Actividades

1 ¿Cómo debe aumentar la tensión en una cuerda para que la velocidad de propagación de una onda se duplique? ¿Influye la velocidad transversal de un punto de la cuerda en la velocidad de propagación?

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

❍ Como $v = \sqrt{\frac{F}{\eta}}$, si F' = 4F $\Rightarrow v' = \sqrt{\frac{F'}{\eta}} = \sqrt{\frac{4F}{\eta}} = 2\sqrt{\frac{F}{\eta}} = 2v$, es decir para que la velocidad se duplique la tensión ha de ser cuatro veces mayor.

❍ La velocidad transversal no influye en la velocidad de propagación, esta sólo depende de la tensión de la cuerda (F) y de la densidad lineal o masa por unidad de longitud (η).

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

2 ¿Qué ocurre con la longitud de onda cuando se duplica la frecuencia? ¿Cómo varía la velocidad de una onda cuando se duplica la frecuencia?

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

Como $\lambda = \frac{v}{f}$, la longitud de onda (λ) es inversamente proporcional a la frecuencia (f), luego al duplicarse la frecuencia la longitud de onda se reduce a la mitad:

Si v = cte. $\lambda' = \frac{v}{f'}, \text{si } f' = 2f, \lambda' = \frac{v}{2f} = \frac{1}{2}\frac{v}{f} = \frac{1}{2}\lambda$

La velocidad no depende de la frecuencia.

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

3 Cuando todas las cuerdas de una guitarra se estiran a la misma tensión, ¿la velocidad de una onda que viaja sobre la cuerda más gruesa será mayor o menor que la de una onda que viaja sobre la cuerda más ligera?

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

Si por más gruesa queremos decir que tiene mayor densidad lineal de masa (η) como la velocidad v es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de $\eta, v = \sqrt{\frac{F}{\eta}}$, cuando esta aumente, cuerda más gruesa, la velocidad disminuirá.

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

4 Cuando un músico tensa una cuerda en su instrumento, ¿cómo influye esta operación?:

a) en la velocidad de propagación de las ondas;

b) en la frecuencia del sonido.

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

a) Tensar la cuerda supone aumentar F y, si F aumenta, aumenta la velocidad de propagación según la fórmula $v = \sqrt{\frac{F}{\eta}}$.

b) Si λ = cte como $\lambda = \frac{v}{f}$ al aumentar v, la frecuencia f también aumenta.

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

5 Si se estira una manguera y se le da un tirón se puede observar un pulso que viaja de un lado a otro de la manguera.

a) ¿Qué ocurre con la velocidad del pulso si se estira más la manguera?

b) ¿Qué pasa si la manguera está llena de agua?

c) Si cada tres segundos se da un tirón, ¿cuál es el período de las ondas que se generan en la manguera?

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

a) Al estirar una manguera disminuye la densidad lineal de masa (η) y según $v = \sqrt{\frac{F}{\eta}}$ la v aumenta pues es inversamente proporcional a la raíz de η.

b) Al llenarla de agua, η aumenta y por tanto v disminuye.

c) El período (T) es el tiempo que tarda en darse una impulsión, no el tiempo entre os pulso, a menos que sean iguales el período no será 3.

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

Cuestiones y problemas básicos

❶ Una cuerda tensa posee una densidad de 0,1 kg/m. Si su tensión es de 20 N, ¿con qué velocidad se propaga en ella una onda transversal?

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

η = 0,1 kg/m.
F = 20 N.

$$v = \sqrt{\frac{F}{\eta}} = \sqrt{\frac{20N}{0{,}1\frac{kg}{m}}} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2} \approx 1{,}41\frac{m}{s}$$

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

❷ Una emisora de radio emite en una frecuencia de 500 kilociclos. ¿En qué longitud de onda emite esta emisora? (Velocidad de las ondas de la radio $v=3\cdot10^8\ m\cdot s^{-1}$.)

****

f = 500 kHz.
$v = 3 \cdot 10^8$ m/s.

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{3\cdot10^8}{500000} = 600\ m$$

****

❸ Un pescador observa que el corcho de la caña se mueve ligeramente hacia arriba y hacia abajo veinte veces en 30 segundos debido a una onda que se propaga por la superficie. Si las crestas de la onda se encuentran a 60 cm entre sí, ¿con qué velocidad se propaga la onda?

