ACTIVIDADES (Página 16)

1 ¿Qué característica básica distingue un movimiento armónico de un movimiento vibratorio cualquiera?

Que la fuerza recuperadora es directamente proporcional al desplazamiento.

2 En general, ¿el movimiento de un péndulo es armónico?

Si el ángulo de desplazamiento respecto de la vertical es pequeño, se puede considerar armónico en el caso ideal (sin pérdidas por rozamiento), ya que la fuerza recuperadora $F = -mg\,\text{sen}\theta \approx -mg\,\theta$, seria proporcional al ángulo girado.

3 ¿Qué condición debe cumplir un péndulo para que oscile con movimiento armónico simple?

Si el ángulo de desplazamiento respecto de la vertical es pequeño, se puede considerar armónico simple, en el caso ideal, ya que la fuerza recuperadora $F = -mg\,\text{sen}\theta \approx -mg\,\theta$, seria proporcional al ángulo girado.

4 Hemos supuesto que se cumple $\text{sen}\,\theta = \theta$ para ángulos pequeños.

a) Comprueba que se verifica dicha equivalencia, rellenando la tabla siguiente. (Recuerda: 180° = 3,14 radianes.)

θ (en grados)	θ (en radianes)	sen θ
10º	0, 1744...	0,1736...
8º	0,13955...	0,13917...
5º	0,0872...	0,08715...
4º	0,06977...	0,06975...
2º	0,03488...	0,03489...
1º	0,01744....	0,01745...

b) ¿Qué error relativo cometeremos si aplicamos la equivalencia anterior para un ángulo de 15°? (Toma cuatro cifras decimales.)

$$\theta = 15^\circ = 0{,}2617 \text{ rad}; \ \ \text{sen}15^\circ = 0{,}2588$$

$$E_{absoluto} = |\,0{,}2617 - 0{,}2588\,| = 0{,}0029 \Rightarrow E_{relativo} = \frac{0{,}0029}{0{,}2588} \cdot 100 = 1{,}12\ \%$$

c) Si queremos que la equivalencia se cumpla con una aproximación de décimas, ¿qué ángulo máximo se puede tomar?

Para 15º hemos visto que sí se cumpliría, probemos con ángulos de mayor amplitud :

θ (en grados)	θ (en radianes)	sen θ
16º	0, 27…≈ 0,3	0,27… ≈ 0,3
20º	0,348… ≈ 0,3	0,342… ≈ 0,3
30º	0,523… ≈ 0,5	0,5
40º	0,6977… ≈ 0,7	0,642… ≈ 0,6
35º	0,610… ≈ 0,6	0,573… ≈ 0,6
38º	0,662…. ≈ 0,7	0,615… ≈ 0,6
37º	0,645… ≈ 0,6	0,601… ≈ 0,6

El ángulo máximo seria de 37º.

d) ¿Cuánto vale la constante recuperadora de un péndulo de 100 g de masa y 80 cm de longitud que oscila en la superficie de la Tierra con una amplitud angular de 5°.

$$k = \frac{mg}{l} = \frac{0{,}1 \cdot 9{,}8}{0{,}8} = 1{,}225\ \frac{N}{m}$$

ACTIVIDAD (Página 18)

5 El movimiento de una partícula viene dado por la ecuación:

$$x = 8\text{sen}\frac{\pi}{2}t; \text{ en cm}$$

a) ¿Cuánto vale la amplitud de este movimiento?

Comparamos la ecuación con la general del m.a.s. :

$$\left\{\begin{array}{c} x = A\text{sen}(\omega t + \varphi_0) \\ x = 8\text{sen}\dfrac{\pi}{2}t \end{array}\right\}, \text{ luego } A = 8 \text{ cm}$$

b) ¿Cuánto vale el período?

