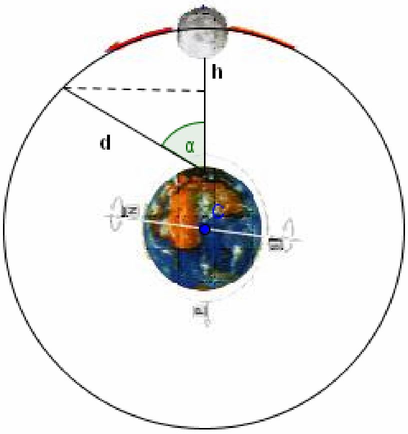
ACTIVIDADES

1 Supongamos que el movimiento de la Luna se compone de otros dos: uno de ellos de avance y el otro de caída hacia la Tierra, regido este último por las ecuaciones de caída libre.

Con los datos que se te ofrecen, y siguiendo las sugerencias de la figura, contesta a las siguientes preguntas:



a) ¿Qué ángulo se ha desplazado la Luna en 1 hora?

b) ¿Qué altura h ha «caído» la Luna en esa hora?

c) ¿Qué valor de aceleración g_L de caída corresponde a esa distancia y ese tiempo?

d) ¿Cuántas veces es menor ese valor que el valor $g_T = 9,8$ m/s^2, que corresponde a la superficie terrestre?

e) ¿Cuántas veces es mayor la distancia Tierra-Luna que el radio terrestre?

f) ¿Qué relación puedes encontrar entre la variación de la aceleración y la de la distancia?

Datos: radio terrestre = 6 370 km; distancia Tierra-Luna = 384 000 km; período sidéreo lunar = 27,31 días.

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

a) $\frac{360°}{27{,}31 \cdot 24\text{hr}} = \frac{x}{1\text{hr}} \Leftrightarrow x = \frac{360°}{655{,}44\text{hr}} = 32'\,57{,}3''$ cada hora.

b) $\cos x = \frac{d-h}{d} = 1 - \frac{h}{d} \Leftrightarrow h = d(1-\cos x) = 384000\text{km}(1-\cos 32'57{,}3'') = 17{,}64$ km.

c) $\frac{g_{L1}}{g_{L0}} = \frac{1/d_1^2}{1/d^2} = \left(\frac{d}{d_1}\right)^2 \Leftrightarrow g_{L1} = g_{L0}\cdot\left(\frac{d}{d_1}\right)^2 = g_{L0}\cdot\left(\frac{d}{d-h}\right)^2 = g_{L0}\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{h}{d}}\right)^2 = 0{,}0027\cdot\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{17{,}64}{384000}}\right)^2 = 0{,}0027001\frac{m}{s^2}$

d) $\frac{g_T}{g_L} = \frac{9{,}8\frac{m}{s^2}}{0{,}0027\frac{m}{s^2}} = 3630$, luego g_L es 3630 veces menor que la de la Tierra.

e) $\frac{d}{R_T} = \frac{384000\text{km}}{6370\text{km}} = 60$ veces mayor.

f) $g = k\frac{1}{d^2}$ ya que $3\,630 \cong 60^2$.

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

2 Si la masa de la Luna es 0,012 veces la de la Tierra, y su radio es aproximadamente 1/4 del terrestre, da un valor aproximado de la aceleración de caída de los objetos en la superficie lunar.

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

$$\frac{g_L}{g_T} = \frac{G\frac{M_L}{R_L^2}}{G\frac{M_T}{R_T^2}} = \left(\frac{R_T}{R_L}\right)^2\cdot\frac{M_L}{M_T} = \left(\frac{R_T}{R_T/4}\right)^2\cdot\frac{0{,}012M_T}{M_T} = 4^2\cdot 0{,}012 = 0{,}192 \Rightarrow g_L = 0{,}192g_T = 0{,}192\cdot 9{,}8 = 1{,}9\frac{m}{s^2}$$

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

3 ¿Se te ocurre algún motivo por el que tanto Mercurio como la Luna no posean atmósfera? Razona tu respuesta.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

La gravedad en esos dos planetas es tan pequeña que no es suficiente para retener ninguna sustancia gaseosa y éstas escapan atracción gravitatoria.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

4 A partir de la expresión de la aceleración de caída libre, demuestra que, si consideramos los planetas como cuerpos esféricos, puede escribirse:

$$a = \frac{4}{3}G\pi r\rho$$

donde ρ es la densidad media del planeta.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

$$a = G\frac{M}{r^2} = G\frac{\rho\cdot V}{r^2} = G\frac{\rho\cdot\frac{4}{3}\pi r^3}{r^2} = \frac{4}{3}G\pi r\rho \quad \text{Q.E.D.}$$

Ya que $\rho = \frac{M}{V}$ y $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

5 Teniendo en cuenta que ¡amasa del Soles de unos $2\cdot10^{30}$ kg, calcula el valor de k para los planetas del sistema solar y exprésalo con sus correspondientes unidades del Sistema Internacional

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

La constante de k de la tercera ley de Kepler viene dada para el sistema solar:

$$k = \frac{4\pi^2}{Gm_s} = \frac{4\pi^2}{6{,}67\cdot10^{-11}\frac{N\cdot m^2}{kg^2}\cdot2\cdot10^{30}\,kg} = 2{,}96\cdot10^{-19}\,\frac{kg}{N\cdot m^2}$$

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

6 El satélite de Júpiter llamado Io tiene un período de revolución de 42 horas 29 minutos, y su distancia media a Júpiter es de 422 000 km. ¿Cuál es la masa de Júpiter?

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

Hallamos la constante para Júpiter: $T^2 = kr^3 \Leftrightarrow k = \frac{T^2}{r^3} = \frac{(42\cdot3600+29\cdot60)^2}{(4{,}22\cdot10^8)^3} = 3{,}1\cdot10^{-16}\,\frac{kg}{N\cdot m^2}$

Y ahora la masa del planeta: $k = \frac{4\pi^2}{Gm_J} \Leftrightarrow m_J = \frac{4\pi^2}{Gk} = \frac{4\pi^2}{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot3{,}1\cdot10^{-16}} = 1{,}91\cdot10^{27}\,kg.$

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

7 Marte se encuentra a una distancia media del Sol de 227 900 000 km. ¿Cuántos días dura el año marciano?

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

$$T^2 = kr^3 \Leftrightarrow T = \sqrt{kr^3} = \sqrt{2{,}96 \cdot 10^{-19}\,\frac{kg}{N \cdot m^2} \cdot (2{,}279 \cdot 10^{11})^3\,m^3} = 5{,}92 \cdot 10^7\,s = 685 \text{ días}$$

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

8 Si el período de un péndulo simple que oscila bajo ángulos pequeños viene dado por $T = 2\pi\sqrt{l/g}$:

a) ¿Qué le ocurriría a dicho período si lo alejáramos hasta el doble de la distancia que hay entre el péndulo y el centro de la Tierra?

b) ¿Qué le ocurriría en ese mismo caso a su frecuencia de oscilación?

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

a) $\frac{T_1}{T_0} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{l}{g_1}}}{2\pi\sqrt{\frac{l}{g_0}}} = \sqrt{\frac{g_0}{g_1}} = \sqrt{\frac{G\frac{M_T}{d_0^2}}{G\frac{M_T}{d_1^2}}} = \sqrt{\left(\frac{d_1}{d_0}\right)^2} = \frac{d_1}{d_0} = \frac{2d_0}{d_0} = 2 \Rightarrow T_1 = 2T_0$, su período se duplica.

b) Como f = 1/T la frecuencia se haría la mitad.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

9 Haz una estimación del valor de la aceleración de marea en la zona más próxima a la Luna. ¿Qué elevación de marea produciría dicha aceleración, en condiciones ideales, actuando durante media hora?

Dato: La masa de la Luna es 0,012 veces la de la Tierra.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

$$a_{marea} = a_A - a_T = G\frac{m_L}{(r - r_T)^2} - G\frac{m_L}{r^2} = Gm_L\left(\frac{1}{(r-r_T)^2} - \frac{1}{r^2}\right) = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 0{,}012 \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot \left(\frac{1}{(3{,}84 \cdot 10^8 - 6{,}37 \cdot 10^6)^2} - \frac{1}{(3{,}84 \cdot 10^8)^2}\right) =$$

$1{,}11 \cdot 10^{-6}\ m/s^2$

$$h = \frac{1}{2}a_{marea} \cdot t^2 = \frac{1}{2} 1{,}11 \cdot 10^{-6}\,\frac{m}{s^2} \cdot (1800)^2\,s^2 = 1{,}78 \text{ m de elevación.}$$

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

CUESTIONES Y PROBLEMAS

De aplicación

1 ¿De qué tipo llegó a imaginar Kepler que podía ser la fuerza responsable del movimiento de los planetas? ¿A qué asociaba la causa de dicha fuerza?

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

Kepler pensaba que la fuerza que dimanaba del Sol, responsable del movimiento de los planetas era de naturaleza magnética, que lo asociaba a la naturaleza magnética del Sol.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

2 ¿Cuál parece ser el origen de la idea contenida en el libro III de los Principia de Newton, según la cual la caída de los cuerpos y los movimientos planetarios obedecen a un mismo tipo de fuerza?

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

Los cálculos que hizo Newton en 1666 en los que supuso que la Luna "caía" hacia la Tierra de forma continua del mismo modo que un proyectil se precipita "parabólicamente" a tierra.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

3 ¿Cuál es el origen de la insistente suposición de que la fuerza responsable del movimiento de los planetas debía cumplir la ley del inverso del cuadrado de la distancia?

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

Los cálculos que hizo Newton en 1666 en los que supuso que la Luna "caía" hacia la Tierra de forma continua del mismo modo que un proyectil se precipita "parabólicamente" a tierra. De esta manera, halló que la aceleración con que caía cumplía con la regla del inverso del cuadrado de la distancia.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

4 ¿Por qué no aparece la constante de gravitación G en los Principia? ¿Qué impedía a Newton conocer su valor?

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

La constante G no aparece en los Principia de Newton porque para saber su valor se necesitaba conocer la masa de la Tierra y en esa época era desconocida.

$$G = g\frac{r_T^2}{m_T}$$

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

5 ¿Qué precauciones considerarías necesario tomar si te vieses en la tesitura de tener que reproducir el experimento de Cavendish? ¿Por qué es tan difícil su reproducción?

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

El instrumento construido por Cavendish consistía en una balanza de torsión con una vara horizontal de seis pies de longitud en cuyos extremos se encontraban dos esferas metálicas. Esta vara colgaba suspendida de un largo hilo. Cerca de las esferas Cavendish dispuso dos esferas de plomo de unos 175 kg cuya acción gravitatoria debía atraer las masas de la balanza produciendo un pequeño giro sobre esta. Para impedir perturbaciones causadas por corrientes de aire, Cavendish emplazó su balanza en una habitación a prueba de viento y midió la pequeña torsión de la balanza utilizando un telescopio.

A partir de las fuerzas de torsión en el hilo y las masas de las esferas Cavendish fue capaz de calcular el valor de la constante de gravitación universal. Dado que la fuerza de la gravedad de la Tierra sobre cualquier objeto en su superficie puede ser medida directamente, la medida de la constante de gravitación permitió determinar la masa de la Tierra por primera vez. Igualmente fue posible determinar las masas del Sol, la Luna y los diferentes cuerpos del Sistema Solar.

Para determinar la constante *G*, mediante la balanza de gravitación es necesario medir la posición inicial y la final de equilibrio y el movimiento oscilatorio amortiguado entre estas dos posiciones. El ángulo entre estas posiciones de equilibrio es una medida de la fuerza de atracción. Para medir el ángulo, se dispone de un haz LASER que incide sobre un espejo cóncavo. La oscilación del péndulo, se observa indirectamente mediante el movimiento de la marca luminosa producida por el rayo reflejado en una regla graduada situada a *L* = 4.425 m de distancia.

El ángulo medido es tan pequeño (la fuerza entre masas tan pequeñas es pequeñísima) que hay que Tamar las precauciones necesarias que puedan falsear el experimento eliminado otras causas posibles de la torsión del hilo (el viento, la proximidad de otras masas, etc.). Por otro lado para medir este ángulo con precisión no podemos usar la simple vista se necesita usar medidores Laser o aumentar la visual con un telescopio como hizo Cavendish

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

6 ¿Cómo se llega a la conclusión de que la masa inercial y la gravitacional son la misma magnitud?

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

El concepto de masa surge de la confluencia de dos leyes, la ley Gravitación Universal de Newton y la 2ª Ley de Newton (o 2º "Principio"): según la ley de la Gravitación de Newton, la atracción entre dos cuerpos es proporcional al producto de dos constantes, denominadas **"masa gravitatoria"**, una de cada uno de ellos, siendo así la masa gravitatoria una propiedad de la materia en virtud de la cual dos cuerpos se atraen; por la 2ª ley (o principio) de Newton, la fuerza aplicada sobre un cuerpo es directamente proporcional a la aceleración que sufre, denominándose a la constante de proporcionalidad **"masa inercial"** del cuerpo.

No es obvio que la masa inercial y la masa gravitatoria coincidan. Sin embargo todos los experimentos muestran que sí. Para la física clásica esta identidad era accidental. Ya Newton, para quien peso e inercia eran propiedades independientes de la materia, propuso que ambas cualidades son proporcionales a la *cantidad de materia*, a la cual denominó "masa". Sin embargo para Einstein, la coincidencia de masa inercial y masa gravitacional, fue un dato crucial y uno de los puntos de partida para su teoría de la Relatividad y por tanto para la comprensión de la naturaleza. Según Einstein esa identidad significa que *"la misma cualidad de un cuerpo se manifiesta de acuerdo con las circunstancias como inercia o como peso"*. Esto llevó a Einstein a enunciar el *"principio de equivalencia": las leyes de la naturaleza deben expresarse de modo que sea imposible distinguir entre un campo gravitatorio uniforme y un sistema referencial acelerado*. Así pues, **"masa inercial" y "masa gravitatoria" son *indistinguibles*** y, consecuentemente, cabe un único concepto de "masa" como sinónimo de "cantidad de materia" según formuló Newton.

