ACTIVIDADES

1 A la vista de la figura, ¿en qué punto del epiciclo se vería más brillante el planeta desde la Tierra? ¿En qué zona del epiciclo parecería retrogradar el planeta si el centro del epiciclo no se moviera?

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

En el punto B que es punto en que está más cercano.

Cuando girase en sentido contrario al movimiento de la Tierra, es decir en la semicircunferencia de A a B.

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

2 Los seis meses transcurridos entre el 21 de marzo y el 21 de septiembre tienen más días que los comprendidos entre el 21 de septiembre y el 21 de marzo. ¿Se te ocurre alguna razón? ¿Entre qué fechas estará más próxima la Tierra al Sol?

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

Es consecuencia de la segunda ley de Kepler o ley de las áreas:

El radio vector que une el Sol y el planeta barre áreas iguales en tiempos iguales, es decir la velocidad aerolar permanece constante

En el afelio (máxima distancia) la velocidad es mínima y en el perihelio máxima luego las duraciones de las estaciones son distintas.

Está más cerca del Sol a primeros de Enero

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

3 Un cuerpo de 2 kg de masa se mueve a lo largo de una recta con una velocidad constante $\vec{v} = 3\,\vec{j}$ m/s. Determina su momento angular con respecto al origen (0, 0) cuando el cuerpo está en los puntos (2, 0), (2,1) y (2, 2) de la misma recta. ¿Qué conclusión obtienes respecto del momento angular de un cuerpo que se mueve con movimiento rectilíneo uniforme?

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

Primero hallamos los vectores de posición de los tres puntos: $\begin{cases} \vec{r}_1 = 2\,\vec{i} \\ \vec{r}_2 = 2\,\vec{i} + \vec{j} \\ \vec{r}_3 = 2\,\vec{i} + 2\,\vec{j} \end{cases}$

La cantidad de movimiento es $\vec{p} = m\cdot\vec{v} = 2\text{kg}\cdot 3\,\vec{j}\,\frac{m}{s} = 6\,\vec{j}\,\text{kg}\cdot\frac{m}{s}$.

Luego los momentos angulares de los tres puntos son:

$$\vec{L}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 12\,\vec{k}\,\frac{kg\cdot m^2}{s};\ \vec{L}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 12\,\vec{k}\,\frac{kg\cdot m^2}{s};$$

$$\vec{L}_3 = \vec{r}_3 \times \vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 12\,\vec{k}\,\frac{kg\cdot m^2}{s}$$

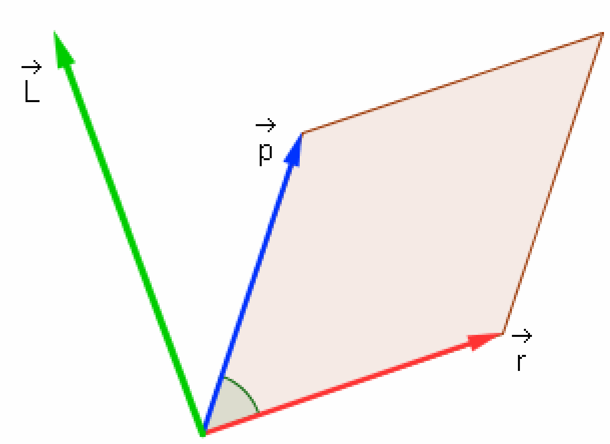
Si un cuerpo se mueve con movimiento rectilíneo y uniforme su momento angular es constante y perpendicular a la dirección del movimiento.

✧✧✧⌖⌖⌗⌖⌖✧✧✧

4 *Demuestra que el momento angular de una partícula de masa m, que se mueve con velocidad v a lo largo de una recta cuya distancia mínima al origen es d, es constante y tiene por valor L = mvd en cualquier punto de la trayectoria.*

✧✧✧⌖⌖⌗⌖⌖✧✧✧

El módulo de la cantidad de movimiento es $p = m\cdot v = mv kg\cdot\frac{m}{s}$.



Como d es la distancia mínima $\vec{d}$ y $\vec{p}$ son perpendiculares ($\vec{d}$ es perpendicular a $\vec{v}$), luego el módulo del momento angular:

$$L = d\cdot p\,\text{sen}90^\circ = dp = dmv$$

La dirección perpendicular la plano formado por $\vec{d}$ y $\vec{p}$ y el sentido el del avance del sacacorchos al girar de $\vec{d}$ y $\vec{p}$ por el camino más corto.

✧✧✧⌖⌖⌗⌖⌖✧✧✧

5 *¿Permanece constante el momento angular de un electrón en una órbita determinada según el modelo de Bohr? Explícalo.*

✧✧✧⌖⌖⌗⌖⌖✧✧✧

En 1913 Niels Bohr, desarrolló su célebre modelo atómico de acuerdo a cuatro postulados fundamentales:

1. Los electrones orbitan el átomo en niveles discretos y cuantizados de energía, es decir, no todas las órbitas están permitidas, tan sólo un número finito de éstas.
2. Los electrones pueden saltar de un nivel electrónico a otro sin pasar por estados intermedios.
3. El salto de un electrón de un nivel cuántico a otro implica la emisión o absorción de un único cuanto de luz (fotón) cuya energía corresponde a la diferencia de energía entre ambas órbitas.

4. Las órbitas permitidas tienen valores discretos o cuantizados del momento angular orbital L de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$L = n \cdot \hbar = n \cdot \frac{h}{2\pi}$$

Donde n = 1,2,3,… es el número cuántico angular o número cuántico principal.

La cuarta hipótesis asume que el valor mínimo de n es 1. Este valor corresponde a un mínimo radio de la órbita del electrón de 0.0529 nm. A esta distancia se le denomina radio de Bohr. Un electrón en este nivel fundamental no puede descender a niveles inferiores emitiendo energía.

En éste modelo los electrones giran en órbitas circulares alrededor del núcleo; ocupando la órbita de menor energía posible, o sea la órbita más cercana al núcleo posible.

Como los electrones están sometidos a una fuerza central (de naturaleza eléctrica) y describen una órbita circular (radio constante), la velocidad de giro en la órbita permanece constante, si la velocidad es constante la cantidad de movimiento p también lo es y L = mrv también lo será, es decir el módulo del vector momento angular permanece constante en una órbita determinada.

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

6 Teniendo en cuenta tu respuesta a la actividad anterior, ¿puede usarse el valor del momento angular para caracterizar una determinada órbita? ¿Conoces algún número cuántico referido al momento angular?

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

Sí puede usarse el valor de L para caracterizar una órbita ya que su valor es constante y único. El **número cuántico del momento angular** (l), indica la forma de los orbitales y el subnivel de energía en el que se encuentra el electrón, (l = 0,1,2,3,4,5,...,n-1).

El momento angular de un electrón en un átomo, L, está relacionado con su número cuántico l por la siguiente ecuación:

$$L = \frac{h}{2\pi}\sqrt{l(l+1)}$$

donde *h* es la Constante de Planck.

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

7 ¿Qué significado físico tiene el postulado de Bohr según el cual mvr= nh/2π ?

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

Que las órbitas permitidas tienen valores discretos o cuantizados del momento angular orbital L de acuerdo con la ecuación expuesta.

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

8 Determina la posición del centro de masas del sistema constituido por tres partículas de masas $m_1 = 2$ kg, $m_2 = 4$ kg, y $m_3 = 6$ kg, situadas, respectivamente, en los puntos (0, 3, 1), (4, 1, 2) y (5, 0, 0). Expresa su posición en notación vectorial.

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \dfrac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 + m_3 \cdot x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \dfrac{2 \cdot 0 + 4 \cdot 4 + 6 \cdot 1}{2+4+6} = \dfrac{22}{12} = \dfrac{11}{6} \\ y_G = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \dfrac{m_1 \cdot y_1 + m_2 \cdot y_2 + m_3 \cdot y_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \dfrac{2 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 6 \cdot 0}{2+4+6} = \dfrac{10}{12} = \dfrac{5}{6} \Rightarrow \vec{r}_{CM} = \dfrac{11}{6}\vec{i} + \dfrac{5}{6}\vec{j} + \dfrac{5}{6}\vec{k} \\ z_G = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \dfrac{m_1 \cdot z_1 + m_2 \cdot z_2 + m_3 \cdot z_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \dfrac{2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 6 \cdot 0}{2+4+6} = \dfrac{10}{12} = \dfrac{5}{6} \end{cases}$$

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

9 Eligiendo como origen de referencia el centro de la Tierra, y teniendo en cuenta que la masa de la Luna es 0,012 veces la masa de la Tierra, determina a qué distancia del centro de la Tierra se encuentra el centro de masas del sistema Tierra-Luna. Compárala con el radio de la Tierra y saca las conclusiones oportunas.