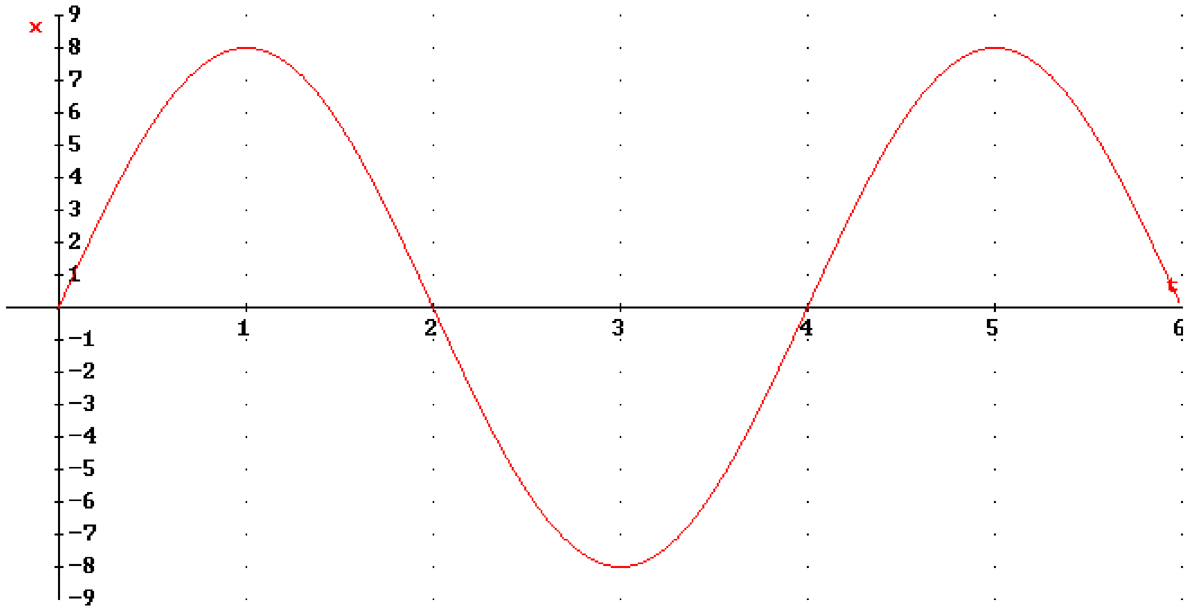
De la comparación deducimos $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow T = 4\ s$

c) Calcula la posición de la partícula en los instantes que se indican en la tabla siguiente:

$$x = 8\text{sen}\frac{\pi}{2}\cdot 0 = 0\ \text{cm};\ x = 8\text{sen}\frac{\pi}{2}\cdot 1 = 8\ \text{cm, etc.}$$

t(s)	0	1	2	3	4	5
x(cm)	0	8	0	-8	0	8

d) Representa los valores de la tabla anterior en un diagrama x-t.



✲✲✲❀❀✲❀❀✲✲✲

CUESTIONES Y PROBLEMAS BÁSICOS

① Una masa de 1 kg cuelga de un resorte k = 100 N/m. Si la desplazamos 5 cm y la soltamos, calcula:

a) La velocidad que tiene cuando pasa por la posición de equilibrio.

b) El período de oscilación.

✲✲✲❀❀✲❀❀✲✲✲

m = 1 kg.
k = 100 N/m.
A = 5 cm = 0,05 m.

a) Hallamos la fase inicial: $t = 0;\ y = A \Rightarrow A = A\text{sen}(\omega t + \delta) \Rightarrow \text{sen}\delta = 1 \Leftrightarrow \delta = \frac{\pi}{2}$, luego y tenemos la ecuación de la elongación:

$y = 0{,}05\mathrm{sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$, necesitamos saber la fase: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{100\ N/m}{1\ kg}} = 10\frac{rad}{s}$.

Para hallar la velocidad derivamos la elongación:

$$v(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(0{,}05\mathrm{sen}\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)\right) = 0{,}5\cos\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Como en la posición de equilibrio la velocidad es máxima (cos(10t+π/2)=1), queda :

$$\mathbf{V_{máx} = 0{,}5\ m/s}.$$

b) $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{10} = 0{,}628\ s$

❊❊❊❊❊❊⊙❊❊❊❊❊❊

➋Una partícula de 100 g de masa vibra con una frecuencia de 20 Hz. Calcula la constante recuperadora.