****

f = 2/3 Hz.
λ = 60 cm = 0,6 m.

$$f = \frac{20\ ciclos}{30\ s} = 2/3\ Hz\ ;\ v = \lambda \cdot f = \frac{2}{3}\cdot 0{,}6 = 0{,}4\ m/s.$$

****

❹ Una onda tiene un período de 0,2 s y una longitud de onda de 40 cm. ¿Cuál es su velocidad de propagación?

****

T = 0,2 s.
λ = 40 cm = 0,4 m.

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{0{,}4}{0{,}2} = 2\frac{m}{s}$$

****

❺ Una onda armónica se propaga por una cuerda en sentido positivo de x con las siguientes características: amplitud 10 cm, frecuencia 20 Hz y velocidad 8 m/s. Escribe la ecuación de la onda.

****

A = 10 cm = 0,1 m.
f = 20 Hz.
v = 8 m/s.

Primero hallamos $\lambda = \frac{v}{f} = \frac{8}{20} = 0{,}4\ m$ y ahora escribimos la ecuación de la onda: $y(x,t) = A\cos 2\pi\left(ft - \frac{x}{\lambda}\right) = 0{,}1\cos 2\pi\left(20t - \frac{x}{0{,}4}\right) =$

= **0,1 cos2π(20t-2,5x) m**.

****

❻ Una onda transversal se propaga por una cuerda según la ecuación y = 0,4 cos (100t- 0,5x) en unidades de S I . Calcula:

a) La longitud de onda.

b) La velocidad de propagación.

❋❋❋❁❁❁✪❁❁❁❋❋❋

a) Si comparamos ecuaciones: $\left\{\begin{array}{l} y = A\cos 2\pi(ft - \frac{x}{\lambda}) \\ y = 0{,}4\cos(100t - 0{,}5x) \end{array}\right\}$ luego $\frac{2\pi}{\lambda} = 0{,}5 \rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{0{,}5} = 4\pi\,m$

b) Comparando las dos ecuaciones anteriores $2\pi f = 100$; $f = \frac{100}{2\pi} \rightarrow v = \lambda f = 4\pi\cdot\frac{100}{2\pi} = 200\,\frac{m}{s}$

❋❋❋❁❁❁✪❁❁❁❋❋❋

❼ Las ondas y_1 = 0,3 cos (200t - 0,05x_1), y_2 = 0,3 cos (200t - 0,05x_2) se propagan por el mismo medio.

a) ¿Con qué velocidad se propagan?

b) Si las ondas se anulan en un punto x, distante 10 m del centro emisor de la primera onda, ¿cuánto vale x_2?

❋❋❋❁❁❁✪❁❁❁❋❋❋

a)

$$\left\{\begin{array}{l} y = A\cos 2\pi\left(ft - \frac{x}{\lambda}\right) \\ y_i = 0{,}3\cos(200t - 0{,}05x_i) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2\pi f = 200 \Rightarrow f = \frac{200}{2\pi}Hz \\ \frac{2\pi}{\lambda} = 0{,}05 \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{0{,}05}m \end{array}\right\} \Rightarrow v = \lambda f = \frac{2\pi}{0{,}05}\cdot\frac{200}{2\pi} = 4000\,\frac{m}{s}$$

b) $x_2 - x_1 = \frac{\lambda}{2} \Leftrightarrow x_2 = x_1 + \frac{\lambda}{2} = 10 + \frac{40\pi}{2} = 10 + 20\pi = 72{,}82\,m$

❋❋❋❁❁❁✪❁❁❁❋❋❋

❽ Una masa de 2 gramos oscila con una frecuencia de 8 Hz y una amplitud de 4 cm. ¿Qué energía transmite la onda producida por este oscilador?

❋❋❋❁❁❁✪❁❁❁❋❋❋

m = 2 gr = 0,002 kg.
f = 8 Hz; ω = 2πf = 2π·8 = 16π rad/s.
A = 0,04 m.

Como $E_M = \frac{1}{2}kA^2$ necesitamos saber k = m ω^2 = 0,002 $(16\pi)^2$ = 5,05 N/m, sustituyendo:

$$E_M = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}5{,}05\cdot 0{,}04^2 = 0{,}00404\ J$$

❾ La ecuación de una onda sonora plana es y = 6 · 10^{-6} cos (1.900t + 5,72x), donde x, y vienen dados en metros y t en segundos. Calcula la frecuencia, la longitud de onda y la velocidad de propagación.

$$\left\{\begin{array}{c} y = A\cos 2\pi\left(ft + \frac{x}{\lambda}\right) \\ y = 6\cdot 10^{-6}\cos(1900t + 5{,}72x) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2\pi f = 1900 \to f = \frac{1900}{2\pi} = 302{,}4\ \text{Hz} \\ \frac{2\pi}{\lambda} = 5{,}72 \to \lambda = \frac{2\pi}{5{,}72} = 1{,}73\ \text{m} \end{array}\right\} \Rightarrow v = \lambda f = \frac{1900}{2\pi}\cdot\frac{2\pi}{5{,}72} = 332{,}17\ \frac{m}{s}$$

❿ El cociente de las frecuencias de dos movimientos ondulatorios es 2 y sus longitudes de onda son iguales. Deduce la relación entre sus velocidades.

$$\frac{f_1}{f_2} = 2\,;\ \left\{\begin{array}{l} v_1 = \lambda f_1 \\ v_2 = \lambda f_2 \end{array}\right\} \to \frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda f_1}{\lambda f_2} = \frac{f_1}{f_2} = 2 \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = 2$$

⓫ Escribe la ecuación de una onda que se propaga en sentido negativo del eje x y que tiene las siguientes características: A = 0,5 m; f = 250 Hz; v = 200 m/s.

Hallamos primero la longitud de onda:

$$v = \lambda \cdot f\ ;\ \lambda = \frac{v}{f} = \frac{200}{250} = \frac{4}{5} = 0{,}8\ \text{m.}$$

$$y = A\cos 2\pi\left(ft + \frac{x}{\lambda}\right) = 0{,}5\cos 2\pi\left(250t + \frac{x}{0{,}8}\right) = 0{,}5\cos\pi(500t + 2{,}5x)\ \text{m}$$

⓬ Una cuerda de 4 m tensada con una fuerza de 20 N transmite ondas con una velocidad de 10 m/s. ¿Cuánto vale su masa?

$$v = \sqrt{\frac{F}{\eta}} \Leftrightarrow \eta = \frac{F}{v^2} = \frac{20}{100} = 0{,}2\ \frac{kg}{m}\ \text{, además}\ \eta = \frac{m}{l} \Leftrightarrow m = \eta\cdot l = 0{,}2\frac{kg}{m}\cdot 4m = 0{,}8\ kg$$

PROBLEMAS AVANZADOS

1 Una onda de frecuencia 500 Hz tiene una velocidad de fase de 300 m/s. ¿Cuál es la separación entre dos puntos que tengan una diferencia de fase de 60º? ¿Cuál es la diferencia de fase entre dos elongaciones en un mismo punto que estén separadas por un intervalo de tiempo de una milésima de segundo?

❋❋❋❁❁❁✪❁❁❁❋❋❋

f = 500 Hz.
v = 300 m/s.
δ = 60º

Como $v = \lambda f \Rightarrow \lambda = \frac{v}{f} = \frac{300}{500} = \frac{3}{5} \to \omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 500 \frac{rad}{s}$

Como y(x,t) = A cos(ωt - kx) = A $\cos 2\pi\left(500t - \frac{5}{3}x\right)$ la diferencia de fase es:

$$\delta = 60º = \frac{\pi}{3}rad = 2\pi\left(500t - \frac{5}{3}x_1\right) - 2\pi\left(500t - \frac{5}{3}x_2\right) = 2\pi\left[500t - \frac{5}{3}x_1 - 500t + \frac{5}{3}x_2\right] = \frac{10\pi}{3}(x_2 - x_1)$$

y despejando $x_2 - x_1 = \frac{\pi/3}{10\pi/3} = \frac{1}{10} = 0{,}1\,m$

Para $\Delta t = t_1 - t_2 = 0{,}001$ s, hallamos la diferencia de fase:

$$\delta = 2\pi\left(500t_1 - \frac{5}{3}x\right) - 2\pi\left(500t_2 - \frac{5}{3}x\right) = 2\pi\left(500t_1 - \frac{5}{3}x - 500t_2 + \frac{5}{3}x\right) = 1000\pi(t_1 - t_2) = 1000\pi \cdot 0{,}001 = \pi\,rad$$

❋❋❋❁❁❁✪❁❁❁❋❋❋

2 La ecuación de una onda transversal que se propaga por una cuerda es y = 4 cosπ(100t - 0,75x) en centímetros y segundos. Calcula la longitud de onda y la velocidad de propagación.

Si la masa de la cuerda es 8 g/cm, halla la tensión a que está sometida.

❋❋❋❁❁❁✪❁❁❁❋❋❋

$$\left\{\begin{array}{l} y = A\cos 2\pi\left(ft - \frac{x}{\lambda}\right) \\ y = 4\cos\pi(100t - 0{,}75x) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2\pi f = 100\pi \to f = \frac{100\pi}{2\pi} = 50\ Hz \\ \frac{2\pi}{\lambda} = 0{,}75\pi \to \lambda = \frac{2\pi}{0{,}75\pi} = \frac{8}{3}\ cm \end{array}\right\} \Rightarrow v = \lambda f = \frac{8}{3} \cdot 50 = \frac{400}{3}\frac{cm}{s}$$

$\eta = 8\frac{gr}{cm} \cdot \frac{1kg}{1000gr} \cdot \frac{100cm}{1m} = 0{,}8\frac{kg}{m}$, ahora podemos hallar la tensión (F):

$$v^2 = \frac{F}{\eta} \to F = v^2\eta = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \cdot 0{,}8 = 1{,}4\overline{2}\ N$$

❋❋❋❁❁❁✪❁❁❁❋❋❋

3 Una onda sonora en sentido positivo del eje x con una velocidad de 30 m/s. Si su amplitud es de 5 cm y su frecuencia de 100 Hz, calcula la ecuación de propagación de la onda.

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

v = 30 m/s.
A = 5 cm = 0,05 m.
f = 100 Hz.

Hallamos la longitud de onda :

$v = \lambda f \Leftrightarrow \lambda = \frac{v}{f} = \frac{30\,m/s}{100\,Hz} = 0{,}3\,m$ y ahora podemos escribir la ecuación de la onda:

$$y(x,t) = A\cos 2\pi\left(ft - \frac{x}{\lambda}\right) = 0{,}05\cos 2\pi\left(100t - \frac{x}{0{,}3}\right)$$

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

4 La ecuación de una onda transversal es y = 25 sen (0,4t - 3,14x), donde x e y se expresan en metros y t en segundos. Determina:

a) Los puntos que están en fase y en oposición de fase.

b) ¿Qué tiempo tiene que transcurrir para que un punto situado a 5 m del foco tenga velocidad máxima?

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

a) Si estan en fase, $y_1 = y_2$;

25sen(0,4t – 3,14x_1) = 25sen(0,4t – 3,14x_2); sen(0,4t – 3,14x_1) = sen(0,4t – 3,14x_2), como el seno es una función periódica serán iguales cuado se diferencien en 2nπ rad para n = {0, 1, 2, ...}, luego: 0,4t – 3,14x_1 = 0,4t – 3,14x_2 + 2nπ; 3,14(x_2 – x_1)=2nπ$\Rightarrow x_2 - x_1 = \frac{2n\pi}{3{,}14} = 2n$, es decir están en fase los puntos que se diferencian en 2n, o sea nλ= 2n.

Si están en oposición de fase, y_1 = - y_2

25sen(0,4t – 3,14x_1) = - 25sen(0,4t – 3,14x_2); sen(0,4t – 3,14x_1) = - sen(0,4t – 3,14x_2), como el seno es una función periódica serán iguales cuado se diferencien en (2n+1)π rad para n = {0, 1, 2, ...}, luego: 0,4t – 3,14x_1 = 0,4t – 3,14x_2 + (2n+1)π; 3,14(x_2 – x_1)=(2n+1)π $\Rightarrow x_2 - x_1 = \frac{(2n+1)\pi}{3{,}14} = 2n+1$, es decir están en fase los puntos que se diferencian en 2n+1, o sea $(2n+1)\frac{\lambda}{2}$ = 2n+1.

b) Si x = 5; y(5,t)=25sen(0,4t- 3,14·5)$\Rightarrow v(t) = \frac{dy}{dt} = 25{\cdot}0{,}4\cos(0{,}4t - 15{,}7)$, velocidad que será máxima cuando cos(0,4t – 15,7) = 1$\Rightarrow$ 0,4t – 15,7 = 0 $\Leftrightarrow t = \frac{15{,}7}{0{,}4} = 39{,}25$ s

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

5 Se hace vibrar un extremo de una cuerda larga con un período de 2 s y una amplitud de 4 cm. La velocidad de las ondas es de 50 cm/s. Calcula:

a) El desplazamiento de una partícula situada a 100 cm del centro emisor en los tiempos t = 4 s, 4,5 s, 5 s.
b) El desplazamiento de las partículas situadas a las distancias 25, 75 y 100 cm del centro emisor para t = 2 s.

****

T = 2 s.
A = 4 cm = 0,04 m.
v = 50 cm/s = 0,5 m/s.
λ = v·T = 0,5 · 2 = 1 m.

a) Si x = 100 cm = 1 m, la ecuación de onda es:

$y(x,t) = A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right); y(1,t) = 0{,}04\cos 2\pi\left(\frac{t}{2}-\frac{1}{1}\right) = 0{,}04\cos 2\pi(0{,}5t-1)$, en donde sustituimos los tiempos dados:

- Para t = 4 s, y(1, 4) = 0,04 cos 2π(0,5·4 – 1) = 0,04 cos 2π = 0,04 · 1 = 0,04 m.
- Para t = 4,5 s, y(1, 4,5) = 0,04 cos 2π(0,5·4,5 – 1) = 0,04 cos 4,5π = 0,04 · 0 = 0 m.
- Para t = 5 s, y(1, 5) = 0,04 cos 2π(0,5·5 – 1) = 0,04 cos 3π = 0,04 ·(- 1) = - 0,04 m.

b) Para t = 0, la ecuación de onda queda: y(x, 2) = 0,04 cos 2π (1 – x), en donde sustituimos los valores de x dados:

- Para x = 0, 25 m; y(0,25, 2) = 0,04 cos2π(1 - 0,25) = 0,04cos 2π · 0,75 = 0,04cos1,5π = 0 m.
- Para x = 0, 75 m; y(0,75, 2) = 0,04 cos2π(1 - 0,75) = 0,04cos 2π · 0,25 = 0,04cos0,5π = 0 m.
- Para x = 1 m; y(1, 2) = 0,04 cos2π(1 - 1) = 0,04cos 2π · 0 = 0,04cos0 = 0,04 m.

****

6 La ecuación de una onda transversal que se propaga en una cuerda es y = 0,2 cos (0,5x - 200t), donde x e y se miden en centímetros y t en segundos. Calcula la velocidad transversal de la cuerda en x = 40 cm y t = 0,15 s.

****

Hallamos la velocidad derivando la longitud de la onda:

$v(t) = \frac{dy}{dt} = 40\text{sen}(0{,}5x - 200t)$, ecuación en donde sustituimos los valores dados de x y t:

v(40, 0,15) = 40 sen(0,5·40 – 200·0,15) = 40 sen (-10) = 21,76 cm/s.

✲✲✲❁❁❁✪❁❁❁✲✲✲

7 Halla la velocidad del sonido en el hidrógeno a 27ºC y compara dicha velocidad con la que tendría en el aire a la misma temperatura. Coeficiente adiabático de ambos gases 1,4.

✲✲✲❁❁❁✪❁❁❁✲✲✲

t = 27º C; T = 27 + 273 = 300 K.
γ = 1,4
Masa molecular del H_2= 2 gr/mol
Masa molecular del O_2= 32 gr/mol
Masa molecular del N_2= 28 gr/mol

$$v_{H_2} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M_{H_2}}} = \sqrt{\frac{1{,}4\cdot 8{,}31\cdot 300}{2\cdot 10^{-3}}} = 1321\frac{m}{s}$$

Hallamos la masa molecular media del aire :

$$M_{aire} = \%\, O_2 \cdot M_{Oxi} + \%\, N_2 \cdot M_{Nitro} = 0{,}21 \cdot 32 + 0{,}79 \cdot 28 = 28{,}84 \text{ gr/mol}$$

$$v_{aire} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M_{aire}}} = \sqrt{\frac{1{,}4\cdot 8{,}31\cdot 300}{28{,}84\cdot 10^{-3}}} = 347{,}88\frac{m}{s}$$

La relación entre ambas velocidades es : $\frac{v_{H_2}}{v_{aire}} = \frac{1321}{347{,}88} = 3{,}8 \Leftrightarrow v_{H_2} = 4v_{aire}$

✲✲✲❁❁❁✪❁❁❁✲✲✲