Datos: distancia Tierra-Luna = 384 000 km; radio terrestre = 6 370 km.

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

$x_{G,T-L} = \dfrac{m_T \cdot x_T + m_L \cdot x_L}{m_T + m_L} = \dfrac{m \cdot 0 + 0{,}012m \cdot 384000}{m + 0{,}012m} = \dfrac{0{,}012m \cdot 384000}{1{,}012m} = \dfrac{0{,}012 \cdot 384000}{1{,}012} = 4553{,}4 \text{ km}$ del centro de la Tierra.

Como esa distancia es menor que el radio terrestre (6 370 km), el centro de masas del sistema se encuentra en el interior de la tierra a una profundidad de 6 370 km – 4 553,3 km = 1 816,7 km.

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

10 Una partícula de 3 kg tiene una velocidad de $2\vec{i} - \vec{j}$ m/s, y otra de 2 kg lleva una velocidad de $\vec{i} + 5\vec{j}$ m/s. ¿Cuál es la velocidad del centro de masas del sistema? ¿Qué momento lineal tiene este?

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

$$\vec{v}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{2} m_i \cdot \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^{2} m_i} = \frac{m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{3 \cdot \left(2\vec{i} - \vec{j}\right) + 2 \cdot \left(\vec{i} + 5\vec{j}\right)}{3+2} = \frac{8}{5}\vec{i} + \frac{7}{5}\vec{j}\ \frac{m}{s}$$

$$\vec{p}_{CM} = (m_1 + m_2) \cdot \vec{v}_{CM} = 5 \cdot \left(\frac{8}{5}\vec{i} + \frac{7}{5}\vec{j}\right) = 8\vec{i} + 7\vec{j}\ \text{kg} \cdot \frac{m}{s}$$

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

11 Una partícula de 4 kg se mueve en la dirección del eje X con una velocidad de 3 m/s, y otra de 2 kg lo hace en la misma dirección con una velocidad de -2 m/s. ¿Cuál es la velocidad del centro de masas? ¿Y el momento lineal total del sistema?

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

$$\vec{v}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{2} m_i \cdot \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^{2} m_i} = \frac{m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{4 \cdot 3\,\vec{i} + 2 \cdot (-2\,\vec{i})}{4+2} = \frac{8}{6}\vec{i} = \frac{4}{3}\vec{i}\,\frac{m}{s}$$

$$\vec{p}_{CM} = (m_1 + m_2) \cdot \vec{v}_{CM} = 6 \cdot \frac{4}{3}\vec{i} = 8\,\vec{i}\ kg \cdot \frac{m}{s}$$

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

12 Tres partículas de masas m_1 = 2 kg, m_2 = 0,5 kg, y m_3 = 1 kg, se mueven según trayectorias determinadas por:

$$\vec{r}_1 = t^2\,\vec{i} - 2t\,\vec{j}\ m \qquad \vec{r}_2 = 3t^3\,\vec{i} - t\,\vec{j} + t^2\,\vec{k}\ m \qquad \vec{r}_3 = 2t\,\vec{i} + 2t\,\vec{j} + t\,\vec{k}\ m$$

Calcula:

a) $\vec{r}_{CM}$ en función del tiempo y en t= 1 s.
b) El momento lineal del sistema en t= 1 s.
c) La fuerza neta que opera sobre el sistema.
d) La aceleración del centro de masas.

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

a)

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{3} m_i \cdot \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{3} m_i} = \frac{m_1 \cdot \vec{r}_1 + m_2 \cdot \vec{r}_2 + m_3 \cdot \vec{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{2 \cdot \left(t^2\,\vec{i} - 2t\,\vec{j}\right) + 0{,}5 \cdot \left(3t^3\,\vec{i} - t\,\vec{j} + t^2\,\vec{k}\right) + 1 \cdot \left(2t\,\vec{i} + 2t\,\vec{j} + t\,\vec{k}\right)}{2 + 0{,}5 + 1} =$$

$$= \frac{(1{,}5t^3 + 2t^2 + 2t)\,\vec{i} - 2{,}5t\,\vec{j} + (0{,}5t^2 + t)\,\vec{k}}{3{,}5} = \frac{(1{,}5t^3 + 2t^2 + 2t)}{3{,}5}\vec{i} - \frac{2{,}5t}{3{,}5}\vec{j} + \frac{0{,}5t^2 + t}{3{,}5}\vec{k}\ m$$

$$\vec{r}_{CM}(t = 1s) = \frac{11}{7}\vec{i} - \frac{5}{7}\vec{j} + \frac{3}{7}\vec{k}\ m.$$

b) Hallamos primero la velocidad del centro de masas derivando el vector posición respecto del tiempo:

$$\vec{v}_{CM}(t) = \frac{d\,\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{d\left(\frac{(1{,}5t^3 + 2t^2 + 2t)}{3{,}5}\vec{i} - \frac{2{,}5t}{3{,}5}\vec{j} + \frac{0{,}5t^2 + t}{3{,}5}\vec{k}\right)}{dt} = \frac{(4{,}5t^2 + 4t + 2)}{3{,}5}\vec{i} - \frac{2{,}5}{3{,}5}\vec{j} + \frac{1t + 1}{3{,}5}\vec{k}$$

Después la velocidad para t = 1 s:

$$\vec{v}_{CM}(1) = 3\,\vec{i} - \frac{5}{7}\vec{j} + \frac{2}{3{,}5}\vec{k}\ \text{m/s}$$

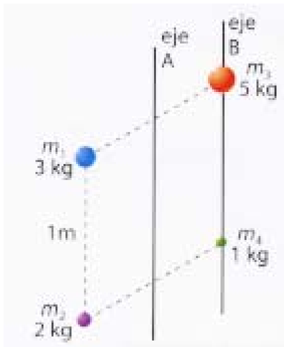
Y ahora hallamos el momento:

$$\vec{p} = (m_1 + m_2 + m_3)\cdot\vec{v}_{CM}(1) = 3{,}5\,\text{kg}\cdot\left(3\,\vec{i} - \frac{5}{7}\vec{j} + \frac{2}{3{,}5}\vec{k}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right) = 10{,}5\,\vec{i} - \frac{17{,}5}{7}\vec{j} + 2\,\vec{k}\ \text{kg·m/s}$$

c) $$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\left(3{,}5\cdot\frac{(4{,}5t^2 + 4t + 2)}{3{,}5}\vec{i} - \frac{2{,}5}{3{,}5}\vec{j} + \frac{1t + 1}{3{,}5}\vec{k}\right)}{dt} = (4{,}5t^2 + 4t + 2)\,\vec{i} + \vec{k}\ \text{N}.$$

d) $$\vec{a}_{CM}(t) = \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \frac{d\left(\frac{(4{,}5t^2 + 4t + 2)}{3{,}5}\vec{i} - \frac{2{,}5}{3{,}5}\vec{j} + \frac{1t + 1}{3{,}5}\vec{k}\right)}{dt} = \frac{(9t + 4)}{3{,}5}\vec{i} + \frac{1}{3{,}5}\vec{k}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

13 ¿Cuánto vale el momento de inercia del sistema de partículas de la figura alrededor del eje A? ¿Y alrededor del eje B?



Eje A

$$I = \sum_{i=1}^{4} m_i \cdot r_i^2 = m_1 \cdot r_1 + m_2 \cdot r_2 + m_3 \cdot r_3 + m_4 \cdot r_4 = 3\cdot 0{,}5^2 + 2\cdot 0{,}5^2 + 5\cdot 0{,}5^2 + 1\cdot 0{,}5^2 =$$

$2{,}75\ \text{kg·m}^2$

Eje B

$$I = \sum_{i=1}^{4} m_i \cdot r_i^2 = m_1 \cdot r_1 + m_2 \cdot r_2 + m_3 \cdot r_3 + m_4 \cdot r_4 = 3\cdot 1^2 + 2\cdot 1^2 + 5\cdot 0 + 1\cdot 0 = 5\,\text{kg·m}^2$$

14 ¿Crees que puede considerarse el momento de inercia una propiedad fundamental de la materia del mismo modo que la masa?

No, ya que depende del eje de rotación que consideremos y estos pueden ser infinitos, el momento de inercia puede tomar infinitos valores.

15 Con el propósito de calcular el momento de inercia de un cuerpo en rotación, ¿puede considerarse la masa del cuerpo como si estuviese concentrada en el centro de masas? ¿Por qué?

No ya que la masa está a distinta distancia del centro de rotación según esté a diferente distancia del centro de masas.

✧✧✧⌖⌖⌗⌖⌖✧✧✧

16 Si dos discos del mismo peso y espesor se hacen de metales de diferentes densidades, ¿tendrán el mismo momento de inercia? Si no es así, demuestra cuál de ellos tiene mayor momento de inercia.

✧✧✧⌖⌖⌗⌖⌖✧✧✧

Como Densidad = d = Masa/volumen = m/V e $I = mr^2$ el momento de inercia depende de la masa y esta a su vez de la densidad que es diferente, luego:

$$I = mr^2 = d \cdot V \cdot r^2$$

Tendrá más momento de inercia el cuerpo más denso.

✧✧✧⌖⌖⌗⌖⌖✧✧✧

17 ¿Existe algún momento de fuerza responsable de la rotación de los planetas y satélites? ¿Qué consecuencias se extraen de tu respuesta?

✧✧✧⌖⌖⌗⌖⌖✧✧✧

Sí existe un momento responsable de la rotación de los planetas es el momento de la fuerza de atracción gravitatoria que al ser de módulo constante produce una rotación de un cuerpo alrededor del otro en una trayectoria circular.

✧✧✧⌖⌖⌗⌖⌖✧✧✧

18 Sobre la polea de la figura se ejerce directamente una fuerza de 30 N. Si el radio de la polea es de 10 cm, su masa es de 1,5 kg, y su momento de inercia viene dado por la expresión $I = 1/2\, mr^2$, ¿cuál será su velocidad angular al cabo de 10 s?

✧✧✧⌖⌖⌗⌖⌖✧✧✧

El momento de la fuerza es $M = F \cdot R$ ya que son perpendiculares, además según la 2ª ley $M = I\alpha$, luego $F \cdot R = I \cdot \alpha$, si despejamos α:

$$\alpha = \frac{F \cdot R}{I} = \frac{F \cdot R}{\frac{1}{2} mR^2} = \frac{30 \cdot 0{,}1}{\frac{1}{2} 1{,}5 \cdot 0{,}1^2} = 400 \frac{rad}{s^2}$$

Y ahora hallamos la velocidad pedida al cabo de t = 10s, teniendo en cuenta que el movimiento es uniformemente variado de rotación:

$$\omega = \omega_0 + \alpha \cdot t = \alpha \cdot t = 400\ rad/s^2 \cdot 10\ s = 4\ 000\ rad/s.$$

✧✧✧⌖⌖⌗⌖⌖✧✧✧

19 Fíjate en la figura. ¿Se obtendría el mismo resultado si en lugar de ejercer directamente una fuerza de 30 N colgáramos un peso de 30 N?

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

Aplicando la segunda ley de la dinámica de rotación M = Iα, tenemos:

$$T \cdot R = I\alpha \qquad (1)$$

Y la de la dinámica aplicada a la pesa:

$$P - T = m \cdot a = m\,\alpha R \qquad (2)$$

Si despejamos la tensión (T) de (1) y la sustituimos en (2):

$$T = \frac{I\alpha}{R} \Rightarrow P - \frac{I\alpha}{R} = m\alpha R \Leftrightarrow mg - \frac{1}{2}mR\alpha = mR\alpha \Leftrightarrow \frac{3}{2}R\alpha = g \Leftrightarrow \alpha = \frac{2g}{3R} = \frac{2 \cdot 9{,}8}{3 \cdot 0.1} = 65\,\frac{rad}{s^2}$$

Y ahora hallamos la velocidad pedida al cabo de t = 10s, teniendo en cuenta que el movimiento es uniformemente variado de rotación:

$$\omega = \omega_0 + \alpha \cdot t = \alpha \cdot t = 65\ rad/s^2 \cdot 10\ s = 650\ rad/s.$$

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

20 ¿Puede un sistema de varias partículas tener una energía cinética distinta de cero y un momento lineal igual a cero? ¿Y tener una energía cinética cero y un momento lineal distinto de cero?

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

Si en el sistema las partículas rotan pero no se trasladan, su energía cinética de rotación será no nula pero su momento lineal sí será nulo, pero al contrario no es posible ya si su memento en no nulo la velocidad ha de ser distinta de cero y por tanto su energía cinética también es no nula.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

21 Compara la energía cinética de rotación terrestre con la de traslación de su centro de masas. Considera que, dado que la densidad del interior terrestre no es uniforme, su momento de inercia es aproximadamente 1/3 mr^2. Datos: radio orbital medio = $1{,}496 \cdot 10^{11}$m; radio terrestre = 6 370 km; masa terrestre = $6 \cdot 10^{24}$ kg.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

Hallamos primero las velocidades angulares y lineales de rotación y traslación:

$$\omega_R = \frac{2\pi R}{T_R} = \frac{2\pi R_T}{1\text{día}} \Rightarrow v_R = \omega_R R_T = \frac{2\pi R_T^2}{86400}; \quad \omega_T = \frac{2\pi d_{TS}}{T_T} = \frac{2\pi d_{TS}}{365\text{día}} \Rightarrow v_T = \omega_T d_{TS} = \frac{2\pi d_{TS}^2}{3{,}1536\cdot 10^7}$$

y, ahora comparamos energías :

$$\frac{Ec_T}{Ec_R} = \frac{\frac{1}{2}Mv_T^2}{\frac{1}{2}I\omega_R^2} = \frac{M_T\left(\frac{2\pi d_{TS}^2}{3{,}1536\cdot 10^7}\right)^2}{\frac{1}{3}M_T R_T^2\cdot\left(\frac{2\pi R_T}{86400}\right)^2} = 3\frac{(86400)^2 d_{TS}^4}{(3{,}1536\cdot 10^7)^2 R_T^4} = 3\frac{(86400)^2}{(3{,}1536\cdot 10^7)^2}\cdot\left(\frac{d_{TS}}{R_T}\right)^4 = 3\frac{(86400)^2}{(3{,}1536\cdot 10^7)^2}\cdot\left(\frac{1{,}496\cdot 10^{11}}{6{,}37\cdot 10^8}\right)^4 =$$

= 68502 veces mayor la energía cinética de traslación que de rotación.

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

22 Teniendo en cuenta los valores de los momentos de inercia ofrecidos en la figura 1.31, compara las velocidades al llegar a la base de un plano inclinado de altura h de una esfera maciza que:

a) Se desliza.
b) Rueda.

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

Aplicamos el principio de conservación de la energía mecánica al punto más alto (1) en que sólo hay energía potencial y a la base del plano inclinado (2) en el cual sólo hay energía cinética:

a) $Em_1 = Em_2$; $Ep_1 = Ec_2$(traslación); $mgh = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{2gh}$.

b) $Em_1 = Em_2$; $Ep_1 = Ec_2$(traslación) + Ec_2(rotación) ; $mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \Leftrightarrow$.

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}mr^2\left(\frac{v}{r}\right)^2 \Leftrightarrow gh = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{5}v^2 = \frac{7}{10}v^2 \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{10}{7}gh}$$

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

23 Resuelve el orden de llegada a la base de un plano inclinado de altura h de los siguientes cuerpos: una esfera maciza, una esfera hueca, un cilindro macizo, un aro y un bloque rectangular de hielo.

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

Hallamos las velocidades con que llegan aplicando el principio de conservación de la energía mecánica:

Esfera maciza

Resuelto en el ejercicio anterior: $v = \sqrt{\frac{10}{7}gh}$

Esfera hueca

$Em_1 = Em_2; Ep_1 = Ec_2(\text{traslación}) + Ec_2(\text{rotación})$; $mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \Leftrightarrow$.

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{3}mr^2(\frac{v}{r})^2 \Leftrightarrow gh = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{3}v^2 = \frac{5}{6}v^2 \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{6}{5}gh}$$

Cilindro macizo

$Em_1 = Em_2; Ep_1 = Ec_2(\text{traslación}) + Ec_2(\text{rotación})$; $mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \Leftrightarrow$.

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}mr^2(\frac{v}{r})^2 \Leftrightarrow gh = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{4}v^2 = \frac{3}{4}v^2 \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$$

Aro

$Em_1 = Em_2; Ep_1 = Ec_2(\text{traslación}) + Ec_2(\text{rotación})$; $mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \Leftrightarrow$.

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mr^2(\frac{v}{r})^2 \Leftrightarrow gh = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}v^2 = v^2 \Leftrightarrow v = \sqrt{gh}$$

Bloque de hielo

$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{2gh}$.

Ordenando de mayor a menor las velocidades tendremos el orden de llegada:

Bloque de hielo $v = \sqrt{2gh}$ $\Rightarrow$ Esfera maciza $v = \sqrt{\frac{10}{7}gh}$ $\Rightarrow$ Cilindro macizo $v = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$ $\Rightarrow$ Esfera hueca $v = \sqrt{\frac{6}{5}gh} \Rightarrow$ Aro $v = \sqrt{gh}$

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

CUESTIONES Y PROBLEMAS

De aplicación

1 *¿Qué innovaciones introdujo Ptolomeo en la teoría geocéntrica? ¿Qué problemas parecían resolver tales innovaciones?*

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

La ciencia griega tenía dos posibilidades en su intento de explicar la naturaleza: la explicación realista, que consistiría en expresar de forma rigurosa y racional lo que realmente se da en la naturaleza; y la explicación positivista, que radicaría en expresar de forma racional lo aparente, sin preocuparse de la relación entre lo que se ve y lo que en realidad es. Ptolomeo afirma explícitamente que su sistema no pretende descubrir la realidad, siendo sólo un método de cálculo. Es lógico que adoptara un esquema positivista, pues su Teoría geocéntrica se opone flagrantemente a la física aristotélica: por ejemplo, las órbitas de su sistema son excéntricas, en contraposición a las circulares y perfectas de Platón y Aristóteles. Su aportación fundamental fue su modelo del Universo: creía que la Tierra estaba inmóvil y ocupaba el centro del Universo, y que el Sol, la Luna, los planetas y las estrellas, giraban a su alrededor. A pesar de ello, mediante la técnica del epiciclo-deferente, cuya invención se atribuye a Apolonio, trató de resolver con bastante éxito los dos grandes problemas del movimiento planetario:

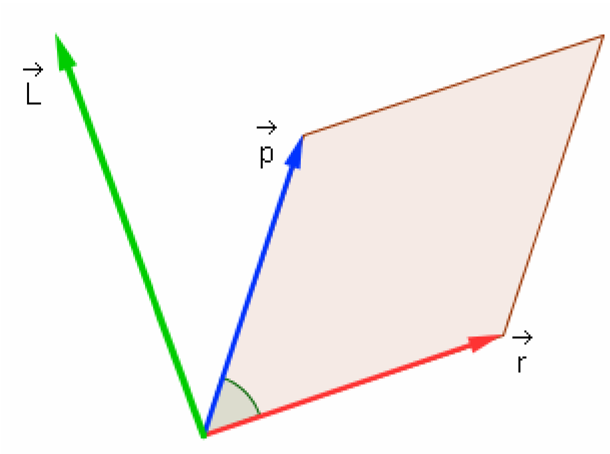
1.- la retrogradación de los planetas y su aumento de brillo, mientras retrogradan.

2.- la distinta duración de las revoluciones siderales.

2 ¿Qué tipo de velocidad parece mantenerse constante en el transcurso del movimiento planetario?

La velocidad aerolar: El radio vector que une el planeta y el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales.

3 ¿Qué magnitud se usa para describir el movimiento de traslación de los planetas? ¿Cómo se define y cuáles son sus características?



El momento angular o cinético: es igual al producto vectorial del vector de posición $\vec{r}$ del objeto en relación a la recta considerada como eje de rotación, por la cantidad de movimiento $\vec{p}$ (también llamado momento lineal o *momento*). Frecuentemente se lo designa con el símbolo $\vec{L}$:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

El vector $\vec{L}$ es perpendicular al plano que contiene $\vec{r}$ y $\vec{v}$, luego es paralelo a la recta considerada como eje de rotación. y el sentido el del avance del sacacorchos al girar de $\vec{r}$ y $\vec{p}$ por el camino más corto.

4 Demuestra que la constancia del momento angular orbital es coherente con la segunda ley de Kepler. Razona si dicha constancia es también coherente con la primera ley.

Partimos del supuesto de que el momento angular es constante $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = cte$, luego también, lo será el cociente $\frac{\vec{L}}{m} = \vec{r} \times \vec{v}$ ya que la masa lo es, pero como la velocidad aerolar es:

$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times \vec{v}\right| = \frac{1}{2}\frac{\left|\vec{L}\right|}{m} = cte$, que es lo que queríamos demostrar.

5 ¿Qué agente dinámico puede producir cambios en el momento angular de un cuerpo?

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

El agente dinámico de la rotación es el momento de la fuerza, luego ese es el agente dinámico que puede producir cambios en el momento angular:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\left(I\vec{\omega}\right)}{dt} = \frac{dI}{dt}\cdot\vec{\omega} + I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\cdot\vec{\alpha}$$

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

6 ¿En qué condiciones se mantiene constante el momento angular? Pon ejemplos de movimientos en los que permanece constante el momento angular.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

Para que el memento angular $\vec{L} = I\cdot\vec{\omega}$ = cte, debe de ser el momento de la fuerza externa nulo (bien por que no actúe momento o bien por que la resultante de los que actúen sea cero) $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ = 0, entonces el momento angular es constante.

Esto ocurre en todos los casos en que no existe momento de la fuerza externa pero sí varía la distribución interna de las masas del sistema, en los giros de los patinadores o acróbatas.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

7 ¿Cuáles son los correspondientes símiles en la dinámica rotacional de los conceptos de fuerza, masa y momento lineal?

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

Conceptos	Dinámica rotacional
Masa	Momento de inercia = I = $m\cdot r^2$
Fuerza = F = $m\cdot\vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	Momento de fuerza = $\vec{M} = I\cdot\vec{\alpha} = \frac{d\vec{L}}{dt}$
Momento lineal = $\vec{p} = m\,\vec{v}$	Momento angular = $\vec{L} = I\cdot\vec{\omega}$

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

8 ¿Qué es el centro de masas de un cuerpo? ¿Qué tiene de particular dicho punto?

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

El Centro de masa es el punto en el cual se puede considerar concentrada toda la masa de un objeto o de un sistema. El **centro de masas** de un sistema discreto es el punto geométrico que dinámicamente se comporta como si estuviese sometido a la resultante de las fuerzas externas al sistema.

El movimiento del centro de masas es representativo del movimiento del sistema.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

9 Completa el siguiente cuadro:

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

Cualidad	Magnitud y expresión que la describe en movimientos lineales	Magnitud y expresión que la describe en movimientos de rotación
Posición del móvil	Espacio = s	Ángulo = θ = s/R
Velocidad del móvil	Velocidad lineal = v = ds/dt	Velocidad angular = ω = dθ/dt
Aceleración tangencial del móvil	$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$	$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$
Aceleración centrípeta del móvil	$a_c = \frac{v^2}{R}$	$a_c = \omega^2 \cdot R$
Resistencia a modificar el estado de movimiento	Masa = m	Momento de inercia = I = $m \cdot r^2$
Medida de la cantidad de movimiento	Momento lineal = $\vec{p} = m\vec{v}$	Momento angular = $\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$
Agente capaz de variar la cantidad de movimiento	Fuerza = F = $m \cdot \vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	Momento de fuerza = $\vec{M} = I \cdot \vec{\alpha} = \frac{d\vec{L}}{dt}$
Energía asociada al movimiento	Cinética = Ec = $\frac{1}{2}mv^2$	Cinética = $Ec_R = \frac{1}{2}I\omega^2$

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

De razonamiento

10 ¿Es apropiado hablar del momento de inercia de un sólido sin más especificaciones? Explica tu contestación.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

En el momento de inercia (I = mr^2) **hay que especificar el eje de rotación elegido** pues las distancias (r) serán distintas dependiendo del eje que se elija.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

11 ¿Qué sentido tiene el acto instintivo de extender los brazos en cruz cuando tratamos de conservar el equilibrio?

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

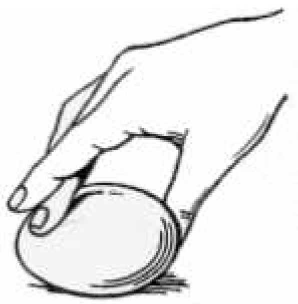
Al extender los brazos hay partes de nuestro cuerpo cuyas distancias al eje de rotación que pasa por la vertical del centro aumentan y, por tanto, **aumenta el momento de inercia** Y el momento angular permanece constante ya que las fuerzas externas no varían) haciendo que sea más difícil la pérdida del equilibrio al disminuir la velocidad angular de giro.

12 ¿Por qué cuando caminamos no lo hacemos a «piñón fijo»; es decir, por qué no adelantamos simultáneamente el brazo y la pierna del mismo lado?

Para que el equilibrio del cuerpo sea mejor ya que el momento del peso del peso de la pierna de un lado (M) se equilibra, en parte con el momento del peso del brazo del lado contrario.

13 ¿De qué manera puede distinguirse un huevo crudo de uno cocido sin necesidad de cascarlo?

La forma más sencilla de distinguir un huevo crudo de uno duro es hacerlo girar sobre un plano y después pararlo, tocándolo con un dedo sobre el eje de rotación. Al apartar el dedo, pueden ocurrir dos cosas: que permanezca quieto o que empiece a girar de nuevo. En el primer caso estaremos ante un huevo duro y en el segundo, ante uno crudo. Esta diferencia se explica porque el contenido del huevo crudo, que es líquido, continúa rotando por inercia, aunque paremos la cáscara. En cuanto al duro, dado que la capa exterior y el contenido están adheridos, una vez parado no puede volver a girar por sí solo.



Además cuando el huevo está cocido (y sobre todo duro) gira más de prisa y durante más tiempo que cuando está crudo. Si está crudo es difícil hacerlo girar, mientras que cuando está duro, gira tan rápidamente que sus contornos se confunden y vemos un elipsoide blanco, que puede llegar a moverse sobre su extremo más agudo. Las causas que dan lugar a estos fenómenos son, que el huevo duro gira como si fuera un todo único, mientras que el contenido líquido del huevo crudo, al no recibir en el mismo instante este movimiento giratorio, retarda con su inercia el giro del cascarón y hace las veces de freno.

14 Una persona se encuentra en pie sobre una plataforma que gira alrededor de un eje vertical. En un momento dado, se siente mareada y trata de desplazarse hacia el eje con la intención de asirse a él. ¿Crees que ha tomado la decisión más acertada? ¿Por qué?

Al agacharse la masa se concentra más cerca del eje de rotación y el momento de inercia del cuerpo disminuye y, como el momento angular se conserva ya que las fuerzas externas no varían, la velocidad angular de giro aumento con lo que se marea aún más.

15 Los alfareros tradicionales que aún usan tornos de pie empujan con el pie una gran rueda de madera, pesada y de gran diámetro, en forma de disco. Al hacerlo, consiguen que el plato donde levantan sus piezas, que comparte eje con la rueda, gire a gran velocidad. ¿Qué justificación tiene el esfuerzo que hay que hacer para poner en movimiento la rueda?

La justificación el principio de conservación del momento angular (L), el momento angular de la rueda grande se transmite (íntegramente en el caso ideal) al plato de manera que este que tiene menor masa (y, por tanto menor momento de inercia), gira más deprisa:

$$\vec{L}_{rueda} = \vec{L}_{plato} \Leftrightarrow I_R \cdot \omega_R = I_P \cdot \omega_P \Rightarrow \text{como } I_P < I_R \Rightarrow \omega_P > \omega_R$$

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

16 Si una partícula se mueve a lo largo de una recta, ¿tendrá momento angular cero con respecto a un origen cualquiera elegido al azar? ¿Tendrá momento angular cero con respecto a algún origen específico? Razona tu respuesta.

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

Como se mueve a lo largo de una recta, el momento angular respecto de cualquier punto a lo largo de la recta será nulo que $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$ y, al ser paralelos el vector velocidad y el desplazamiento su producto vectorial es nulo.

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

17 Si la velocidad lineal de una partícula se mantiene constante, ¿podrá variar su momento angular con respecto a un origen arbitrario?

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

Como $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$ si la velocidad es constante como la masa lo es ha de variar el vector posición, pero si la velocidad es constante es que se trata de un movimiento circular uniforme sometido a una fuerza central con lo que $\vec{r}$ es constante y $\vec{L}$ no varía.

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

18 Una partícula se mueve a lo largo de una recta. Si la única información de que disponemos es que el momento de fuerza que actúa sobre ella es cero, respecto de un origen no especificado, ¿podemos concluir que la partícula se mueve con velocidad constante?

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

No se puede concluir ya que es posible que su momento sea nulo por que el producto vectorial de la fuerza por el desplazamiento sea nulo por ser paralelos en todo momento esos vectores.

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

19 Una esfera maciza rueda por dos planos inclinados que tienen la misma altura, pero diferente inclinación ¿Llegará la esfera al final con la misma velocidad en ambos casos? ¿Tardará lo mismo en llegar al final?

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

Como se obtuvo en el ejercicio nº **22**, la velocidad de una esfera al final de un plano inclinado de altura h en el que no existe rozamiento es $v = \sqrt{\frac{10}{7} gh}$ que sólo depende de g = cte y h que es la misma luego, en el caso ideal la velocidad al final de los planos de la misma altura pero distinta inclinación será la misma.

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

20 ¿Podrían diferenciarse dos esferas idénticas, de la misma masa y radio, que fueran una hueca y otra maciza? ¿Cómo?

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

Para diferenciarlas, además de meterlas en agua y observar cuál flota, podemos dejarlas rodar por un plano inclinado al mismo tiempo y observar cuál llega antes a la base, que, como razonamos en el ejercicio nº **23** será la maciza.

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

21 Dos esferas de la misma masa pero de distinta densidad se dejan caer rodando por un plano inclinado. ¿Llegan a la vez a la base del plano?

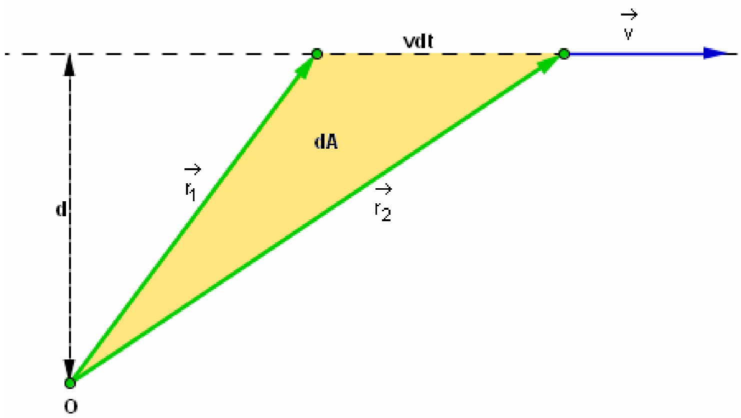
✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

Si la masa es igual pero no la densidad es por que su volumen es diferente y por tanto las distancias al centro de giro (r) son diferentes, siendo, por tanto, distintos sus momentos de inercia. Si sus momentos de inercia son distintos sus energías cinéticas derogación también lo serán y por tanto sus velocidades tardando distintos tiempos en recorrer el espacio del plano inclinado.

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

De cálculo

22 Una partícula se mueve con velocidad constante $\vec{v}$ a lo largo de una recta cuya distancia a un origen O es d. Si en un tiempo dt el vector de posición barre un área dA, demuestra que la velocidad



areolar es constante en el tiempo e igual a L/2m, expresión en la que L es el momento angular de la partícula con respecto al origen citado.

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

El área barrida dA es el área del triángulo sombreado = $\frac{\text{Base}\cdot\text{altura}}{2} = \frac{vdt\cdot d}{2} = \frac{1}{2}vddt$.

Por otro lado el momento angular es $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} \Rightarrow L = m\cdot d\cdot v \Leftrightarrow d\cdot v = \frac{L}{m}$ luego la velocidad aerolar es:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d\left(\frac{1}{2}v\cdot d\cdot dt\right)}{dt} = \frac{1}{2}v\cdot d = \frac{1}{2}\frac{L}{m}$$ como queríamos demostrar

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

23 Tres partículas de masas $m_1 = 5$ kg, $m_2 = 3$ kg y $m_3 = 2$ kg, se mueven según trayectorias determinadas por:

$$\vec{r}_1 = (3t^2+1)\,\vec{i} + 2t^3\,\vec{j} + 4\,\vec{k}\ \text{m}$$
$$\vec{r}_2 = (2t^2-t)\,\vec{i} - 5t^2\,\vec{j}\ \text{m}$$
$$\vec{r}_3 = 4t^3\,\vec{i} + 2t^2\,\vec{j} + 2t^2\,\vec{k}\ \text{m}$$

a) Establece la posición del centro de masas del sistema en función del tiempo y en el instante en que t= 1s.

b) Halla el momento lineal del sistema en función del tiempo y cuando t= 1 s.

c) ¿Qué fuerza neta opera sobre el sistema?

d) ¿Cuál ha sido el desplazamiento del centro de masas entre t = 0 y t = 1 s?

e) ¿Cuál es el momento angular de la partícula 1 respecto del origen cuando t = 1 s?

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

a)

$$\vec{r}_{CM}(t) = \frac{\sum_{i=1}^{3} m_i\cdot\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{3} m_i} = \frac{m_1\cdot\vec{r}_1 + m_2\cdot\vec{r}_2 + m_3\cdot\vec{r}_3}{m_1+m_2+m_3} = \frac{5\cdot\left((3t^2+1)\,\vec{i}+2t^3\,\vec{j}+4\,\vec{k}\right)+3\cdot\left((2t^2-t)\,\vec{i}-5t^2\,\vec{j}\right)+2\cdot\left(4t^3\,\vec{i}+2t^2\,\vec{j}+2t^2\,\vec{k}\right)}{5+3+2} =$$

$$= \frac{(8t^3+21t^2-3t+5)\,\vec{i}+(10t^3-11t^2)\,\vec{j}+(4t^2+20)\,\vec{k}}{10} = \frac{8t^3+21t^2-3t+5}{10}\,\vec{i} + \frac{10t^3-11t^2}{10}\,\vec{j} + \frac{4t^2+20}{10}\,\vec{k}\ \text{m}$$

$$\vec{r}_{CM}(1) = \frac{31}{10}\,\vec{i} - \frac{1}{10}\,\vec{j} + \frac{24}{10}\,\vec{k}\ \text{m.}$$

b) Hallamos primero la velocidad del centro de masas derivando el vector posición respecto del tiempo:

$$\vec{v}_{CM}(t) = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{d\left(\frac{8t^3+21t^2-3t+5}{10}\,\vec{i}+\frac{10t^3-11t^2}{10}\,\vec{j}+\frac{4t^2+20}{10}\,\vec{k}\right)}{dt} = \frac{24t^2+42t-3}{10}\,\vec{i} - \frac{30t^2-22t}{10}\,\vec{j} + \frac{8t}{10}\,\vec{k}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Y ahora hallamos el momento:

$$\vec{p}(t) = (m_1+m_2+m_3)\cdot\vec{v}_{CM}(t) = 10\text{kg}\cdot\left(\frac{24t^2+42t-3}{10}\,\vec{i} - \frac{30t^2-22t}{10}\,\vec{j} + \frac{8t}{10}\,\vec{k}\right) = (24t^2+42t-3)\,\vec{i} - (30t^2-22t)\,\vec{j} +$$

$$+8t\,\vec{k}\ \text{kg·m/s.}$$

$$\vec{p}(1) = (m_1 + m_2 + m_3)\cdot \vec{v}_{CM}(1) = 10\text{kg}\cdot\left(\frac{24+42-3}{10}\vec{i} - \frac{30-22}{10}\vec{j} + \frac{8}{1}\vec{k}\right) = 63\,\vec{i} - 8\,\vec{j} + 8\,\vec{k}\ \text{kg·m/s}.$$

c) $$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\left((24t^2+42t-3)\,\vec{i} - (30t^2-22t)\,\vec{j} + 8t\,\vec{k}\right)}{dt} = (48t+42)\,\vec{i} - (60t-22)\,\vec{j} + 8\,\vec{k}\ \text{N}.$$

d) $\vec{r}_{CM}(0) = 0{,}5\,\vec{i} + 2\,\vec{k}$ m, luego:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_{CM}(1) - \vec{r}_{CM}(0) = \left(\frac{31}{10}\vec{i} - \frac{1}{10}\vec{j} + \frac{24}{10}\vec{k}\right) - (0{,}5\,\vec{i} + 2\,\vec{k}) = 2{,}6\,\vec{i} - 0{,}1\,\vec{j} + 0{,}4\,\vec{k}$$ y su módulo:

Desplazamiento = $\left|\Delta\vec{r}\right| = \sqrt{2{,}6^2 + 0{,}1^2 + 0{,}4^2} = 2{,}63$ m.

e) $$\vec{v}_1 = \frac{d\vec{r}_1}{dt} = \frac{d\left((3t^2+1)\,\vec{i} + 2t^3\,\vec{j} + 4\,\vec{k}\right)}{dt} = 6t\,\vec{i} + 6t\,\vec{j} \Rightarrow \vec{v}_1(1) = 6\,\vec{i} + 6\,\vec{j} \Rightarrow \vec{p}_1(1) = m_1\cdot\vec{v}_1 = 30\,\vec{i} + 30\,\vec{j}$$

$$\vec{L} = \vec{r}_1(1) \times \vec{p}_1(1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 2 & 4 \\ 30 & 30 & 0 \end{vmatrix} = -120\,\vec{i} + 120\,\vec{j} + 60\,\vec{k}$$

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

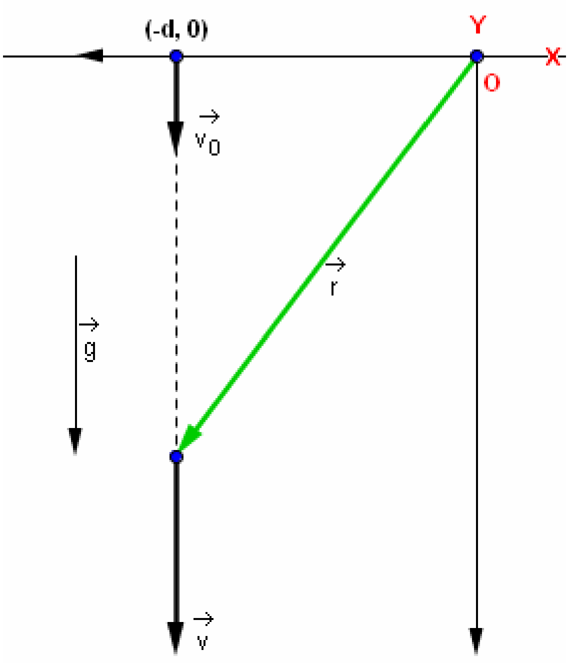
24 A una partícula de masa m se le imprime una velocidad $-v_0\,\vec{j}$ en el punto (-d, 0) y empieza a acelerarse en presencia de la gravedad terrestre.

a) Determina una expresión para el momento angular como función del tiempo, con respecto al origen.

b) Calcula el momento de fuerza que actúa sobre la partícula, en cualquier instante, con relación al origen.

c) Con los resultados obtenidos en a) y b), comprueba que $\vec{M} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧



a) el vector velocidad respecto del tiempo es:

$$\vec{v} = \left(\vec{v}_0 + \vec{g}\cdot t\right) = -(v_0 + gt)\,\vec{j}$$

Y el vector desplazamiento: $\vec{r} = -d\,\vec{i} - \left(v_0 t + \frac{1}{2}gt^2\right)\vec{j}$

Luego el momento angular:

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = m\cdot\left(\vec{r} \times \vec{v}\right) = m\cdot\left(\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -d & -\left(v_0 t + \frac{1}{2}gt^2\right) & 0 \\ 0 & -\left(v_0 + gt\right) & 0 \end{vmatrix}\right) = m\left(dv_0 + dgt\right)\vec{k} = \left(mdv_0 + mdgt\right)\vec{k}\ \frac{kg\cdot m^2}{s}$$

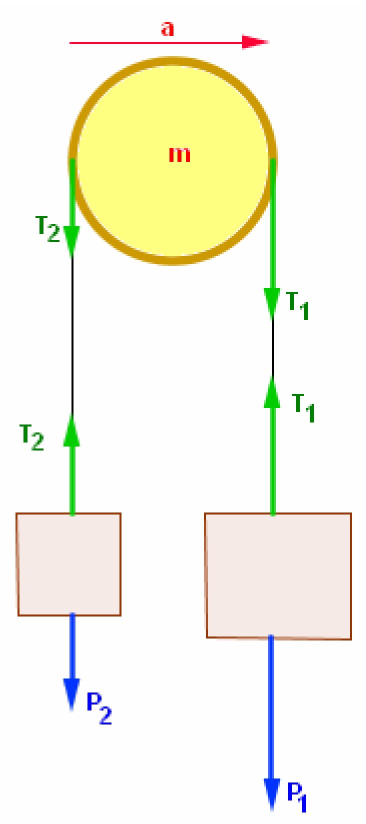
b) La fuerza que actúa es el peso $\vec{P} = -mg\,\vec{j}$ luego el momento de esta fuerza es:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -d & -\left(v_0 t + \frac{1}{2}gt^2\right) & 0 \\ 0 & -mg & 0 \end{vmatrix} = mgd\,\vec{k}\ N\cdot m$$

c) $\vec{M} = \dfrac{d\vec{L}}{dt} = \dfrac{d\left(\left(mdv_0 + mdgt\right)\vec{k}\right)}{dt} = mgd\,\vec{k}\ N\cdot m$.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

25 La polea de una máquina de Atwood tiene una masa de 1 kg y un radio de 20 cm. A ambos lados de la polea cuelgan dos pesas de 250 g y 320 g, respectivamente. Determina la aceleración que adquieren las masas, así como los valores de la tensión a ambos lados de la polea. ¿Qué porcentaje de error cometemos al no tener en cuenta el movimiento de la polea? (Considera la polea como un pequeño cilindro homogéneo.)



✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

Sea:
m = masa de la polea = 1 kg.
R = radio de la polea = 20 cm = 0,2 m.
m_1 = masa de la pesa de la derecha = 320 g = 0,32 kg.
m_2 = masa de la pesa de la izquierda = 250 g = 0,25 kg.

Las fuerzas que actúan se representan en la figura adjunta.

Aplicando las leyes de la dinámica a las masas y de la dinámica de rotación a la polea tenemos:

$$\begin{cases} \text{Para } m_1: P_1 - T_1 = m_1 a \Leftrightarrow m_1 g - T_1 = m_1 a \\ \text{Para } m_2: T_2 - P_2 = m_2 a \Leftrightarrow T_2 - m_2 g = m_2 a \\ \text{Polea} = T_1\cdot R - T_2\cdot R = I\alpha \end{cases}$$

Además con la relación a = αR y teniendo en cuenta el momento de inercia de la polea $I = \frac{1}{2}mR^2 = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 0{,}2^2 = 0{,}02\ kg\cdot m^2$ podemos resolver el problema:

$$\begin{cases} 0{,}32g - T_1 = 0{,}32\cdot a \\ T_2 - 0{,}25g = 0{,}25a \\ 0{,}2(T_1 - T_2) = \frac{1}{2}mR^2\cdot\frac{a}{R} = \frac{1}{2}mR\cdot a = 0{,}1a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_1 = 0{,}32(g-a) \\ T_2 = 0{,}25(g+a) \Leftrightarrow a = 2[0{,}32(g-a) - 0{,}25(g+a)] = 2(0{,}07g - 0{,}57a) \Leftrightarrow \\ a = 2(T_1 - T_2) \end{cases}$$

$a = 0{,}14g - 1{,}14a \Leftrightarrow 2{,}14a = 0{,}14g \Leftrightarrow a = \frac{0{,}14g}{2{,}14} = 0{,}64\,\frac{m}{s^2}$ luego T_1 = 0,32(g-a) = 0,32(9,8 – 0,64) = 2,93 N y T_2 = 0,25(g + a) = 0,25 (9,6 + 0,64) = 2,61 N.

Si despreciamos el movimiento de la polea, las ecuaciones de la dinámica aplicadas a las dos masas son:

$$\begin{cases} P_1 - T = m_1a \\ T - P_2 = m_2a \end{cases} \xrightarrow{\text{sumando}} P_1 - P_2 = (m_1 + m_2)a \Leftrightarrow a = \frac{(m_1 - m_2)\cdot g}{m_1 + m_2} = \frac{(0{,}32 - 0{,}25)\cdot 9{,}8}{0{,}32 + 0{,}25} = 1{,}2\,\frac{m}{s^2}$$

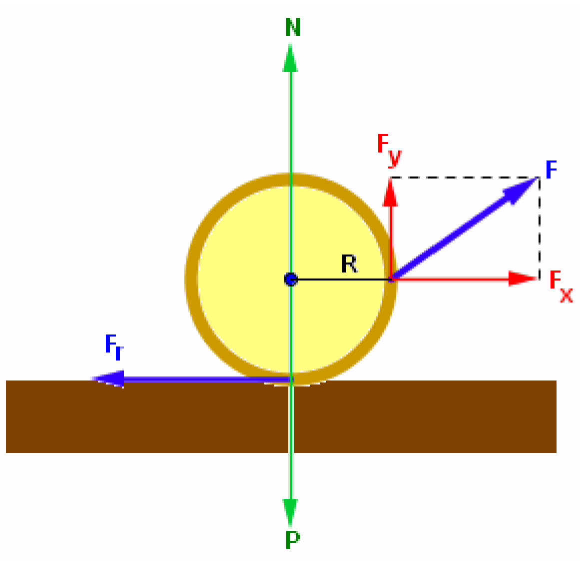
Y el error relativo (en %) cometido sería:

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon_a}{M}\cdot 100 = \frac{|1{,}2 - 0{,}64|}{0{,}64}\cdot 100 = 88\ \%$$

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

26 Un rodillo de jardinería de 30 kg es arrastrado mediante una fuerza de 100 N que forma 40° con la horizontal. Si el rodillo rueda sin deslizarse, determina:

a) La aceleración del centro de masas del rodillo.
b) El coeficiente de rozamiento mínimo para evitar que resbale.



✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

a) La fuerza que hace que el rodillo ruede, al tirar de él con una fuerza F, es la fuerza de rozamiento Fr con el suelo. Aplicando la ecuación fundamental de la dinámica de rotación y teniendo en cuenta que Fr y radio son perpendiculares (sen90° = 1) se cumplirá (en módulo):

$$M = I\cdot\alpha \Leftrightarrow Fr\cdot R = \frac{1}{2}mR^2\cdot\frac{a}{R} \Leftrightarrow Fr = \frac{1}{2}ma$$

Por otro lado, como el cilindro se traslada (sin deslizar), aplicando la ecuación fundamental de la dinámica de traslación al cilindro:

$$F_x - Fr = ma \xrightarrow{\text{sustituyendo}} F\cos 40° - \frac{1}{2}ma = ma \Leftrightarrow F\cos 40° = \frac{3}{2}ma \Leftrightarrow a = \frac{2F\cos 40°}{3m} = \frac{2\cdot 100N\cdot\cos 40°}{3\cdot 30kg} = 1{,}7\,\frac{m}{s^2}$$

b) Para que no resbale, el punto en contacto con el suelo en ese instante ha de estar en reposo, es decir, su velocidad de traslación (la del centro de masas) debe ser igual en módulo y de sentido contrario a su velocidad lineal de rotación ωR

Si de la ecuación de la dinámica de rotación despejamos la aceleración:

$$\Leftrightarrow Fr\cdot R = \frac{1}{2} mR^2 \cdot \frac{a}{R} \Leftrightarrow a = \frac{2Fr}{m}$$

y la sustituimos en la de traslación y a su vez despejamos la fuerza de rozamiento tenemos:

$$F_x - Fr = ma \xrightarrow{\text{sustituyendo}} F_x - Fr = m\cdot\frac{2Fr}{m} = 2Fr \Leftrightarrow F_x = 3Fr \Leftrightarrow Fr = \frac{F_x}{3}$$

Si ahora tenemos en cuenta que:

$$Fr = \mu N \text{ y } P = N + F_y \Rightarrow Fr = \mu(P - F_y) = \frac{F_x}{3} \Leftrightarrow \mu = \frac{F_x}{3(P-F_y)} = \frac{F\cos 40^o}{3(mg - F\text{sen}40^o)} = \frac{100\cos 40^o}{3(30\cdot 9{,}8 - 100\text{sen}40^o)} = 0{,}11$$

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

27 El radio solar es de unos $6{,}96.10^8$ m, y su período de rotación es de 25,3 días. ¿Cuál sería su período de rotación si se colapsara formando una enana blanca de 4000 km de radio, sin variación apreciable de masa?

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

Aplicamos la ley de conservación del momento angular ya que las fuerzas externas no varían:

$$I_1\cdot\omega_1 = I_2\cdot\omega_2 \Leftrightarrow \frac{2}{5} mr_1^2\cdot\frac{2\pi}{T_1} = \frac{2}{5} mr_2^2\cdot\frac{2\pi}{T_2} \Leftrightarrow \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \Rightarrow \frac{T_2}{25{,}3\cdot 24\cdot 60\,\text{min}} = \left(\frac{4\cdot 10^6\,\text{m}}{6{,}96\cdot 10^8\,\text{m}}\right)^2 \Rightarrow T_2 = 1\text{min}\,12{,}2\text{s}$$

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

28 Se estima que la masa de hielo de los casquetes polares es de unos $2{,}5\cdot 10^{19}$ kg. Dado que esta masa está localizada prácticamente en los polos, su contribución al momento de inercia terrestre es casi despreciable. Estima en cuánto variaría la duración del día si todo el hielo se fundiese y se distribuyese uniformemente por la esfera terrestre.

Datos: momento de inercia de la Tierra = $1/3\ m_T r_T^2$; momento de inercia de un cascarón esférico de masa m y radio r = $2/3\ mr^2$.

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

Si suponemos que el aumento del radio terrestre al fundirse el hielo es despreciable y aplicamos el principio de conservación del momento angular, tenemos, llamando m a la masa de hielo fundida:

Momento angular de la tierra = momento angular de la tierra más el agua de fusión

Momento de inercia de la Tierra · velocidad angular de giro = (momento de inercia de la tierra sin el hielo + momento de inercia del casquete de agua fundido) · velocidad angular de giro

$$I_1\cdot\omega_1 = I_2\cdot\omega_2 \Leftrightarrow \frac{1}{3} m_T r_T^2\cdot\frac{2\pi}{T_1} = \left(\frac{1}{3} m_T\cdot r_T^2 + \frac{2}{3} mr_T^2\right)\frac{2\pi}{T_2} \Leftrightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{r_T^2\left(\frac{1}{3} m_T + \frac{2}{3} m\right)}{\frac{1}{3} m_T r_T^2} = \frac{\left(\frac{1}{3} m_T + \frac{2}{3} m\right)}{\frac{1}{3} m_T} = 1 + 2\frac{m}{m_T}$$

Luego: $\Delta T = T_2 - T_1 = 2\frac{m}{m_T} T_1 = 2\frac{2{,}5\cdot 10^{19}}{6\cdot 10^{24}}\cdot(24\cdot 3600\text{s}) = 0{,}72\text{ s}$

En donde, al ser una estimación, hemos considerado la masa de la tierra sin el hielo igual a la de la Tierra cuando debería ser la diferencia y el aumento del radio terrestre al fundirse el hielo también despreciable.

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

29 Dos masas de 2 kg y 3 kg, respectivamente, se encuentran en los extremos de una varilla rígida horizontal de 30 cm de longitud y de masa despreciable. El sistema comienza a girar alrededor de un eje vertical que pasa por el centro de la varilla a razón de 3 rad/s. ¿Cuánto vale el momento angular del sistema? Si en un momento dado las dos partículas empiezan a desplazarse una hacia la otra con velocidades respectivas de 0,8 cm/s y 0,5 cm/s:

a) Determina una expresión para el momento de inercia del sistema en función del tiempo.
b) Halla la velocidad angular del sistema al cabo de 10 s.
c) Considerando que, para que las partículas comiencen a moverse, ha sido necesario impulsarlas en la dirección radial, ¿es lícito pensar que el momento angular no sufre variaciones?

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

Momento angular = $L_0 = I\cdot\omega = (I_1 + I_2)\cdot\omega = \left(m_1 r^2 + m_2 r^2\right)\omega = \omega r^2 (m_1 + m_2) = 3\frac{rad}{s}\cdot 0{,}15^2 m^2\cdot(2+3)kg = 0{,}3375$ $kg\cdot m^2\cdot s^{-1}$.

a) La distancia de las masas al eje de giro varía con el tiempo disminuyendo en el espacio que recorren las masas en su movimiento con velocidad constante hacia el centro:

$$\begin{cases} r_1 = r - v_1 t = 0{,}15 - 0{,}008t \\ r_2 = r - v_2 t = 0{,}15 - 0{,}005t \end{cases}$$

Luego:

$$I = m_1 r_1^2 + m r_2^2 = 2(0{,}15-0{,}008t)^2 + 3(0{,}15-0{,}005t)^2 = 2(0{,}0225 - 0{,}0024t + 6{,}4\cdot 10^{-5}t^2) + 3(0{,}0225 - 0{,}0015t + 2{,}5\cdot 10^{-5}t^2) =$$

$$= 2{,}03\cdot 10^{-4}\,t^2 - 9{,}3\cdot 10^{-3}\,t + 0{,}1125 \quad kg\cdot m^2.$$

b) Si L = cte $\Rightarrow L_0 = I(10)\cdot\omega(10) \Rightarrow \omega(10) = \frac{L_0}{I(10)} = \frac{0{,}3375}{2{,}03\cdot 10^{-4}\cdot 10^2 - 9{,}3\cdot 10^{-3} 10 + 0{,}1125} = 8{,}48\frac{rad}{s}$.

c) Para que L = cte el momento de la fuerza ha de ser nulo, como el vector fuerza y el vector radio tienen la misma dirección (y sentidos opuestos) el producto vectorial $\vec{r} \times \vec{F} = r\cdot F\cdot sen180° = 0$ luego sí se conserva el momento angular.

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

30 Una partícula de 10 g de masa que se mueve con una rapidez vo = 15 m/s choca tangencialmente contra la periferia de una esfera sólida de 1 kg de masa y 20 cm de radio que estaba en reposo. Si la partícula queda adherida a la esfera y esta puede comenzar a girar sin fricción alrededor de un eje que pasa por su centro:

a) ¿Cuál será la velocidad angular con la que girará el sistema?
b) ¿Cuánta energía se disipa en la colisión?

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

a) Como no hay fuerzas ni momentos externos el momento angular del sistema se conserva, siendo el momento antes de la colisión sólo el de la partícula (cantidad de movimiento por radio):

$$L_i = L_f \Leftrightarrow mv_0 \cdot R = I_S \cdot \omega_S = (I_e + I_p) \cdot \omega_S \Leftrightarrow \omega_S = \frac{mv_0 \cdot R}{I_e + I_p} = \frac{mv_0 \cdot R}{\frac{2}{5}M \cdot R^2 + m \cdot R^2} = \frac{mv_0}{R\left(\frac{2}{5}M + m\right)} = \frac{10^{-2} \cdot 15}{0{,}2\left(\frac{2}{5} \cdot 1 + 10^{-2}\right)} = 1{,}83\,\frac{rad}{s}$$

b) Energía disipada = $\Delta E = Ec_0 - Ec_r = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}(I_e + I_p)\omega_S^2 = \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} \cdot 0{,}15^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5} \cdot 1 \cdot 0{,}2^2 + 10^{-2} \cdot 0{,}2^2\right) = 1{,}098$ J

que se corresponde con una variación relativa porcentual : $\frac{\Delta E}{Ec_0} \cdot 100 = \frac{1{,}098}{1{,}125} \cdot 100 = 97{,}6$ % se ha perdido en la colisión.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