M.A.S.).

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

24 *Un objeto celeste que proviene del exterior del sistema solar pasa muy cerca de la atmósfera terrestre con una velocidad de 15 km/s. ¿Quedará fijado en una órbita alrededor de la Tierra? ¿Quedará capturado en el sistema solar?*

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

Como la velocidad de escape del campo gravitatorio terrestre es de 11,2 km/s y el objeto lleva una velocidad mayor, escapará a la atracción de la Tierra pero que dará capturado en el sistema solar ya que la velocidad de escape es menor que la necesaria unos 618 km/s.

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

25 *Si el radio lunar es 0,27 veces el terrestre y la masa lunar es 0,012 veces la terrestre, ¿cuál es la velocidad de escape de la superficie lunar? ¿Cuánto valdrá la energía de ligadura lunar por kilogramo de masa?*

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

$r_L = 0{,}27\ r_T$; $m_L = 0{,}012m_T$

Aplicamos la fórmula de la velocidad de escape a la Luna y la expresamos en función de la velocidad de escape conocida de la Tierra v_T = 11,2 km/s.

$$v = \sqrt{\frac{2Gm_L}{r_L}} = \sqrt{\frac{2G0{,}012m_T}{0{,}27r_T}} = \sqrt{\frac{6{,}48\cdot 10^{-3}\,Gm_T}{r_T}} = 0{,}08v_T = 0{,}08\cdot 11{,}2\frac{km}{s} = 0{,}9\frac{km}{s}$$

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

26 *¿Por qué motivo los planetas y satélites más pequeños carecen en su mayoría de atmósfera o esta es muy tenue?*

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

Como la fuerza de atracción gravitatoria es proporcional a las masas de los cuerpos (el atractivo y el atraído) y los satélites y planetas pequeños tienen poca masa (por eso son pequeños) y los gases también son ligeros, la fuerza de atracción no es suficiente para retenerlos en su atmósfera y se difunden más o menos lentamente en el espacio.

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

27 *¿Puede orbitar un satélite en torno a la Tierra sin que su plano orbital contenga en su interior el centro terrestre?*

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

No ya que el centro geométrico y físico de la fuerza de atracción gravitatoria que mantiene en órbita el satélite es el centro de la Tierra, su órbita ha de ser concéntrica.

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

28 *Desde la superficie terrestre se lanza un satélite; al llegar a la máxima altura r medida desde el centro terrestre, se le comunica una velocidad horizontal. ¿Qué ocurrirá en cada uno de los siguientes casos?*

a) *La velocidad comunicada es* $v_1 = \sqrt{\frac{GM}{r}}$

b) *La velocidad comunicada está comprendida entre v_1 y $\sqrt{2}\ v_1$.*

c) *La velocidad comunicada es mayor o igual $\sqrt{2}\ v_1$.*

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

La velocidad de escape de un cuerpo de la atracción terrestre a una distancia r de su centro es:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

a) Si su velocidad es $v_1 = \sqrt{\frac{GM}{r}}$ como es menor que la velocidad de escape llegará a una cierta altura y describirá una órbita estable si se le imprime la velocidad de giro adecuada o volverá a caer hacia la Tierra, si no se le sigue suministrando energía.

b) Lo mismo que en el caso anterior.
c) La velocidad ya sí es suficiente para librarse de la tenaza de la gravedad terrestre y saldrá de su campo de acción.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

29 *Si se mantuviera constante la densidad de un planeta mientras este aumenta de tamaño:*

a) *¿De qué manera variaría el peso de los cuerpos en su superficie?*
b) *¿Cuánto pesarían en comparación en el caso de que el radio se duplicara?*

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

$$\text{Peso} = P = m\cdot g = m\cdot G\frac{M}{r^2} = mG\frac{\rho\cdot V}{r^2} = mG\frac{\rho\cdot\frac{4}{3}\pi r^3}{r^2} = \frac{4}{3}\pi Gm\cdot\rho\cdot r$$

a) Si la densidad ρ es constante y aumenta de tamaño, al aumentar el radio del planeta r aumenta el peso del cuerpo de masa m.