❊❊❊❊❊❊⊙❊❊❊❊❊❊

m = 100 gr = 0,1 kg.
f = 20 Hz ⇒ T = 1/20 s.

$$k = m\omega^2 = m(2\pi f)^2 = 0{,}1(2\pi\cdot 20)^2 = 160\pi^2\ \frac{N}{m}$$

❊❊❊❊❊❊⊙❊❊❊❊❊❊

➌ Escribe la ecuación de un m.a.s. sabiendo que posee una amplitud de 15 cm, una frecuencia de 4 Hz y que para t = 0 el móvil se encuentra en el punto medio de la amplitud.

❊❊❊❊❊❊⊙❊❊❊❊❊❊

A = 15 cm = 0,15 m.
f = 4 Hz ; ω = 2π f = 8π rad/s

Para t = 0 y = A/2, luego $y = A\mathrm{sen}(\omega t + \delta);\ \frac{A}{2} = A\mathrm{sen}\delta \Leftrightarrow \mathrm{sen}\delta = \frac{1}{2} \Rightarrow \delta = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$

La ecuación queda : $y = A\mathrm{sen}(\omega t + \delta) = 0{,}15\mathrm{sen}\left(8\pi t + \frac{\pi}{6}\right)\ m$

❊❊❊❊❊❊⊙❊❊❊❊❊❊

➍ Una masa oscila con frecuencia de 8 Hz y una amplitud de 4 cm. Si m = 2 g, calcula la energía cinética y la energía potencial del oscilador cuando la elongación vale 1 cm.

❊❊❊❊❊❊⊙❊❊❊❊❊❊

f = 8 Hz ⇒ ω = 2πf = 2π· 8 = 16π rad/s.
A = 4 cm = 0,04 m.
m = 2 gr = 0,002 kg
x = 1 cm = 0,01 m.

Primero hallamos la constante del oscilador :

$$k = m\omega^2 = 0{,}002 \cdot (16\pi)^2 = 0{,}512\ \pi^2\ \text{N/m}.$$

y ahora las energías pedidas :

- $E_c = \frac{1}{2}k\left(A^2 - x^2\right) = \frac{1}{2}0{,}512\pi^2\left(0{,}04^2 - 0{,}01^2\right) = 3{,}7910^{-3}\ \text{J}$

- $E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}0{,}512\pi^2 \cdot 0{,}01^2 = 2{,}54 \cdot 10^{-4}\ \text{J}$

⑤ Un punto vibra con una amplitud de 4 cm y una frecuencia de 50 Hz. Halla:

a) La máxima velocidad con que vibra.
b) La velocidad cuando la elongación vale 1 cm.
c) ¿Cuántas vibraciones da en un minuto?

A = 4 cm = 0,04 m.
f = 50 Hz ➲ $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 = 100\pi$ rad/s.

a) $v_{máx} = A\omega = 0{,}04 \cdot 100\pi = 4\pi$ m/s.

b) En x = 0,01 m, la velocidad es: $v = \omega\sqrt{A^2 - x^2} = 100\pi\sqrt{0{,}04^2 - 0{,}01^2} = 3{,}873\pi\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

c) En t = 1 min = 60 s, $N = f \cdot t = 100\pi\ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 60\ \text{s} = 6\ 000\pi\ \text{rad} = 6\ 000\pi\ \text{rad} \cdot \frac{1\text{vib}}{2\pi\text{rad}} = 3$ 000 vibraciones.

⑥ Una masa de 0,5 kg está unida a un resorte y se mueve con m.a.s. con un período de 0,4 s. Si la energía mecánica del sistema es 4 J, calcula:

a) La constante del resorte.
b) La amplitud del movimiento.

m = 0,5 kg.
T = 0, 4 s.
E_A = 4 J

a) $k = m\omega^2 = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = 0{,}5\left(\frac{2\pi}{0{,}4}\right)^2 = 123{,}37\ \frac{\text{N}}{\text{m}}$

b) Como $E = \frac{1}{2}kA^2 \Leftrightarrow A = \sqrt{\frac{2E}{k}} = \sqrt{\frac{2\cdot 4}{123,37}} = 0,255$ m.