Supóngase un objeto con masas inercial y gravitacional m y M, respectivamente. Si la gravedad es la única fuerza que actúa sobre el cuerpo, la combinación de la segunda ley de Newton y la ley de la gravedad proporciona su aceleración como

$$a = \frac{M}{m} g$$

Por tanto, todos los objetos situados en el mismo campo gravitatorio caen con la misma aceleración si y sólo si la proporción entre masa gravitacional e inercial es igual a una constante. Por definición, se puede tomar esta proporción como 1.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

7 ¿Qué razones llevaron a suponer que la fuerza gravitatoria entre masas varía conforme al inverso del cuadrado de la distancia?

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

La naturaleza cuadrático inversa de la fuerza centrípeta para el caso de órbitas circulares, puede deducirse fácilmente de la tercera ley de Kepler sobre el movimiento planetario y de la dinámica del movimiento circular uniforme:

1. Según la tercera ley de Kepler el cuadrado del periodo *P* es proporcional al cubo del semieje mayor de la elipse, que en el caso de la circunferencia es su propio radio *r*, $P^2=kr^3$.
2. La dinámica del movimiento circular uniforme, nos dice que en una trayectoria circular, la fuerza que hay que aplicar al cuerpo es igual al producto de su masa por la aceleración normal, $F=mv^2/r$.
3. El tiempo que tarda un planeta en dar una vuelta completa es el cociente entre la longitud de la circunferencia y la velocidad, *P*=2p *r/v*.

Combinando estas expresiones, obtenemos

$$F=\frac{mv^2}{r}=m\left(\frac{2\pi r}{P}\right)^2\frac{1}{r}=4\pi^2 m\left(\frac{r^3}{P^2}\right)\frac{1}{r^2}=4\pi^2 mk\frac{1}{r^2}$$

4. Vemos que la fuerza *F* que actúa sobre el planeta en movimiento circular uniforme es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia *r* desde el centro de fuerzas al centro del planeta

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

8 ¿Te parece lícito considerar que G es una constante verdaderamente «universal»? ¿Qué otras constantes universales conoces?

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

Porque es aplicable a dos masas cualesquiera en cualquier lugar del universo.

Otras constantes :

◊ Velocidad de la luz en el vacío = c = $3{,}00\cdot10^8$ m/s.
◊ Carga elemental = e= $1{,}6\cdot10^{-19}$ C.
◊ Constante de Planck = h =$6{,}63\cdot10^{-34}$ J.s.
◊ Número de Avogadro = N_A = $6{,}02\cdot10^{23}$ partículas/mol
◊ Constante de la ley de Coulomb = k = $9\cdot10^9$ $N\cdot m^2/C^2$.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

9 Teniendo en cuenta cómo es el movimiento de la Luna alrededor de la Tierra, ¿tendrán la misma magnitud todas las mareas, ya se produzcan en novilunio o en plenilunio?

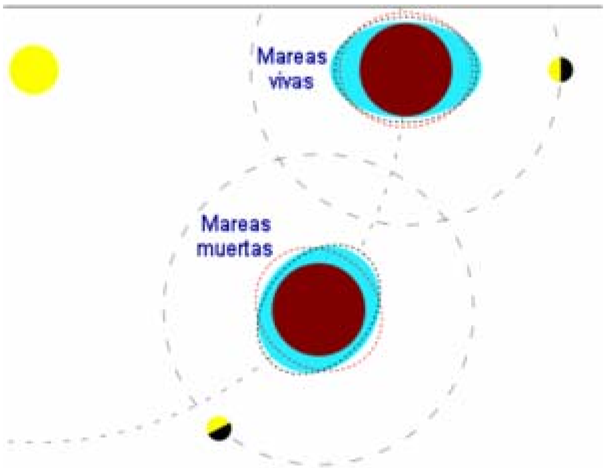
✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

Marea viva, alta : Son las mareas que se producen con la Luna Llena y la Luna Nueva, cuando el Sol, la Luna y la Tierra se encuentran alineados. La *Marea Viva* que se produce durante la fase de

Luna Nueva se denomina "*Marea Viva de Conjunción*"; y la que se produce mientras tiene lugar la fase de Luna Llena se llama "*Marea Viva de Oposición*".

Marea muerta, baja o de cuadratura: Son las mareas que se producen durante las fases de *Cuarto Creciente* y *Cuarto Menguante*, cuando las posiciones de la Tierra, el Sol y la Luna forman un ángulo aparente de 90º.

El elipsoide debido a las mareas solares tiene el eje mayor dirigido hacia el Sol. El debido a las mareas lunares tiene el eje mayor dirigido hacia la Luna. Como la Luna gira alrededor de la Tierra, los ejes mayores de los elipsoides no giran a la misma velocidad. Con respecto a la estrellas, el periodo de rotación del elipsoide solar es de un año. El del elipsoide de la Luna es de 27,32 días. El resultado es que los ejes de los dos elipsoides se acercan cada 14,7652944 días. Cuando los ejes mayores de los dos elipsoides están alineados, la amplitud de las mareas es máxima y se llaman mareas vivas o mareas sizigias. Esto sucede en las lunas nuevas y en las lunas llenas. En cambio, cuando el eje mayor de cada elipsoide está alineado con el eje menor del otro, la amplitud de las mareas es mínima. Esto sucede en los cuartos menguantes y los cuartos crecientes. Estas mareas se llaman mareas muertas o mareas de cuadratura.



Cuando la Luna y el Sol están alineados, los elipsoides (en punteado) se refuerzan y las mareas son más grandes. Cuando la Luna está en cuadratura con el Sol, los elipsoides se cancelan parcialmente y las mareas son pequeñas.

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

10 ¿Cómo podría incidir en el fenómeno de las mareas un calentamiento global del planeta? ¿Qué consecuencias podría tener dicha incidencia?

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

El calentamiento global del planeta puede fundir los hielos de los Polos y hacer que el nivel del mar aumente, al aumentar la masa de agua aumentaría la intensidad de las mareas y amplias zonas costeras del planeta serían arrasadas por la fuerza de las mareas y cambiaría su relieve.

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

11 ¿Por qué el efecto de marea de la Luna sobre la Tierra es mayor si la fuerza gravitatoria del Sol supera a la ejercida por la Luna?

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

Véase la cuestión nº 9.

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

12 ¿Cuántas mareas se producen al día en una localidad costera? ¿Cada cuánto tiempo?

✧✧✧⟡⟡⟡⟡⟡✧✧✧

El tiempo aproximado entre una pleamar y la bajamar es de 6 horas 13 minutos, completando un ciclo de 24 horas 50 minutos. Se producen 4 mareas al día (bajas y altas).

✧✧✧⟡⟡⟡⟡⟡✧✧✧

13 ¿Qué efecto llegarán a producir las mareas sobre la duración del día terrestre?

✧✧✧⟡⟡⟡⟡⟡✧✧✧

Tanto la deformación de la Tierra debida a las mareas terrestres como el movimiento del agua de las mareas acuáticas son procesos que disipan energía. El trabajo lo efectúa el torque que la Luna y Sol ejercen sobre la parte deformada de la Tierra y de los océanos. La disipación de energía exige que los ejes mayores de los elipsoides de la hidrosfera y de la Tierra no estén perfectamente alineados con la Luna y el Sol, sino que tengan un pequeño retardo de fase. En el modelo sin continentes, ese retardo correspondería a 3° (y a 12 minutos en tiempo). Ese torque frena la rotación de la Tierra y duración del día aumenta 17 microsegundos por año.