b) Como P es directamente proporcional a r, al duplicarse r (al duplicarse el diámetro el radio también se duplica) se duplica el peso.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

30 *Considerando que el período de un péndulo en la superficie terrestre viene dado por* $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$*, donde L es la longitud del péndulo, analiza si un reloj de péndulo que funcionase bien en nuestras latitudes se atrasaría o se adelantaría en las siguientes situaciones:*

a) *El reloj es trasladado al polo Norte.*
b) *El reloj es trasladado al ecuador.*
c) *El reloj asciende a gran altura en un globo aerostático.*
d) *El reloj desciende a gran profundidad en el interior terrestre.*
e) *El reloj viaja en el interior de una estación orbital.*

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

En cada uno de los casos a estudio la magnitud que varía es la aceleración del campo gravitatorio terrestre cuya raíz es inversamente proporcional al período T.

a) Ya hemos visto cómo varía g con la latitud $g_{latitud} = g_0 - \omega^2 \cdot r_T \cdot \cos^2\varphi$, de manera que es mayor en los polos, luego sí g ↗ ⇒T ↘ y al disminuir el tiempo en que el péndulo tarda en dar una oscilación completa, su velocidad será mayor y por tanto adelantaría.

b) En el ecuador g ↘ ⇒ T ↗ y el reloj se retrasa.

c) La aceleración de la gravedad disminuye con la altura según $g_h = g_0\left(1 - \frac{2h}{r_T}\right)$ luego si g ↘ ⇒ T ↗ y el reloj se retrasaría.

d) La aceleración de la gravedad también disminuye con la profundidad según $g' = g_0\left(1 - \frac{p}{r_T}\right)$ luego si g ↘ ⇒ T ↗ y el reloj se retrasaría.

e) En el interior de una estación orbital es nula ya que se encuentra "cayendo" hacia la tierra, luego el péndulo del reloj no se movería, el reloj estaría parado.

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

31 *¿En qué lugar pesa más un cuerpo: en la superficie de nuestro planeta, a 2000 m de altura o a una profundidad de 2 000 m?*

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

P = mg y como $g_0 > g_p > g_h$ (ver ejercicio anterior), pesaría más en la superficie.

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

De cálculo

32 *Suponiendo que la Tierra tiene una densidad uniforme, ¿cuál sería el valor de g sobre su superficie si su diámetro fuera la mitad?*

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

Si D es la mitad $r = r_T/2$ y su masa m = $\rho \cdot V = \rho\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\rho\left(\frac{r_T}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\rho\frac{4}{3}\pi r_T^3 = \frac{1}{8}m_T$, luego:

$$g = G\frac{m}{r^2} = G\frac{\frac{1}{8}m_T}{\left(\frac{r_T}{2}\right)^2} = \frac{4}{8}G\frac{m_T}{r_T^2} = \frac{1}{2}g_0 = \frac{1}{2}9{,}8\frac{m}{s^2} = 4{,}9\frac{m}{s^2}$$

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

33 *En un planeta cuyo radio es un tercio del terrestre, la aceleración superficial es de 5,4 m/s². Determina cuánto vale comparativamente la densidad (suponiendo que sea constante) del planeta en relación con la densidad terrestre, ρ_T (considerándola también constante).*

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

Como $g = G\frac{m}{r^2} = G\frac{\rho \cdot V}{r^2} = G\frac{\rho\cdot\frac{4}{3}\pi r^3}{r^2} = \frac{4}{3}\pi G\rho r$, entonces:

$$\frac{g_P}{g_T}=\frac{\frac{4}{3}\pi G\rho_P r_P}{\frac{4}{3}\pi G\rho_T r_T}=\frac{\rho_P r_P}{\rho_T r_T}\Leftrightarrow\frac{\rho_P}{\rho_T}=\frac{g_P}{g_T}\cdot\frac{r_T}{r_P}=\frac{g_P}{g_T}\frac{r_T}{\frac{r_T}{3}}=3\frac{g_P}{g_T}=3\frac{5{,}4\frac{m}{s^2}}{9{,}8\frac{m}{s^2}}=1{,}65$$

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

34 ***Halla la altura sobre la superficie terrestre a la que debe colocarse un satélite artificial para que su peso se reduzca en un 20%.***

Dato: radio terrestre =R = 6 370 km.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

Como P = m·g y la masa del satélite (m) no varía, es la aceleración de la gravedad (g) la que ha de reducirse un 20 % luego la relación entre sus gravedades es de un 80 % , es decir $\frac{g_h}{g_0}=0{,}8$

$$\frac{g_h}{g_0}=\frac{G\frac{M_T}{(R+h)^2}}{G\frac{M_T}{R^2}}=\left(\frac{R}{R+h}\right)^2=0{,}8\Leftrightarrow\frac{1}{1+\frac{h}{R}}=\sqrt{0{,}8}\Leftrightarrow 1+\frac{h}{R}=\frac{1}{\sqrt{0{,}8}}\Leftrightarrow h=R\left(\frac{1}{\sqrt{0{,}8}}-1\right)=6{,}37\cdot10^3\,km\left(\frac{1}{\sqrt{0{,}8}}-1\right)=751{,}$$

9 km.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

35 ***Halla el valor que tiene el campo gravitatorio en la superficie del planeta Júpiter, teniendo en cuenta que su masa es 300 veces la de la Tierra, y su radio, 11 veces mayor que el terrestre.***

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

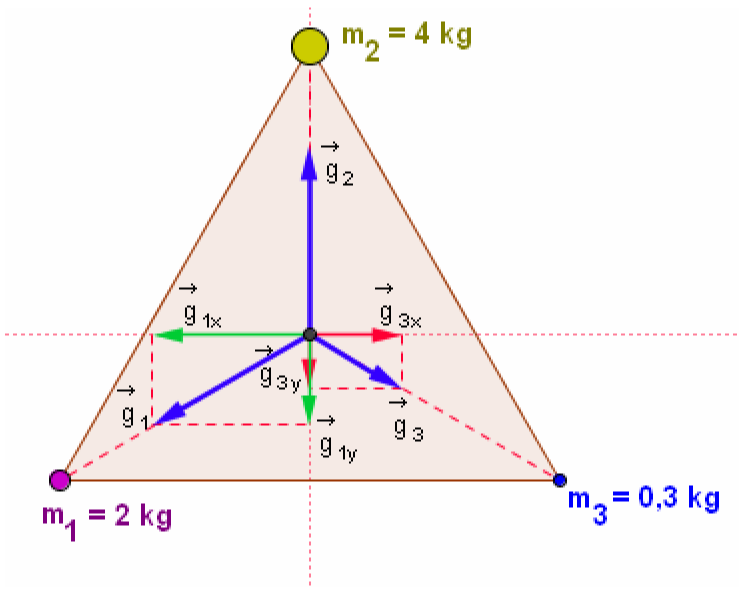
$R_J=11R_T$ y $M_J=300M_T$

$$g=G\frac{M_J}{R_J^2}=G\frac{300M_T}{121R_T^2}=\frac{300}{121}G\frac{M_T}{R_T^2}=\frac{300}{121}g_0=\frac{300}{121}9{,}8\frac{m}{s^2}\approx24{,}3\frac{m}{s^2}$$

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

36 ***Tres partículas que tienen, respectivamente, una masa de 2, 4 y 0,3 kg se encuentran situadas en los vértices de un triángulo equilátero de 8,66 m de altura. ¿Cuánto vale la intensidad del campo,g, en el centro de dicho triángulo? (Supón que las masas de 2 y 0,3 kg se encuentran en los vértices inferiores sobre el eje X.)***

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧



Vamos a hallar la resultante según los dos ejes de coordenadas con origen en el centro del triángulo, que está a una distancia de los vértices que es los dos tercios de su altura ya que en un triángulo equilátero el ortocentro y baricentro coinciden; d = $\frac{2}{3}8{,}66\,m=5{,}77\,m$:

Eje horizontal (abscisas)

$$\vec{g}_x = \vec{g}_{1x} + \vec{g}_{3x} = -g_1\cos 30^\circ\,\vec{i} + g_3\cos 30^\circ\,\vec{i} = -G\frac{m_1}{d^2}\cos 30^\circ\,\vec{i} + G\frac{m_3}{d^2}\cos 30^\circ\,\vec{i} = \frac{G}{d^2}\cos 30^\circ\left(-m_1\,\vec{i} + m_3\,\vec{i}\right) =$$

$$= \frac{6{,}67\cdot 10^{-11}}{5{,}77^2}\cos 30^\circ\left(-2\,\vec{i} + 0{,}3\,\vec{i}\right) = -2{,}95\cdot 10^{-12}\,\vec{i}\,\frac{m}{s^2}$$

Eje vertical (ordenadas)

$$\vec{g}_y = \vec{g}_2 + \vec{g}_{1y} + \vec{g}_{3y} = g_2\,\vec{j} - g_1\mathrm{sen}30^\circ\,\vec{j} - g_3\mathrm{sen}30^\circ\,\vec{j} = G\frac{m_2}{d^2} - G\frac{m_1}{d^2}\mathrm{sen}30^\circ\,\vec{j} - G\frac{m_3}{d^2}\mathrm{sen}30^\circ\,\vec{j} =$$

$$= \frac{G}{d^2}\left(m_2 - \mathrm{sen}30^\circ(m_2 + m_3)\right) = \frac{6{,}67\cdot 10^{-11}}{5{,}77^2}\left(4 - \frac{1}{2}(2 + 0{,}3)\right)\vec{j} = 5{,}71\cdot 10^{-12}\,\vec{j}\,\frac{m}{s^2}$$

Luego la resultante es:

$$\vec{g} = \vec{g}_x + \vec{g}_y = -2{,}95\cdot 10^{-12}\,\vec{i} + 5{,}71\cdot 10^{-12}\,\vec{j}\,\frac{m}{s^2}$$

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

37 *¿Cuál es la energía potencial del sistema de la cuestión anterior?*

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

Necesitamos saber la longitud L del lado del triángulo equilátero, usamos el teorema de Pitágoras:

$$L^2 = \mathrm{altura}^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 \Leftrightarrow L^2 - \frac{L^2}{4} = 8{,}66^2 \Leftrightarrow \frac{3}{4}L^2 = 8{,}66^2 \Leftrightarrow L^2 = \frac{4}{3}8{,}66^2 \Leftrightarrow L = \frac{17{,}32}{\sqrt{3}} \approx 10\,\mathrm{m}$$

$$Ep = Ep_{12} + Ep_{13} + Ep_{23} = -\frac{G}{L}(m_1\cdot m_2 + m_1\cdot m_3 + m_2\cdot m_3) = -\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}}{10}(2\cdot 4 + 2\cdot 0{,}3 + 4\cdot 0{,}3) = -6{,}54\cdot 10^{-11}\,\mathrm{J}$$

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

38 *¿A qué altura de la superficie terrestre ascendería un objeto lanzado verticalmente desde dicha superficie con una velocidad de 5 km/s?*

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

$$\Delta Ep = Ep_h - Ep = Ec(\text{en la superficie de la Tierra})$$

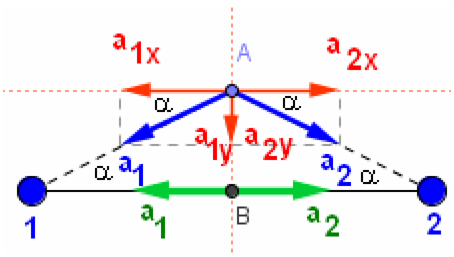
$$Gm_Tm\left(\frac{h}{r_T^2 + r_Th}\right) = \frac{1}{2}mv^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}v^2 = G\frac{m_Th}{r_T(r_T + h)} \overset{(1)}{=} G\frac{m_T}{r_T^2}\frac{r_T}{r_T + h}h = g_0\frac{r_T}{r_T + h}h = g_0\frac{r_T}{\frac{r_T}{h} + 1} \Rightarrow$$

(1) Multiplicamos numerador y denominador por r_T y agrupamos

$$1 + \frac{r_T}{h} = \frac{2g_0r_T}{v^2} \Leftrightarrow \frac{r_T}{h} = \frac{2g_0r_T}{v^2} - 1 \Leftrightarrow h = \frac{r_T}{\frac{2g_0r_T}{v^2} - 1} = \frac{6{,}37\cdot 10^6}{\frac{2\cdot 9{,}8\cdot 6{,}37\cdot 10^6}{(5\cdot 10^3)^2} - 1} = 1594860\ \ \mathrm{m.}$$

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

39 *Dos masas puntuales de 10 kg cada una se encuentran fijas en dos puntos separados por una distancia de 1 m. Una tercera masa de 0,5 kg se abandona en un punto A equidistante de ambas y situado a 30 cm por encima del punto medio B del segmento que las une. Calcula:*



a) *La aceleración de la tercera masa en los puntos A y B.*

b) *La velocidad que llevará cuando pase por el punto B.*

c) *El tipo de movimiento que describe.*

$m_1 = m_2 = 10$ kg; $m = 0{,}5$ kg

distancia de la masas 1 y 2 al punto A = $d_A = \sqrt{0{,}5^2 + 0{,}3^2} = \sqrt{0{,}34}$ m
distancia de la masas 1 y 2 al punto B = $d_B = 0{,}5$ m.

a)
Aceleración en el punto A

Hallamos las componentes de la aceleración gravitatoria según los ejes.

Eje horizontal

$\vec{a}_x = \vec{a}_{1x} + \vec{a}_{2x} = 0$ ya que son vectores que tienen la misma dirección y módulo pero sentidos opuestos.

Eje vertical

$$\vec{a}_y = \vec{a}_{1y} + \vec{a}_{2y} = -(a_{1y} + a_{2y})\,\mathrm{sen}\alpha\,\vec{j} = -\left(G\frac{m_1}{d_A^2} + G\frac{m_2}{d_A^2}\right)\mathrm{sen}\alpha\,\vec{j} = -2G\frac{m_1}{d_A^2}\,\mathrm{sen}\alpha\,\vec{j} = -2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\,\frac{10}{0{,}34}\,\frac{0{,}3}{\sqrt{0{,}34}}\,\vec{j} =$$

$- 2{,}02\cdot 10^{-9}\,\vec{j}$ m/s^2. α

Ya que $\mathrm{sen}\alpha = \frac{\overline{AB}}{d_A} = \frac{0{,}3}{\sqrt{0{,}34}}$

Luego la aceleración es A es $\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y = -2{,}02\cdot 10^{-9}\,\vec{j}$.
Aceleración en el punto B

Es nula ya que por ser el punto medio los vectores tienen el mismo módulo y dirección pero sentido contrario(en verde en la figura).

b) Principio de conservación de la energía mecánica:

$$Ep_A = Ep_B + Ec_B$$
$$Ep_{1A} + Ep_{2A} = Ep_{1B} + Ep_{2B} + Ec_B$$

$$-G\frac{m\cdot m_1}{d_A} - G\frac{m\cdot m_2}{d_A} = -G\frac{m\cdot m_1}{d_B} - G\frac{m\cdot m_1}{d_B} + \frac{1}{2}mv^2 \Leftrightarrow -2G\frac{m_1}{d_A} = -2G\frac{m_1}{d_B} + \frac{1}{2}v^2 \Leftrightarrow -2G\frac{m_1}{d_A} + 2G\frac{m_1}{d_B} = \frac{1}{2}v^2 \Rightarrow$$

$$2Gm_1\left(\frac{1}{d_B} - \frac{1}{d_A}\right) = \frac{1}{2}v^2 \Leftrightarrow v = \sqrt{4Gm_1\left(\frac{1}{d_B} - \frac{1}{d_A}\right)} = \sqrt{46{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 10.\left(\frac{1}{0{,}5} - \frac{1}{\sqrt{0{,}34}}\right)} = 2{,}76\cdot 10^{-5}\,\frac{m}{s}.$$

c) Describe un movimiento acelerado de aceleración variable entre los puntos A y su simétrico A' por debajo de las masas, es un movimiento de vaivén entre A y A' con aceleraciones máximas en los extremos (velocidades nulas) y nula en el centro (velocidad máxima) es un m.a.s.

40 *La distancia de la Tierra al Sol es de 152 100 000 km en el afelio, mientras que en el perihelio es de 147 100 000 km. Si la velocidad orbital de la Tierra es de 30270 m/s en el perihelio, determina, por conservación de la energía mecánica, cuál será su velocidad orbital en el afelio.*

✧✧✧⌖⌖⌗⌖⌖✧✧✧

$$Ep_A + Ec_A = Ep_p + Ec_p \Rightarrow -G\frac{m_T \cdot M_S}{d_A} + \frac{1}{2}m_T v_A^2 = -G\frac{m_T \cdot M_S}{d_P} + \frac{1}{2}m_T v_P^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}v_A^2 = GM_S\left(\frac{1}{d_A} - \frac{1}{d_P}\right) + \frac{1}{2}v_P^2$$

$$v_A = \sqrt{2GM_S\left(\frac{1}{d_A} - \frac{1}{d_P}\right) + v_P^2} = \sqrt{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{30}\left(\frac{1}{1{,}521 \cdot 10^{11}} - \frac{1}{1{,}471 \cdot 10^{11}}\right) + 30270^2} = 29\,268{,}6 \text{ m/s}$$

✧✧✧⌖⌖⌗⌖⌖✧✧✧

41 *Un objeto es abandonado en reposo a una altura de 5 000 km sobre la superficie terrestre. Determina su velocidad al llegar a la superficie terrestre.*

✧✧✧⌖⌖⌗⌖⌖✧✧✧

Aplicamos de nuevo el principio de conservación de la energía mecánica :

$$\Delta Ep = Ep_h - Ep = Ec(\text{en la superficie de la Tierra})$$

$$Gm_T m\left(\frac{h}{r_T^2 + r_T h}\right) = \frac{1}{2}mv^2 \Leftrightarrow v = \sqrt{2G\frac{m_T h}{r_T(r_T + h)}} \overset{(1)}{=} \sqrt{2G\frac{m_T}{r_T^2}\frac{r_T}{r_T + h} \cdot h} = \sqrt{2g_0\frac{r_T}{r_T + h} \cdot h} = \sqrt{2 \cdot 9{,}8\frac{6{,}37 \cdot 10^6}{6{,}37 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^6} \cdot 5 \cdot 10^6} =$$

= 7 410 m/s.