⑦ Un astronauta ha instalado en la Luna un péndulo simple de 0,86 m de longitud y comprueba que oscila con un período de 4,6 s. Ayuda al astronauta a calcular la aceleración de la gravedad sobre la superficie lunar.

$l = 0,86$ m.
$T = 4,6$ s

$$\text{Como } T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_L}} \Leftrightarrow g_L = \frac{4\pi^2 l}{T^2} = \frac{4\pi^2\cdot 0,86}{4,6^2} = 1,6045\ \frac{m}{s^2}$$

⑧ Un niño de 30 kg se columpia con una amplitud de 0,5 m en un columpio de 3 m. ¿Con qué período y frecuencia se columpia? ¿Cuál es la velocidad máxima del muchacho? (Fig. 1.25).


Figura 1.25.

$m = 30$ kg.
$A = 0,5$ m.
$l = 3$ m.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{3}{9,8}} \approx 3,47\text{s}$$

$$v_{Máx} = A\omega = A\frac{2\pi}{T} = 0,5\cdot\frac{2\pi}{3,47} = 0,91\ \frac{m}{s}$$

⑨ Tarzán se desplaza en la selva columpiándose de un árbol a otro, para ello utiliza una enredadera que pende de una rama que está a 15 m de altura respecto a su cabeza. El punto de suspensión de la rama está situado a la mitad de camino entre dos árboles.
Estima el intervalo de tiempo de su balanceo si se deja caer desde un árbol y se columpia en la enredadera hasta alcanzar el siguiente árbol. ¿Depende el resultado de la distancia entre dos árboles?


Figura 1.26.

- $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{15}{9,8}} \approx 7,77$ s
- No depende de la distancia entre los árboles pues sólo depende de la longitud y del valor de g en ese punto de la superficie terrestre.

PROBLEMAS AVANZADOS

①Una partícula se deja libre en el punto A de la Figura 1.27. Deslizándose sin rozamiento, si h = 10 m y a = 30°.

a) Halla el período del movimiento.

b) ¿Es armónico este movimiento?

****

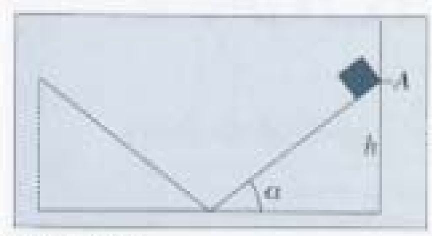


Figura 1.27.

a) La partícula llega en la rampa de la izquierda hasta una altura de 10 m (no hay rozamiento) y vuelve al punto A.

La fuerza que hace bajar el cuerpo por el palno inclinado es la componente horizontal del peso (Px) que nos permite hallar al aceleración del movimiento :

Px = mg senα = ma, luego a = gsenα, como sen$\alpha = \frac{h}{l}$, la longitud del plano inclinado l = h/senα, conocida la longitud y la aceleración podemos despejar el tiempo que tarda e cuerpo en llegar a la base del plano con movimiento acelerado:

$$l = \frac{h}{sen\alpha} = \frac{1}{2}at^2 \Leftrightarrow \frac{h}{sen\alpha} = \frac{1}{2}gsen\alpha t^2 \Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{gsen^2 30^o}} = \sqrt{\frac{2{\cdot}10}{9{,}8{\cdot}(0{,}5)^2}} = 2{,}857 \text{ s}$$

Como el período el tiempo que tarda en realizar una oscilación completa y para esto tiene que recorrer cada plano inclinado dos veces T = 4t = 4 · 2,857 s = 11,428 s.

b) Es un movimiento oscilatorio o vibratorio pero no armónico simple ya que la fuerza (componente horizontal del peso Px) no es proporcional y de sentido contrario al desplazamiento sino constante.

****

②Un cuerpo vibra con m.a.s. