ACTIVIDADES

1 ¿Para qué introduce la Física el concepto de campo? ¿Qué otros campos utiliza la Física además del campo gravitatorio?

Para describir la existencia de una magnitud (escalar o vectorial) en una región del espacio, que hace que los cuerpos interactúen sin entrar en contacto. Además del gravitatorio utilizamos los campos magnético, eléctrico, térmico, de fuerzas, etc.

2 ¿De qué factores depende la intensidad de un campo gravitatorio?

El campo gravitatorio es directamente proporcional a la masa que lo genera e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al punto en que se mide mediada desde el centro de la masa.

3 ¿Qué dimensiones tiene la intensidad del campo gravitatorio?

Tiene dimensiones de aceleración:

$$[g]=\left[G\frac{M}{R^2}\right]=[G]\frac{[M]}{[R]^2}=[F]\cdot[L]^2\cdot[M]^{-2}\,\frac{[M]}{[L]^2}=M\cdot L\cdot T^{-2}\cdot L^2\cdot M^{-2}\cdot M\cdot L^{-2}=L\cdot T^{-2}$$

4 Durante los vuelos espaciales, los astronautas se refieren a las fuerzas en términos de la gravedad. ¿Qué significado tiene para un astronauta una fuerza de 5 g? ¿Es correcta la expresión una fuerza de 5 g?

Que están sometidos a una fuerza por unidad de masa de cinco veces la de la gravedad. Como g es intensidad gravitacional o fuerza por unidad de masa, no es correcto expresarla como una fuera, es una fuerza por unidad de masa.

5 Supongamos que conoces el período y el radio de la órbita de un satélite que gira alrededor de la Tierra. Con esta información y utilizando las leyes de Newton, ¿puedes calcular la masa del satélite? ¿Podrías calcular también la masa de la Tierra?

Cuando se halla en una órbita estable la fuerza de atracción gravitatoria es equilibrada por la fuerza centrífuga:

$$F_G = F_c \Leftrightarrow G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \Leftrightarrow G\frac{M}{r} = v^2 = (\omega r)^2 = (2\pi / T)^2 \cdot r^2 = \frac{4\pi^2}{\cdot T^2}\cdot r^2$$

Luego la masa del satélite (m) no influye y no puede calcularse pues se simplifica de la fórmula.

La masa de la Tierra (M) sí puede despejarse: $M = \frac{v^2 \cdot r}{G} = \frac{4\pi^2}{T^2}\cdot\frac{r^3}{G}$ en función del período T y del radio de la órbita r.

6 Si la Luna estuviera siempre en el mismo punto aparentemente inmóvil respecto de la Tierra, ¿qué dirías acerca de nuestro satélite?

Que sería un satélite sincrónico, su período de rotación sería el mismo de la Tierra (un día) y geoestacionario, su vector de posición respecto del centro de la Tierra cortaría siempre en el mismo punto de la superficie terrestre.

7 Calcula la masa del Sol sabiendo que la Tierra gira en torno de él describiendo una órbita de radio $149 \cdot 10^9$ m.

$$F_G = F_c \Leftrightarrow G\frac{M_S \cdot M_T}{d^2} = M_T \cdot \frac{4\pi^2}{T^2}\cdot d \Rightarrow M_S = \frac{4\pi^2 \cdot d^3}{G \cdot T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot (149 \cdot 10^9)^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot (365 \cdot 24 \cdot 3600)^2} = 1{,}97 \cdot 10^{30}\ \text{kg.}$$

8 Un satélite se encuentra en una órbita circular alrededor de la Tierra y tiene un período de 2 horas. ¿A qué altura de la superficie de la Tierra se encuentra el satélite? (R = 6.400 km).