(1) Multiplicamos numerador y denominador por r_T y agrupamos

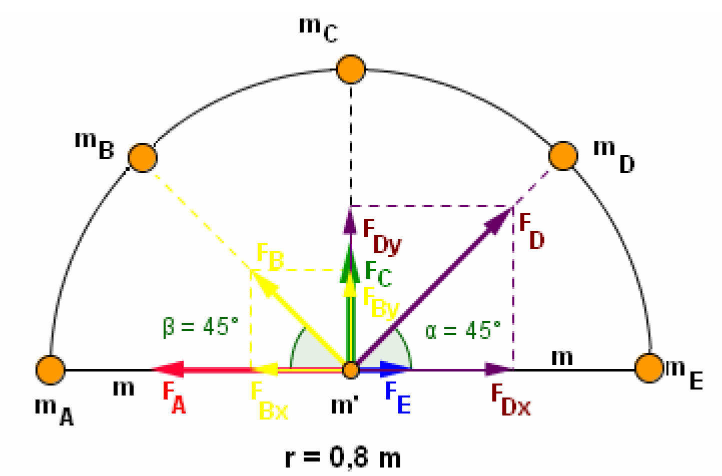
✧✧✧⌖⌖⌗⌖⌖✧✧✧

42 *Cinco masas de 4 kg cada una están en posiciones equidistantes sobre el arco de una semicircunferencia de 80 cm de radio. Una masa de 0,5 kg se sitúa en el centro de curvatura de dicho arco. Determina:*

a) *La fuerza que actúa sobre dicha masa.*

b) *La energía potencial de dicha masa en ese punto.*

✧✧✧⌖⌖⌗⌖⌖✧✧✧



a) Las fuerzas que actúan sobre m' se han dibujado en la figura con su dirección y sentido, de manera que sólo hemos de hallar el módulo de las fuerzas resultantes según los ejes:

Eje horizontal:

$R_x = F_E + F_{Dx} - F_A - F_{Bx} = \frac{G\cdot m'}{R^2}(m_E + m_D\cos 45º - m_A - m_B\cos 45º) = 0$, ya que las cinco masas $m_A = m_B = m_C = m_D = m_E$ son iguales.

$$R_y = F_C + F_{Dy} + F_{By} = \frac{G\cdot m'}{R^2}(m_C + m_D sen45º + m_B sen45º) = \frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot0{,}5}{0{,}8^2}(4 + 4sen45º + 4\cdot\cos 45º) = 5{,}03\cdot10^{-10}\ N.$$

Luego la fuerza resultante sobre m' es:

$$\vec{F} = R_x\,\vec{i} + R_Y\,\vec{j} = 5{,}03\cdot10^{-10}\,\vec{j}\ N \Rightarrow F = 5{,}03\cdot10^{-10} N.$$

b) Ep = $Ep_A + Ep_B + Ep_C + Ep_D + Ep_E = -Gm'\cdot m\cdot\frac{5}{r} = -5\cdot6{,}67\cdot10^{-11}\cdot0{,}5\cdot4\frac{1}{0{,}8} = -8{,}34\cdot10^{-10}$ J.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

43 ***Los agujeros negros se denominan así porque su increíble densidad hace que su acción gravitatoria sea tan intensa que ni la luz tiene suficiente velocidad de escape para salir de él. A la distancia crítica en la que este hecho sucede (medida desde el centro del agujero) se la denomina «radio de Schwarzchild». ¿Cuál sería este radio para un agujero de diez masas solares?***

Datos: $m_s = 2\cdot10^{30}$ kg; velocidad de la luz = c = $3\cdot10^8$ m/s.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

$$v_e = c = \sqrt{\frac{2Gm}{r}} \Leftrightarrow r = \frac{2Gm}{c^2} = \frac{2G10m_S}{c^2} = 20\frac{Gm_S}{c^2} = 20\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot2\cdot10^{30}}{(3\cdot10^8)^2} = 29644{,}\widehat{4}\ m.$$

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

44 ***Determina la velocidad de escape de la superficie de un planeta cuyo radio es un tercio del terrestre, y cuya aceleración superficial es de 5,4 m/s2.***

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

$$v_e = \sqrt{\frac{2g_0\cdot r^2}{r}} = \sqrt{\frac{2g_0\cdot r^2}{r}} = \sqrt{2g_0 r} = \sqrt{2g_0\frac{1}{3}r_T} = \sqrt{\frac{2}{3}5{,}4\cdot\frac{m}{s^2}\cdot6{,}37\cdot10^6 m} = 4789\frac{m}{s}$$

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