La Tierra ejerce el mismo torque sobre la Luna que el que la Luna ejerce sobre la Tierra. El torque que la Tierra ejerce sobre la Luna le comunica energía. Como la Luna está en orbita alrededor de la Tierra, ese aumento de energía se traduce en un aumento de la distancia entre los dos astros y una disminución de la duración del mes lunar. La distancia Tierra-Luna aumenta unos 38 mm por año.

De la misma manera que la Luna crea mareas en la Tierra, tanto acuáticas como terrestres, la Tierra también ejerce mareas sobre la Luna. La fricción debida a esas mareas frenó la rotación de la Luna, provocando que esta presente siempre la misma cara hacia la Tierra. Lo mismo ha sucedido con otros satélites del sistema solar. En otros satélites que aún giran, la energía disipada por las deformaciones debidas a la marea genera actividad volcánica.

✧✧✧⟡⟡⟡⟡⟡✧✧✧

De razonamiento

14 Dos masas aisladas se atraen gravitacionalmente. Si una es el doble que la otra, ¿cómo serán, en comparación, las fuerzas que actúan sobre cada una de ellas? ¿Qué pasará a las fuerzas si la distancia entre las masas se reduce a la mitad? ¿Cómo serán, en comparación, las aceleraciones que adquirirán las masas?

✧✧✧⟡⟡⟡⟡⟡✧✧✧

Las fuerzas de atracción gravitatoria son iguales en intensidad pero de signo contrario.

Como la fuerzas de atracción gravitatoria son inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia que las separa, si la distancia de separación se reduce a la mitad, la fuerza atractiva se cuadriplica.

Sea: $m_1 = 2m_2$ y g_1 = aceleración de la gravedad de la masa m_1 sobre m_2 y g_2 al contrario.

$\frac{g_1}{g_2} = \frac{G\frac{m_1}{d^2}}{G\frac{m_2}{d^2}} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{2m_2}{m_2} = 2 \Rightarrow g_1 = 2g_2$ la aceleración que la primera provoca sobre la segunda es el doble de la aceleración que la segunda ejerce sobre la primera.

Si además las distancias se reducen a la mitad el efecto se cuadriplicará y será ocho veces mayor.

✧✧✧⌖⌖⌗⌖⌖✧✧✧

15 Un avaro mercachifle idea, según él, el «negocio del siglo». Se trata de comprar oro en el ecuador y establecer un mercado de reventa en la Antártida (polo Sur). ¿De qué manera lograría obtener algún beneficio? ¿Cómo conseguirías evitar que te timara sin tener que hacer cálculos?

✧✧✧⌖⌖⌗⌖⌖✧✧✧

Si al adquirir y vender el oro lo pesase mediante una báscula, ya que el peso es el producto de la masa por la aceleración de la gravedad ($P = mg$) y $g_{ecuador} < g_{Antártida}$ estaría comprando menos en el ecuador y vendiendo más en la Antártica (siendo lamisca masa de oro). Para evitar el timo la compraventa debería realizarse con una balanza que mide masas ya que g es la misma para ambos platillos se encuentre dónde se encuentre.

✧✧✧⌖⌖⌗⌖⌖✧✧✧

16 ¿Dónde será mayor el período de un péndulo, en el ecuador o en los polos?

✧✧✧⌖⌖⌗⌖⌖✧✧✧

Como el período de un péndulo simple de longitud l pequeña es = $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ y $g_{ecuador} < g_{Polos}$ ya que el radio de la Tierra en los polotes ligeramente menor debido a su achatamiento, el período en el ecuador es mayor que en los polos pues T es inversamente proporcional a la raíz de g.

✧✧✧⌖⌖⌗⌖⌖✧✧✧

17 Imagínate que la ESA (Agencia Espacial Europea) organiza un concurso de ideas en los centros de enseñanza sobre posibles experimentos para llevar a cabo en un satélite que se halle en órbita alrededor de la Tierra. Alguien propone analizar el movimiento de un péndulo en el interior del satélite. ¿Qué te parece la idea?

✧✧✧⌖⌖⌗⌖⌖✧✧✧

Como g es un vector y el satélite está cayendo hacia la Tierra la fuerza peso y la centrífuga se equilibran pues son iguales en módulo y dirección pero de distinto sentido de manera que el péndulo no oscilaría y ahí se terminaría el experimento es decir el único experimento a realizar sería que el péndulo se mantiene en la posición separada de la equilibrio que lo dejásemos.

✧✧✧⌖⌖⌗⌖⌖✧✧✧

18 ¿Qué le ocurriría a un péndulo si, de repente, la Tierra aumentara su velocidad de rotación? ¿Se vería afectado el péndulo si se encontrara en los polos?

✧✧✧⌖⌖⌗⌖⌖✧✧✧

Al aumentar la rotación la aceleración de la gravedad se contrarrestaría por la aceleración centrífuga (menos en los polos que están en el eje de rotación) luego el período de los péndulos aumentará ya que es inversamente proporcional a la raíz de g, $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Como el eje de rotación de la Tierra pasa por los polos, estos no giran y la gravedad sería la misma con lo que el período de los péndulos en los polos no se modificaría.

✧✧✧⌖⌖⌗⌖⌖✧✧✧

19 Imagínate que un planeta aumentara de tamaño sin alterar su densidad. ¿Se elevaría o disminuiría el peso de los cuerpos en su superficie?

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

Como $d = \frac{m}{V} \Rightarrow m = d \cdot V$ si d = cte y V ⇑ la masa m del planeta también aumenta y como:

$$g = G\frac{m}{r^2} = G\frac{d \cdot V}{r^2} = G\frac{d \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{r^2} = \frac{4\pi}{3}G \cdot d \cdot r \Rightarrow r \Uparrow \Rightarrow g \Uparrow$$ y el peso, P = m·g, también aumenta.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

20 ¿Podríamos usar una balanza de brazos iguales para comparar dos masas en una nave en órbita?

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

Como hemos dicho en la cuestión 17 el peso en una nave en órbita se equilibra con la fuerza centrífuga, luego los brazos de la balanza no se moverían y no podríamos comparar masas.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

21 Unos astronautas, al llegar a un planeta desconocido de gran tamaño, ponen su nave a orbitar a baja altura del planeta y con los motores desconectados. ¿Cómo podrían estimar la densidad del planeta usando solo un reloj?

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

En una órbita estacionaria la fuerza de atracción gravitatoria se equilibra con la fuerza centrífuga debida al giro:

$$Fg = Fc \Rightarrow G\frac{m \cdot M}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \Leftrightarrow v = \sqrt{G\frac{M}{r}} = \sqrt{G\frac{d \cdot V}{r}} = \sqrt{G\frac{d \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{r}} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}G \cdot r^2 \cdot d} = 2r\sqrt{\frac{\pi}{3}G \cdot d}$$

Como el período es $T = \frac{2\pi \cdot r}{v} = \frac{2\pi \cdot r}{2r\sqrt{\frac{\pi}{3}G \cdot d}} = \pi\sqrt{\frac{3}{\pi G d}}$ si miden el tiempo que tardan en dar una vuelta completa alrededor del planeta, o sea el período pueden estimar la densidad media del planeta supuesto homogéneo:

$$d = \frac{3\pi}{GT^2}$$

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

22 ¿Qué condición cumplen los satélites que emiten señales de TV? ¿A qué distancia deben orbitar?

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

Han de ser satélites geoestacionarios, es decir orbitar en órbitas geoestacionarias en que el período sea un día solar y sobre el ecuador.

El periodo orbital de los satélites depende de su distancia a la Tierra. Cuanto más cerca esté, más corto es el periodo. Los primeros satélites de comunicaciones tenían un periodo orbital que no coincidía con el de rotación de la Tierra sobre su eje, por lo que tenían un movimiento aparente en el cielo; esto hacía difícil la orientación de las antenas, y cuando el satélite desaparecía en el horizonte la comunicación se interrumpía.

Existe una altura para la cual el periodo orbital del satélite coincide exactamente con el de rotación de la Tierra. Esta altura es de 35.865 kilómetros. La órbita correspondiente se conoce como el cinturón de Clarke, ya que fue el famoso escritor de ciencia ficción Arthur C. Clarke el primero en sugerir esta idea en el año 1945. Vistos desde la tierra, los satélites que giran en esta órbita parecen estar inmóviles en el cielo, por lo que se les llama **satélites geoestacionarios**. Esto tiene dos ventajas importantes para las comunicaciones: permite el uso de antenas fijas, pues su orientación no cambia y asegura el contacto permanente con el satélite.

$$Fg = Fc \Rightarrow G\frac{m \cdot M}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \Leftrightarrow v = \sqrt{G\frac{M}{r}} \quad T = \frac{2\pi \cdot r}{v} = \frac{2\pi \cdot r}{\sqrt{G\frac{M}{r}}} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G \cdot M}} \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}$$

Por otro lado $g_0 = G\frac{M}{R_T^2} \Leftrightarrow GM = g_0 \cdot R_T^2$ luego $r = \sqrt[3]{\frac{g_0 \cdot R_T^2 T^2}{4\pi^2}}$ que son todos valores conocidos, al sustituirlos tenemos $r = \sqrt[3]{\frac{9{,}8 \cdot (6{,}37 \cdot 10^6)^2 (24 \cdot 60 \cdot 60)^2}{4\pi^2}} = 42{,}24 \cdot 10^6\,m$ que al restar el radio terrestre arroja una distancia aproximada de 35.865 kilómetros.

✧✧✧⌖⌖⌗⌖⌖✧✧✧

23 ¿Cuánto dura el día lunar? ¿Cuál es el motivo de que tenga esa duración?

✧✧✧⌖⌖⌗⌖⌖✧✧✧

Para saber la duración del día lunar, primero debe saberse **respecto a qué está medido**. Lo que se quiere obtener aquí es la duración del tiempo en el movimiento de la Luna respecto a nosotros, es decir, el tiempo que tarda la Luna en estar en una posición respecto a nosotros, hasta que vuelve a estar. Podemos tomar en cuenta la duración del movimiento de la Luna respecto a las estrellas (por ejemplo), y el movimiento de las estrellas respecto a nosotros; y así estaríamos tomando como referencia a las estrellas.

Sabemos que un día sideral dura 86164 seg. que es lo mismo que 23.9344 horas; si dividimos 360° entre lo que dura un día sideral encontraremos que la velocidad angular de las estrellas respecto a nosotros es de 15.0411°/hr.

Sabemos también que la Luna se retrasa 13.17636 °/día (que es lo mismo que 0.549015 °/hr) respecto a las estrellas, es decir, que se mueve al Este respecto a las estrellas, y así, si tomamos en cuenta que el movimiento hacia el Oeste es el movimiento directo, entonces el movimiento de la Luna respecto a las estrellas llevará un signo negativo; de esta forma, tenemos que el movimiento relativo de la Luna respecto a nosotros, será el de las estrellas respecto a nosotros, menos el de la Luna respecto a las estrellas:

Mov. rel. Luna/Tierra = 15.0411 °/hr - 0.54901 °/hr = 14.492085 °/hr

Y ahora, como la Luna recorre 14.492085 grados en una hora, nos falta ver en cuánto tiempo recorrerá 360° (y así pueda completar una vuelta entera respecto a nosotros). Haciendo una simple regla de tres, vemos que el día lunar dura aproximadamente **24hr 50min y 28seg**.

✧✧✧⌖⌖⌗⌖⌖✧✧✧

24 ¿Sería posible situar un satélite estacionario sobre nuestro país?

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

No es posible situar un satélite estacionario sobre España ya que ha de estar en una órbita geoestacionaria en que el período sea un día solar y sobre el ecuador.

Una **órbita geoestacionaria** o **GEO** es una órbita geosíncrona directamente encima del ecuador terrestre, con una excentricidad nula.

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

25 ¿Qué pasaría si desde una nave orbital se dejase caer un objeto?

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

Al dejar un objeto desde una nave espacial permanecería flotando (en el caso ideal) y cayendo hacia la Tierra a medida que va perdiendo energía y velocidad de giro.

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

26 En la superficie terrestre, para equilibrar una balanza de platillos que contiene cierto cuerpo, ha sido preciso utilizar pesas por valor de 2,352 kg. ¿Qué pesas deberíamos utilizar para equilibrar esa balanza con ese mismo cuerpo en la Luna?

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

Como la balanza mide masas al ser la fuerza de atracción gravitatoria la misma sobre ambos platillos, en la Luna también deberíamos utilizar pesas por valor de 2,352 kg.

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

27 Compara el efecto de marea que la Tierra produce sobre la Luna con el que la Luna ejerce sobre la Tierra. ¿Aclara el resultado por qué la Tierra no muestra siempre la misma cara a la Luna y, sin embargo, esta sí lo hace?

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

De la misma manera que la Luna crea mareas en la Tierra, tanto acuáticas como terrestres, la Tierra también ejerce mareas sobre la Luna.

La aceleración con que la Luna atrae a la Tierra es: $a_T = G\frac{M_L}{d_{TL}^2}$ y la inversa, la de la Tierra sobre la Luna es $a_T = G\frac{M_T}{d_{TL}^2}$, como la distancia Tierra-Luna (d_{TL}) es la misma y $M_T > M_L$ la atracción de la Tierra sobre la Luna será mayor y las mareas en la Luna también serán mayores.

La fricción debida a esas mareas frenó la rotación de la Luna, provocando que esta presente siempre la misma cara hacia la Tierra. El efecto de las mareas a largo plazo, es que la energía es disipada por la fricción en los océanos y en el terreno, y la distorsión de la Luna por las fuerzas de marea de la Tierra. Esto frena la rotación de la Tierra y aleja a la Luna de la Tierra. La Tierra pierde energía rotacional, la que es entregada a la Luna. Eventualmente la rotación de la Tierra será frenada hasta que sea igual al período orbital de la Luna. La Tierra entonces tendrá siempre la misma cara hacia la Luna, de la misma forma en que la Luna ya muestra siempre la misma cara hacia la Tierra. Después de eso el sistema perderá energía lentamente de forma que la Luna se acercará a la Tierra nuevamente.

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

28 Según se desprende del resultado de mediciones gravimétricas efectuadas en la Luna, la corteza de la cara visible tiene un grosor de unos 60 km, mientras que en la cara oculta es de unos 100 km. Esto se correspondería con la existencia de un mayor grosor del manto en la cara visible. ¿Se te ocurre alguna explicación?

Debido a la atracción de la Tierra sobre la Luna, en una fase temprana líquida de su evolución las mareas en la Luna (ver cuestión anterior) produjeron ese achatamiento.

De cálculo

29 Calcula la masa de Marte sabiendo que Fobos, uno de sus dos satélites, completa una órbita de 9300 km de radio cada 0,32 días.

$$Fg = Fc \Rightarrow G\frac{m \cdot M}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \Leftrightarrow v = \sqrt{G\frac{M}{r}} \quad T = \frac{2\pi \cdot r}{v} = \frac{2\pi \cdot r}{\sqrt{G\frac{M}{r}}} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G \cdot M}} \Leftrightarrow M = \frac{4\pi^2 \cdot r^3}{GT^2}$$

$$M = \frac{4\pi^2 \cdot r^3}{GT^2} = \frac{4\pi^2 \cdot (9{,}3 \cdot 10^6)^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11}(0{,}32 \cdot 24 \cdot 3600)^2} = 6{,}228 \cdot 10^{23}\ \text{kg}$$

30 Determina cuántas veces es mayor la masa solar que la terrestre a partir de los datos orbitales de la Luna alrededor de la Tierra y de esta alrededor del Sol.

Distancia Tierra-Luna = d = 384 000 km = $3{,}84 \cdot 10^8$m.
Distancia Sol-Luna = D = 149 600 000 km = $1{,}496 \cdot 10^{11}$m.
Período de giro de la Luna alrededor de la Tierra = T_T = 27, 31 días.
Período de giro de la Luna alrededor del Sol = T_S = 365 días.

Hemos visto en el ejercicio anterior que la masa (M) de un astro alrededor del que orbita otro viene dada por la fórmula: $M = \frac{4\pi^2 \cdot r^3}{GT^2}$ si la aplicamos para comparar las masas del Sol y la Tierra considerando la Luna como satélite de ambos:

$$\frac{M_S}{M_T} = \frac{\frac{4\pi^2 \cdot D^3}{GT_S^2}}{\frac{4\pi^2 \cdot d^3}{GT_T^2}} = \left(\frac{D}{d}\right)^3 \cdot \left(\frac{T_T}{T_S}\right)^2 = \left(\frac{1{,}496 \cdot 10^{11}}{3{,}84 \cdot 10^8}\right)^3 \cdot \left(\frac{27{,}31\text{días}}{365\text{días}}\right)^2 = 331023{,}46 \approx 3{,}31 \cdot 10^5 \Rightarrow M_S = 3{,}31 \cdot 10^5 M_T$$

31 ¿Cuál sería la masa de la Tierra, comparada con la real, para que la Luna girase en torno a nuestro planeta con el período actual, pero a una distancia dos veces mayor?

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

Aplicamos la fórmula del ejercicio anterior para comparar:

$$\frac{M}{M_T}=\frac{\dfrac{4\pi^2\cdot D^3}{GT_T^2}}{\dfrac{4\pi^2\cdot d^3}{GT_T^2}}=\left(\frac{D}{d}\right)^3=\left(\frac{2d}{d}\right)^3=2^3=8\Rightarrow M=8\cdot M_T$$

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

32 El satélite de Júpiter llamado Io orbita a una distancia del centro planetario de 422 000 km, con un período de revolución de 1,77 días. Con estos datos, calcula a qué distancia se encuentra Europa, otra de sus lunas, si su período de revolución es de 3,55 días.

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

Ahora usamos la fórmula obtenida en el ejercicio 29 para comparar distancias de giro y período:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G\cdot M}}\Leftrightarrow r=\sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}$$

$$\frac{r_E}{r_I}=\frac{\sqrt[3]{\dfrac{GM_JT_E^2}{4\pi^2}}}{\sqrt[3]{\dfrac{GM_JT_I^2}{4\pi^2}}}=\sqrt[3]{\left(\frac{T_E}{T_I}\right)^2}=\sqrt[3]{\left(\frac{3{,}55}{1{,}77}\right)^2}=1{,}59\Rightarrow r_E=1{,}59\cdot r_I=1{,}59\cdot 422000\text{ km}=671\ 144\text{ km.}$$

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

33 La masa de Saturno es 95,2 veces la de la Tierra. Encélado y Titán, dos de sus satélites, tienen períodos de revolución de 1,37 días y 15,95 días, respectivamente. Determina a qué distancia media del planeta orbitan estos satélites.

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

$$r_E=\sqrt[3]{\frac{GM_{Sat.}T_E^2}{4\pi^2}}=\sqrt[3]{\frac{G\cdot 95{,}2M_T.T_E^2}{4\pi^2}}=\sqrt[3]{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot 95{,}2\cdot 6\cdot 10^{24}(1{,}37\cdot 24\cdot 3600)^2}{4\pi^2}}=2{,}38\cdot 10^8\text{ m.}$$

$$r_T=\sqrt[3]{\frac{GM_{Sat.}T_T^2}{4\pi^2}}=\sqrt[3]{\frac{G\cdot 95{,}2M_T.T_T^2}{4\pi^2}}=\sqrt[3]{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot 95{,}2\cdot 6\cdot 10^{24}(15{,}95\cdot 24\cdot 3600)^2}{4\pi^2}}=1{,}224\cdot 10^9\text{ m.}$$

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

34 En la superficie de un planeta cuyo radio es 1/3 del de la Tierra, la aceleración gravitatoria es de 5,8 m/sz. Determina:

a) La relación entre las masas de ambos planetas.

b) La altura desde la que debería caer un objeto en el planeta para que llegara a su superficie con la misma velocidad con que lo haría en la Tierra un cuerpo que se precipita desde 50 m de altura.

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

a) $\dfrac{g_P}{g_T}=\dfrac{G\dfrac{M_P}{R_P^2}}{G\dfrac{M_T}{R_T^2}}=\dfrac{M_P}{M_P}\left(\dfrac{R_T}{R_P}\right)^2 \Leftrightarrow \dfrac{M_P}{M_P}=\dfrac{g_P}{g_T}\cdot\left(\dfrac{R_P}{R_T}\right)^2=\dfrac{5{,}8}{9{,}8}\left(\dfrac{R_T/3}{R_T}\right)^2=\dfrac{5{,}8}{9{,}8}\cdot\dfrac{1}{9}=0{,}0656$

b) $v_T=\sqrt{2g_Th_T}=v_P=\sqrt{2g_Ph_P} \Leftrightarrow \dfrac{h_P}{h_T}=\dfrac{g_T}{g_P}=\dfrac{9{,}8}{5{,}8} \Leftrightarrow h_P=\dfrac{9{,}8}{5{,}8}\cdot h_T=\dfrac{9{,}8}{5{,}8}\cdot 50\text{m}=84{,}48\text{ m.}$

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

35 El Apolo VIII orbitó en torno a la Luna a una altura de su superficie de 113 km. Si la masa lunar es 0,012 veces la terrestre y su radio es 0,27 veces el terrestre, calcula:

a) El período de su órbita.
b) Su velocidad orbital y su velocidad angular.

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

h = 113 km = 113 000 m

a) $T=2\pi\sqrt{\dfrac{r^3}{G\cdot M_L}}=2\pi\sqrt{\dfrac{(R_L+h)^3}{G\cdot M_L}}=2\pi\sqrt{\dfrac{(0{,}27R_T+h)^3}{0{,}012G\cdot M_T}}=2\pi\sqrt{\dfrac{(0{,}27R_T+h)^3}{0{,}012\cdot g_0\cdot R_T^2}}=2\pi\sqrt{\dfrac{(0{,}27\cdot 6{,}37\cdot 10^6+1{,}13\cdot 10^5)^3}{0{,}012\cdot 9{,}8\cdot (6{,}37\cdot 10^6)^2}}=7137$ s.

b) $\omega=\dfrac{2\pi}{T}=\dfrac{2\pi}{7137\text{s}}=8{,}8\cdot 10^{-4}\dfrac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow v=\omega r=8{,}8\cdot 10^{-4}\dfrac{\text{rad}}{\text{s}}\cdot(0{,}27\cdot 6{,}37\cdot 10^6+1{,}13\cdot 10^5)=1614\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

36 Con los datos ofrecidos en el ejercicio anterior, calcula:

a) La distancia que recorrería un cuerpo en un segundo cayendo libremente en la superficie lunar.
b) La altura a la que ascendería un cuerpo lanzado verticalmente si con esa velocidad se eleva en la Tierra hasta 20 m.

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

a) Necesitamos hallar la intensidad gravitatoria en la Luna:

$$g_L=G\frac{M_L}{R_L^2}=G\frac{0{,}012M_T}{(0{,}27R_T)^2}=\frac{0{,}012}{0{,}0729}\cdot G\frac{M_T}{R_T^2}=0{,}165g_0=0{,}165\cdot 9{,}8=1{,}61\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Ahora $h=\dfrac{1}{2}g_L\cdot t^2=\dfrac{1}{2}\cdot 1{,}61\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 1^2\text{s}^2=0{,}81\text{ m.}$

b) Hallamos la velocidad inicial necesaria para alcanzar 20 m en la Tierra:

$$v^2-v_0^2=2g_0h \Leftrightarrow v_0=\sqrt{2g_0h}=\sqrt{2\cdot 9{,}8\cdot 20}=19{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Y con esta velocidad hallamos la altura que alcanzaría el cuerpo en la Luna:

$$v^2 - v_0^2 = -2g_L h \Leftrightarrow h = \frac{v_0^2}{2g_L} = \frac{19{,}8^2}{2\cdot 1{,}61} = 121{,}75\ \text{m}$$

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

37 Considerando que la densidad media de la Tierra es de 5 500 kg/m^3, y teniendo en cuenta el valor de su radio, haz una estimación del valor de la constante G.

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

Partimos de que $g_0 = 9{,}8\ \text{m/s}^2$

$$g_0 = G\frac{M_T}{R_T^2} \Leftrightarrow G = \frac{g_0\cdot R_T^2}{M_T} = \frac{g_0\cdot R_T^2}{\rho\cdot V} = \frac{g_0\cdot R_T^2}{\rho\cdot \frac{4}{3}\pi R_T^3} = \frac{3}{4\pi}\cdot\frac{g_0}{\rho\cdot R_T} = \frac{3}{4\pi}\cdot\frac{9{,}8}{5500\cdot 6{,}37\cdot 10^6} = 6{,}68\cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}$$

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

38 La masa del planeta Saturno es 95,2 veces la de la Tierra, su radio es 9,4 veces el terrestre, y su distancia media al Sol es de 1 427 000 000 km. Calcula:

a) La duración de su año en días terrestres.
b) El valor de la gravedad en su superficie en relación con el terrestre.

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

Masa de Saturno = M_S = 95,2 M_T.
Radio de Saturno = R_S = 9,4 R_T.
Distancia de Saturno al Sol = r = 1 427 000 000 km = 1,427 ·10^{12} m.

a) $$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G\cdot M_{Sol}}} = 2\pi\sqrt{\frac{(1{,}427\cdot 10^{12})^3}{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 2\cdot 10^{30}}} = 9{,}27\cdot 10^8\ \text{s} = 10733\ \text{días}\ .$$

b) $$\frac{g_S}{g_T} = \frac{G\frac{M_S}{R_S^2}}{G\frac{M_T}{R_T^2}} = \frac{M_S}{M_T}\cdot\left(\frac{R_T}{R_S}\right)^2 = \frac{95{,}2\cdot M_T}{M_T}\cdot\left(\frac{R_T}{9{,}4\cdot R_T}\right)^2 = 95{,}2\cdot\left(\frac{1}{9{,}4}\right)^2 = 1{,}078\ .$$

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

39 Una masa cae con una aceleración de 3,7 m/s^2 sobre la superficie de un planeta sin atmósfera cuyo radio es 0,4 veces el terrestre.

a) ¿Cómo es la masa de este planeta en relación con la terrestre?
b) ¿Qué velocidad debería llevar una nave para orbitar a 500 km sobre la superficie del planeta?
c) ¿Cuánto tardaría en efectuar una órbita completa a esa altura?

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

$g_P = 3{,}7\ \text{m/s}^2$.
$R_P = 0{,}4\ R_T$.

a) $$\frac{g_P}{g_T} = \frac{G\dfrac{M_P}{R_P^2}}{G\dfrac{M_T}{R_T^2}} = \frac{M_P}{M_T}\cdot\left(\frac{R_T}{R_P}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{M_P}{M_T} = \frac{g_P}{g_T}\cdot\left(\frac{R_P}{R_T}\right)^2 = \frac{g_P}{g_T}\cdot\left(\frac{0,4R_T}{R_T}\right)^2 = \frac{3,7}{9,8}\cdot 0,4^2 = 0,06\,.$$

b) $$v_{orbital} = \sqrt{G\frac{M_P}{R_P + h}} = \sqrt{G\frac{0,06M_T}{0,4R_T + h}} = \sqrt{6,67\cdot 10^{-11}\frac{0,06\cdot 6\cdot 10^{24}}{0,4\cdot 6,37\cdot 10^{6} + 5\cdot 10^{5}}} = 2806,8\,\frac{m}{s}\,.$$

c) $$T = 2\pi\sqrt{\frac{(R_P + h)^3}{G\cdot M_P}} = 2\pi\sqrt{\frac{(0,4\cdot R_T + h)^3}{G\cdot 0,06\cdot M_T}} = 2\pi\sqrt{\frac{(0,4\cdot 6,37\cdot 10^{6} + 5\cdot 10^{5})^3}{6,67\cdot 10^{-11}\cdot 0,06\cdot 6\cdot 10^{24}}} = 6823\text{ s} = 0,079\text{ días}\,.$$

40 Supongamos que la Tierra tiene una densidad media p. Determina cuál sería el valor de g sobre su superficie si:

a) El diámetro fuese la mitad y la densidad fuese la misma.
b) El diámetro fuese el doble sin variar la densidad.

Como $$g = G\frac{M}{R^2} = G\frac{\rho\cdot V}{R^2} = G\frac{\rho\cdot\frac{4}{3}\pi R^3}{R^2} = \frac{4\pi}{3}G\cdot\rho\cdot R$$

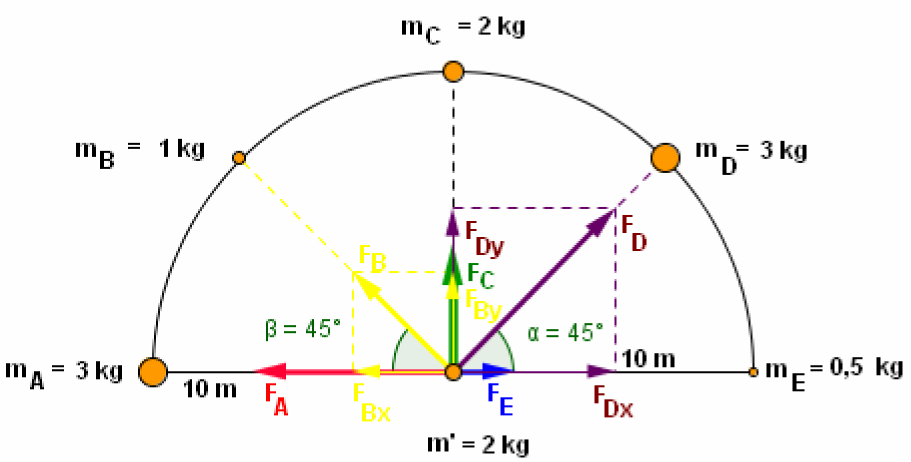
a) $\rho_1 = \rho$; $D_1 = D/2$ y $R_1 = R/2$.

$$\frac{g_1}{g} = \frac{\frac{4\pi}{3}G\cdot\rho_1\cdot R_1}{\frac{4\pi}{3}G\cdot\rho\cdot R} = \frac{\rho_1\cdot R_1}{\rho\cdot R} = \frac{\rho\cdot\frac{R}{2}}{\rho\cdot R} = \frac{1}{2} \Rightarrow g_1 = \frac{1}{2}g.$$

b) $\rho_1 = \rho$; $D_1 = 2D$ y $R_1 = 2R$.

$$\frac{g_1}{g} = \frac{\frac{4\pi}{3}G\cdot\rho_1\cdot R_1}{\frac{4\pi}{3}G\cdot\rho\cdot R} = \frac{\rho_1\cdot R_1}{\rho\cdot R} = \frac{\rho\cdot 2R}{\rho\cdot R} = 2 \Rightarrow g_1 = 2g.$$

41 Determina la fuerza que actúa sobre la masa m' de la distribución que se aprecia en la figura.



Las fuerzas que actúan sobre m' se han dibujado en la figura con su dirección y sentido, de manera que sólo hemos de hallar el módulo de las fuerzas resultantes según los ejes:

Eje horizontal:

$$R_x = F_E + F_{Dx} - F_A - F_{Bx} = \frac{G\cdot m'}{R^2}(m_E + m_D\cos 45^o - m_A - m_B\cos 45^o) = \frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 2}{10^2}(0{,}5 + 3\cos 45^o - 3 - 1\cos 45^o) = -$$

$1{,}45\cdot 10^{-12}$N.

$$R_y = F_C + F_{Dy} + F_{By} = \frac{G\cdot m'}{R^2}(m_C + m_D\text{sen}45^o + m_B\text{sen}45^o) = \frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 2}{10^2}(2 + 3\text{sen}45^o + 1\cdot\cos 45^o) = 6{,}44\cdot 10^{-12}\text{ N}.$$

Luego la fuerza resultante sobre m' es:

$$\vec{F} = R_x\,\vec{i} + R_Y\,\vec{j} = -1{,}45\cdot 10^{-12}\,\vec{i} + 6{,}44\cdot 10^{-12}\,\vec{j}\text{ N} \Rightarrow F = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{\left(-1{,}45\cdot 10^{-12}\right)^2 + \left(6{,}44\cdot 10^{-12}\right)} = 6{,}60\cdot 10^{-12}\text{ N}.$$

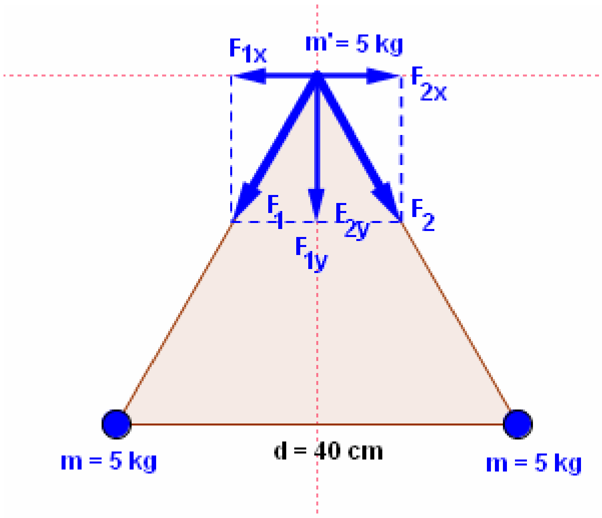
✧✧✧⌖⌖⌗⌖⌖✧✧✧

42 Dos masas puntuales iguales de 5 kg se encuentran situadas en los vértices inferiores de un triángulo equilátero de 40 cm de lado. Si se coloca en el vértice superior una tercera masa m':

a) ¿Qué aceleración adquiere esta última masa en ese punto (exprésala en notación vectorial)?

b) ¿Descenderá con aceleración constante?

c) ¿Qué aceleración tendrá en el momento de llegar a la base del triángulo?



✧✧✧⌖⌖⌗⌖⌖✧✧✧

a) Para hallar la aceleración primero hemos de hallar la fuerza resultante que actúa sobre la masa m'. En la figura se han dibujado las fuerzas que actúan y su descomposición sobe los ejes colocados en la posición de m'. Como el triángulo es equilátero $F_{1x} = F_{2X}$ es decir en la dirección del eje horizontal la resultante es nula y según el eje y el doble de una de ellas y hacia abajo, su módulo:

$$F_y = F_{1y} + F_{2y} = 2F_{1y} = 2\cdot G\frac{m_1\cdot m'}{d^2}\cdot\text{sen}60^o = 2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{5\cdot m'}{0{,}4^2}\cdot\text{sen}30^o = 3{,}61\cdot 10^{-9}\,m'\text{ N}.$$

Luego la resultante es: $F = -3{,}61\cdot 10^{-9}\cdot m'\,\vec{j}$ N

La aceleración: $\vec{F} = m'\cdot\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m'} = \frac{-3{,}61\cdot 10^{-9}\cdot m'\,\vec{j}\text{ N}}{m'\text{kg}} = -3{,}61\cdot 10^{-9}\cdot m'\,\vec{j}\,\frac{m}{s^2}$

b) Como al ir bajando la distancia de m' a las otras dos masa es variable y depende del tiempo, la aceleración no será constante ya que la fuerza atractiva resultante no lo será.

c) Cuando llegue a la base del triángulo la fuerza resultante es nula (las dos fuerzas son de la misma dirección de sentido contrario e igual módulo) y por tanto no se imprime aceleración.

✧✧✧⌖⌖⌗⌖⌖✧✧✧