$$F_G = F_c \Leftrightarrow G\frac{M_T \cdot m_{sat}}{(R+h)^2} = m_{sat} \cdot \frac{4\pi^2}{T^2}\cdot (R+h) \Rightarrow (R+h)^3 = \frac{GM_T}{R^2}\cdot\frac{R^2 T^2}{4\pi^2} \Leftrightarrow (R+h)^3 = g_0 \cdot \frac{R^2 T^2}{4\pi^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h = \sqrt[3]{g_0\left(\frac{R \cdot T}{2\pi}\right)^2} - R = \sqrt[3]{9{,}8\left(\frac{6{,}4 \cdot 10^6 \cdot 23600}{2\pi}\right)^2} - 6{,}4 \cdot 10^6 = 1680621\text{m} \approx 1680{,}6\ \text{km}$$

9 ¿Por qué se requiere más combustible para que un vehículo espacial vaya de la Tierra a la Luna que para el viaje de regreso?

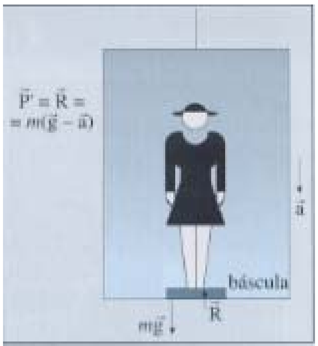
El gasto de combustible es una consecuencia directa del gasto energético, siendo este menor a la vuelta porque viene en el sentido de la fuerza de atracción gravitatoria es decir la Ep va disminuyendo (en módulo).

10 Describe cómo varía la masa de un astronauta y la fuerza gravitatoria sobre él durante un viaje desde la Tierra a la Luna.

Despreciando la variación de masa por efectos relativistas, su masa no varía (prescindiendo de los efectos fisiológicos de comer más o menos).

Sin embargo al ir aumentando la distancia al centro de la Tierra, la gravedad, que es inversamente proporciónala al cuadrado de la distancia, al ir aumentando la altura, g disminuye y la fuerza de atracción gravitatoria aumenta:

$$F = G\frac{M_T m}{(R+h)^2} \Rightarrow \text{si } h \uparrow \Rightarrow F \downarrow$$

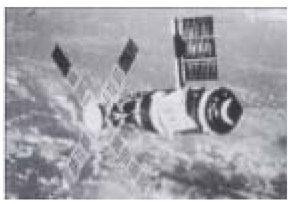


11 ¿Con qué aceleración debe descender un ascensor para que el peso aparente de un pasajero de 80 kg sea 600 N?

$$R - mg = m(-a) \Leftrightarrow 600 - 80 \cdot 9{,}8 = 80(-a) \Leftrightarrow a = \frac{80 \cdot 9{,}8 - 600}{80} = 2{,}3\,\frac{m}{s^2}$$

CUESTIONES Y PROBLEMAS BÁSICOS

1 Un satélite artificial gira en torno a la Tierra describiendo una órbita de 700 km de radio. Calcula la velocidad y el período de revolución del satélite suponiendo que la masa de la Tierra es $M = 6 \cdot 10^{24}$ kg .



$$F_G = F_c \Leftrightarrow G\frac{M_T \cdot m_{sat}}{(R+h)^2} = m_{sat}\cdot\frac{4\pi^2}{T^2}\cdot(R+h) \Rightarrow T = \sqrt{\frac{4\pi^2(R+h)^3}{G\cdot M_T}} = \sqrt{\frac{4\pi^2(6{,}4\cdot10^6+7\cdot10^5)^3}{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot6\cdot10^{24}}} \approx 5944{,}36 \text{ s} =$$

1,65 hr.

❷ Calcula la aceleración con que cae un cuerpo en las proximidades de la superficie de la Luna. Masa de la Luna, $M = 7{,}34 \cdot 10^{22}$ kg; radio de la Luna, $R = 1{,}74 \cdot 10^6$ m.

$$g = G\frac{M_L}{R_L^2} = 6{,}67\cdot10^{-11}\cdot\frac{7{,}31\cdot10^{22}}{(1{,}74\cdot10^6)^2} = 1{,}617\,\frac{m}{s^2}$$

❸ ¿A qué altura se debe colocar un cuerpo para que pierda el 40 por 100 de su peso? Toma 6.400 km para el radio de la Tierra.

$$\text{Como } g_h = 0{,}6\text{ g}\quad \frac{g_h}{g} = \frac{G\dfrac{M}{(R+h)^2}}{G\dfrac{M}{R^2}} = 0{,}6 \Leftrightarrow \left(\frac{R}{R+h}\right)^2 = 0{,}6 \Leftrightarrow \frac{R}{R+h} = \sqrt{0{,}6} \Leftrightarrow h = \left(\frac{R}{\sqrt{0{,}6}} - R\right) =$$

$$= R\left(\frac{1}{\sqrt{0{,}6}} - 1\right) = 1862{,}36 \text{ km.}$$

❹ Calcula el potencial gravitatorio creado por una esfera de 1.000 kg de masa en un punto situado a 10 m de su centro.

$$V = -G\frac{m}{d} = -6{,}67\cdot10^{-11}\cdot\frac{1000}{10} = -6{,}67\cdot10^{-9}\,\frac{J}{kg}$$

❺ Un satélite artificial gira en torno a la Tierra describiendo una órbita situada a 500 km de altura y tarda 1,57 h en dar una vuelta. Calcula la masa de la Tierra (R_T = 6.400 km).

T = 1,57 hr = 5652 s.

$$F_G = F_c \Leftrightarrow G\frac{M_T \cdot m_{sat}}{(R+h)^2} = m_{sat}\cdot\frac{4\pi^2}{T^2}\cdot(R+h) \Rightarrow M_T = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\cdot\frac{(R+h)^3}{G} = \left(\frac{2\pi}{5652}\right)^2\cdot\frac{(6{,}4\cdot10^6+5\cdot10^5)^3}{6{,}67\cdot10^{-11}} = 6{,}086\cdot10^{24}$$

kg.

⑥ Calcula el trabajo necesario para trasladar un satélite terrestre de 500 kg desde una órbita circular de radio $r_0 = 2R_T$ hasta otra de radio $r_1 = 3R_T$ (R_T = 6.400 km).

El trabajo es la variación de la energía potencial:

$$W = \Delta Ep = -GM_T \cdot m\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) = -GM_T \cdot m\left(\frac{1}{2R_T} - \frac{1}{3R_T}\right) = -\frac{GM_T m}{R_T}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = -\frac{GM_T}{R_T^2} \cdot \frac{mR_T}{6} = -g_0 \frac{mR_T}{6} =$$

$$= -9{,}8 \cdot \frac{6{,}4 \cdot 10^6 \cdot 500}{6} = -5{,}23 \cdot 10^9 \text{ J.}$$

⑦ ¿Qué radio de órbita debe tener un satélite artificial de 200 kg que circunda la Tierra si su velocidad de traslación es 5.434 m/s?

$$F_G = F_C \Rightarrow G\frac{M_T \cdot m_s}{(R+h)^2} = m_s \cdot \frac{v^2}{R+h} \Leftrightarrow GM_T = v^2(R+h) \Leftrightarrow R+h = \frac{GM_T}{v^2} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{5434^2} = 13553074 \text{ m}$$

≅ 13 553 km del centro de la Tierra.

⑧ La aceleración debida a la gravedad en la Luna es 1,6 m/s². Si un objeto tiene 2 kg de masa, calcula:

a) Su peso en la Luna.
b) Su peso en la Tierra.
c) Su masa en la Luna.

a) $P_L = m \cdot g_L = 2 \text{ kg} \cdot 1{,}6 \text{ m/s}^2 = 3{,}2 \text{ N}$.

b) $P_T = m \cdot g_T = 2 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 = 19{,}6 \text{ N}$.

c) La masa es invariable en ausencia de descomposiciones radiactivas que transforman la masa en energía o de efectos relativistas, luego m = 2 kg.

⑨ Calcula la velocidad de escape de un cohete lanzado desde la Luna ($M_L = 7{,}36 \cdot 10^{22}$ kg, $R_L = 1{,}74 \cdot 10^6$ m).

De acuerdo con el principio de conservación de la energía mecánica, la energía cinética ha de ser igual a la variación de energía potencial:

$$Ec = \Delta Ep \Rightarrow \frac{1}{2} m \cdot v_e^2 = 0 - \left(-G \frac{M_L \cdot m}{R_L} \right) = G \frac{M_L \cdot m}{R_L} \Rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2GM_L}{R_L}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 7{,}36 \cdot 10^{22}}{1{,}74 \cdot 10^6}} = 2375{,}43 \frac{m}{s}$$

****

①⓪ Un satélite artificial gira alrededor de la Tierra. Si gira en una órbita circular de radio igual al diámetro de la Tierra, calcula la velocidad del satélite artificial.

****

$$F_G = F_C \Rightarrow G \frac{M_T \cdot m_s}{r^2} = m_s \cdot \frac{v^2}{r} \Leftrightarrow v = \sqrt{G \frac{M_T}{r}} = \sqrt{G \frac{M_T}{2R}} = \sqrt{6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{6 \cdot 10^{24}}{2 \cdot 6{,}4 \cdot 10^6}} = 5591{,}57 \frac{m}{s}$$

****

①① El satélite Meteosat nos envía tres veces al día imágenes de Europa para la confección de los mapas del tiempo. Calcula:

a) Su período de revolución.
b) El radio de la órbita que describe.

****

a) Si tres vueltas al día y la velocidad es constante su período es de 24/3 = 8 hr, que es el tiempo que tarda en dar una vuelta.

b) $F_G = F_c \Leftrightarrow G \frac{M_T \cdot m_{sat}}{r^2} = m_{sat} \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r \Rightarrow r^3 = \frac{GM_T \cdot T^2}{4\pi^2} \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{GM_T \cdot T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot 28800^2}{4\pi^2}} =$ 20 334 529 m $\cong 2{,}03 \cdot 10^4$ km.

****

①② ¿A qué altura sobre la superficie de la Tierra hay que elevar un cuerpo para que su peso se reduzca en un 10 por 100? ¿Cuál sería en ese punto la intensidad de la gravedad? RT = 6.370 km

****

Si su peso se ha de reducir en un 10 % el peso final ha de ser el 90 % del inicial: $P_1 = 0{,}9\ P \Rightarrow mg_1 = 0{,}9\ mg \Leftrightarrow g_1 = 0{,}9\ g$, luego sustituyendo:

$$G \frac{M}{(R+h)^2} = 0{,}9 G \frac{M}{R^2} \Leftrightarrow R^2 = 0{,}9 (R+h)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{R+h}{R} \right)^2 = \frac{1}{0{,}9} \Leftrightarrow \frac{R+h}{R} = \frac{1}{\sqrt{0{,}9}} \Leftrightarrow h = R \left(\frac{1}{\sqrt{0{,}9}} - 1 \right) =$$

$$= 6370\text{km}\left(\frac{1}{\sqrt{0{,}9}} - 1\right) = 344{,}57 \text{ km}.$$

La gravedad en ese punto sería $g_1 = 0{,}9\ g = 0{,}9 \cdot 9{,}8\ m/s^2$.

13 Si se deja caer un pequeño objeto de masa m sobre la Tierra partiendo del reposo a gran altura llega a la superficie de la Tierra con una velocidad igual a la velocidad dé escape. Comprueba que se cumple esta afirmación.

Si la altura es suficientemente grande podemos considerar Ep = 0, y como la velocidad inicial es nula, aplicando el principio de conservación de la energía mecánica:

$$Em_1 = Em_2 \Leftrightarrow Ec_1 + Ep_1 = Ec_2 + Ep_2 \Leftrightarrow 0 = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M_T m}{R} \Leftrightarrow \frac{1}{2}v^2 = G\frac{M_T}{R} \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{2GM_T}{R}} = \sqrt{2\frac{GM_T}{R^2}\cdot R} =$$

$= \sqrt{2gR}$ expresiones que se corresponden con la velocidad de escape.

14 **a)** ¿Cuál será el valor de g a una altura igual al radio de la Tierra?
b) ¿Cuál será el período de un satélite de la Tierra en una órbita circular a dicha altura?

a) $g = G\dfrac{M}{(R+h)^2} = G\dfrac{M}{(R+R)^2} = G\dfrac{M}{4R^2} = \dfrac{1}{4}G\dfrac{M}{R^2} = \dfrac{g_0}{4} = \dfrac{9{,}8\,\frac{m}{s^2}}{4} = 2{,}45\,\dfrac{m}{s^2}$.

b)

$F_G = F_c \Leftrightarrow G\dfrac{M_T \cdot m_{sat}}{r^2} = m_{sat}\cdot\dfrac{4\pi^2}{T^2}\cdot r \Leftrightarrow G\dfrac{M_T}{r^2} = \dfrac{4\pi^2}{T^2}\cdot r \Leftrightarrow g = \dfrac{4\pi^2}{T^2}\cdot r \Leftrightarrow T = 2\pi\sqrt{\dfrac{r}{g}} = T = 2\pi\sqrt{\dfrac{2R}{g}} = 7163{,}93$ s $\cong$ 1,99 hr.

15 La masa de Marte es igual a 0,107 la de la Tierra y su radio es 0,533 el de la Tierra. ¿Cuál sería el período de un péndulo en Marte si en la Tierra es igual a 2 s?

Como $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$ si relacionamos los períodos:

$$\frac{T_M}{T_T}=\frac{2\pi\sqrt{\frac{L}{g_M}}}{2\pi\sqrt{\frac{L}{g_T}}}=\sqrt{\frac{g_T}{g_M}}=\sqrt{\frac{G\frac{M_T}{R_T^2}}{G\frac{M_M}{R_M^2}}}=\sqrt{\frac{M_T}{M_M}\cdot\left(\frac{R_M}{R_T}\right)^2}=\sqrt{\frac{M_T}{0{,}107M_T}\cdot\left(\frac{0{,}533R_T}{R_T}\right)^2}=\sqrt{\frac{0{,}533^2}{0{,}107}}=1{,}63$$

$T_M=1{,}63\cdot T_T=,63\cdot 2s=3{,}26\,s.$

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

①⑥ La masa de la Tierra es 81 veces la de la Luna. Encuentra dos puntos en la línea que une a la Tierra con la Luna, en donde la atracción de la Tierra sobre un objeto cualquiera es igual a la de la Luna (R_T = 6.370 km).

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

La distancia Tierra – Luna la hallamos a partir de su periodo de 28 días:

$$d_{TL}=\sqrt[3]{GM_T\left(\frac{T_L}{2\pi}\right)^2}=3{,}84\cdot 10^8\,m$$

Primero hallamos un punto intermedio entre la Tierra y la Luna:

$$F_T=F_L\Leftrightarrow G\frac{M_T\cdot m}{x^2}=G\frac{M_L\cdot m}{(d_{TL}-x)^2}\Leftrightarrow\frac{81M_L}{x^2}=\frac{M_L}{(d_{TL}-x)^2}\Leftrightarrow\left(\frac{d_{TL}-x}{x}\right)^2=\frac{1}{81}\Leftrightarrow\frac{d_{TL}}{x}-1=\frac{1}{\sqrt{81}}\Leftrightarrow$$

$$\frac{d_{TL}}{x}=1+\frac{1}{9}=\frac{10}{9}\Leftrightarrow x=\frac{9}{10}d_{TL}=\frac{9}{10}3{,}84\cdot 10^8\,m=3{,}456\cdot 10^8\,m$$

Ahora un punto más allá de la Luna:

$$F_T=F_L\Leftrightarrow G\frac{M_T\cdot m}{(d_{TL}+x)^2}=G\frac{M_L\cdot m}{x^2}\Leftrightarrow\frac{81M_L}{(d_{TL}+x)^2}=\frac{M_L}{x^2}\Leftrightarrow\left(\frac{d_{TL}+x}{x}\right)^2=81\Leftrightarrow 9x=d_{TL}+x\Leftrightarrow x=\frac{d_{TL}}{8}=$$

$=4{,}9\cdot 10^7$ m, luego el segundo punto estaría a una distancia de la Tierra $r=d_{TL}+x=4{,}33\cdot 10^8$ m.

Hay que tener en cuenta que en este segundo caso las fuerzas son iguales en módulo pero del mismo sentido (hacia la Tierra) por lo que no se anularían, se sumarían.

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

①⑦ Se lanza un cuerpo verticalmente hacia arriba desde la superficie de la Tierra con una velocidad de 4.000 m/s. Calcula la altura que alcanzará (R_T = 6.400 km).

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

Usamos el principio de conservación de la energía mecánica entre el punto de la superficie en que se lanza (1) y el punto de mayor altura a que llega (2):

$$Ec_1+Ep_1=Ec_2(=0)+Ep_2\Rightarrow\frac{1}{2}mv_1^2+\left(-G\frac{M\cdot m}{R}\right)=\left(-G\frac{M\cdot m}{R+h}\right)\Leftrightarrow\frac{1}{2}v_1^2+\left(-G\frac{M}{R}\right)=\left(-G\frac{M}{R+h}\right)\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}v_1^2+\left(-G\frac{M}{R}\right)=\left(-G\frac{M}{R+h}\right)\Leftrightarrow\frac{Rv_1^2-2GM}{2R}=-\frac{GM}{R+h}\Leftrightarrow h=\frac{2RGM}{2GM-Rv_1^2}-R=\frac{2RGM-2RGM+R^2v_1^2}{2GM-Rv_1^2}=$$

$$=\frac{R^2v_1^2}{2GM-Rv_1^2}=\frac{v_1^2}{2G\frac{M}{R^2}-\frac{v_1^2}{R}}=\frac{v_1^2}{2g_0-\frac{v_1^2}{R}}=\frac{4000^2}{2\cdot 9{,}8-\frac{4000^2}{6{,}4\cdot 10^6}}=935672{,}5\text{m}\approx 935{,}7\text{ km}.$$

❋❋❋❁❁❁❁✪❁❁❁❁❋❋❋

⓲ El período de revolución de un satélite que describe una órbita circular en torno a la Tierra es 1,6 horas. ¿Cuál es el radio de la órbita del satélite?

❋❋❋❁❁❁❁✪❁❁❁❁❋❋❋

$$F_G=F_c\Leftrightarrow G\frac{M_T\cdot m_{sat}}{r^2}=m_{sat}\cdot\frac{4\pi^2}{T^2}\cdot r\Rightarrow r^3=\frac{GM_T\cdot T^2}{4\pi^2}\Leftrightarrow r=\sqrt[3]{\frac{GM_T\cdot T^2}{4\pi^2}}=\sqrt[3]{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 6\cdot 10^{24}\cdot(1{,}6\cdot 3600)^2}{4\pi^2}}=$$
$6{,}95\cdot 10^6$ m.

❋❋❋❁❁❁❁✪❁❁❁❁❋❋❋

⓳ Supuesto que el Sol está fijo en el espacio y que sólo tuviera un planeta, razona cuál es la dirección y sentido de la aceleración del planeta.

❋❋❋❁❁❁❁✪❁❁❁❁❋❋❋

La aceleración centrípeta sería hacia el Sol en la dirección que une el centro del Sol con el centro del planeta.

❋❋❋❁❁❁❁✪❁❁❁❁❋❋❋

⓴ La masa de la Tierra es M y su radio es R = 6.370 km. Se desea elevar una masa m = 15.000 kg desde la superficie de la Tierra hasta una altura sobre ella h = 42·10³ m. Calcula la energía que se necesita.

❋❋❋❁❁❁❁✪❁❁❁❁❋❋❋

La energía necesaria es igual a la variación de energía cinética:

$W=\Delta Ec=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2=-\frac{1}{2}mv_0^2$ ya que a la altura h la velocidad es nula.

Si aplicamos el principio de conservación de la energía mecánica:

$Ep_0+Ec_0=Ep_h\Leftrightarrow -G\frac{Mm}{R}+\frac{1}{2}mv_0^2=-G\frac{Mm}{R+h}\Leftrightarrow\frac{1}{2}mv_0^2=GMm\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+h}\right)$ que sustituido en la variación de energía cinética nos da:

$$W=\Delta Ec=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2=-\frac{1}{2}mv_0^2=GMm\left(\frac{1}{R+h}-\frac{1}{R}\right)=G\frac{M}{R^2}\cdot mR^2\left(\frac{1}{R+h}-\frac{1}{R}\right)=g_0mR^2\left(\frac{1}{R+h}-\frac{1}{R}\right)=$$

$$= 9{,}8\cdot 15000\cdot (6{,}37\cdot 10^{6})^{2}\cdot\left(\frac{1}{6{,}37\cdot 10^{6}+42\cdot 10^{3}}-\frac{1}{6{,}37\cdot 10^{6}}\right)= -6{,}1335\cdot 10^{4}\ \mathrm{J}\approx -6{,}134\cdot 10^{4}\ \mathrm{J}.$$

Problemas avanzados

①Calcula el valor de la gravedad en Mercurio, si el radio de la Tierra es tres veces mayor que el de éste, y la densidad de Mercurio es 3/5 de la densidad media de la Tierra.

Como la densidad es: $\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \Leftrightarrow M = \frac{4}{3}\pi R^3\cdot\rho$

Si dividimos la intensidad de la gravedad en los dos planetas, sustituimos sus masas y la relación de los radios y simplificamos tenemos:

$$\frac{g_T}{g_M} = \frac{G\frac{M_T}{R_T^2}}{G\frac{M_M}{R_M^2}} = \frac{M_T}{M_M}\cdot\left(\frac{R_M}{R_T}\right)^2 = \frac{\frac{4}{3}\pi R_T^3\cdot\rho_T}{\frac{4}{3}\pi R_M^3\cdot\rho_M}\cdot\frac{R_M^2}{R_T^2} = \frac{R_T\cdot\rho_T}{R_M\cdot\rho_M} = \frac{3R_M\cdot\rho_T}{R_M\cdot\frac{3}{5}\rho_T} = 5 \Rightarrow g_M = \frac{1}{5}g_T = \frac{1}{5}9{,}8\frac{m}{s^2} = 1{,}96\frac{m}{s^2}$$

②Sabiendo que $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}$ N·m²/kg², R_T = 6.400 km, g_0 = 9,8 m/s². Calcula:

a) La densidad media de la Tierra.

b) ¿A qué altura, sobre la superficie terrestre, el valor de g se reduce a la mitad?

a) Como la densidad es: $\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \Leftrightarrow M = \frac{4}{3}\pi R^3\cdot\rho$

$$g_0 = G\frac{M_T}{R_T^2} = G\frac{\frac{4}{3}\pi R_T^3\cdot\rho}{R_T^2} = \frac{4\pi}{3}G\cdot R_T\cdot\rho \Leftrightarrow \rho = \frac{3}{4\pi}\cdot\frac{g_0}{G R_T} = \frac{3\cdot 9{,}8}{4\pi\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 6400\cdot 10^3} = 5480{,}6\frac{kg}{m^3}.$$

b) $g = \frac{1}{2}g_0 \Rightarrow G\frac{M}{(R+h)^2} = \frac{1}{2}G\frac{M}{R^2} \Leftrightarrow 2R^2 = (R+h)^2 \Leftrightarrow \sqrt{2}R = R+h \Leftrightarrow h = \sqrt{2}R - R = R\left(\sqrt{2}-1\right) = 2651$ km.

3 a) Calcula la energía mínima requerida para enviar un vehículo espacial de 5.000 kg desde la Tierra hasta un punto en donde la gravedad sea despreciable.

b) Si el viaje dura 20 días, calcula la potencia media que deben desarrollar los motores (M_T = 5,98·10^24 kg ; R_T = 6.37·10^6 m).

✼✼✼✼✼✼✼✼✼✼✼✼✼

a) $\Delta Ec = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\frac{1}{2}mv_0^2$ ya que a la altura h la velocidad es nula.

Si aplicamos el principio de conservación de la energía mecánica:

$Ep_0 + Ec_0 = 0 \Leftrightarrow -G\frac{Mm}{R} + \frac{1}{2}mv_0^2 = 0 \Leftrightarrow \Delta Ec = \frac{1}{2}mv_0^2 = -G\frac{Mm}{R} = -G\frac{M}{R^2}\cdot mR = -g_0 mR =$ $-9{,}8\cdot 5000\cdot 6{,}37\cdot 10^6 = -3{,}12\cdot 10^{11}$ J, luego esa energía, positiva, hay que suministrar para enviar el vehículo.

b) $P = \frac{W}{t} = \frac{\Delta Ec}{t} = \frac{3{,}12\cdot 10^{11}\,J}{20\cdot 24\cdot 3600\,s} = 180556\,W \approx 181\,kW$.

✼✼✼✼✼✼✼✼✼✼✼✼✼

4 Demuestra que la velocidad de escape y la velocidad orbital de un satélite en torno a un planeta están relacionadas por la expresión:

$$v_e = \sqrt{2}v$$

✼✼✼✼✼✼✼✼✼✼✼✼✼

Para que un objeto escape de la atracción gravitatoria de un planeta debe poseer una rapidez mínima, cuyo módulo puede determinarse usando el principio de conservación de la energía mecánica:

$$E_{final} = E_{inicial}$$

Como al final se detendrá la energía cinética final será nula, y como debe detenerse a una distancia infinito también será nula la energía potencial final, es decir la energía mecánica final ha de ser al menos cero, luego la energía mecánica inicial ha de ser nula, es decir los módulos de las energías cinética y potencial iniciales han de ser iguales:

$$Ec_i = Ep_i \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_e^2 = G\frac{Mm}{r} \Leftrightarrow v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

En una orbita estacionaria la fuerza de atracción gravitatoria y la centrífuga de han de ser iguales en módulo (y de sentido contrario):

$$F_G = F_c \Leftrightarrow G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

Luego ya hemos demostrado que $v_e = \sqrt{2}\cdot v$

✼✼✼✼✼✼✼✼✼✼✼✼✼

5 Se dispara un cohete verticalmente desde la superficie terrestre, alcanzando una altura máxima iguala cuatro veces el radio de la Tierra. ¿Con qué velocidad se disparó? (M_T = 5,98·10^{24} kg; R_T = 6,37·10^{6} m).

Partimos de una expresión que hemos obtenido en el ejercicio 17:

$\frac{1}{2}v^2 + \left(-G\frac{M}{R}\right) = \left(-G\frac{M}{R+h}\right)$ siendo h = 4R, luego R + h = R + 4R = 5R:

$$\frac{1}{2}v^2 + \left(-G\frac{M}{R}\right) = \left(-G\frac{M}{5R}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{2}v^2 = G\frac{M}{R} - G\frac{M}{5R} = G\frac{M}{R}\left(1-\frac{1}{5}\right) = \frac{4}{5}G\frac{M}{R} \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{8}{5}G\frac{M}{R}} =$$

$$= \sqrt{\frac{8}{5}\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}}{6{,}37\cdot10^{6}}} = 10009\,\frac{m}{s}$$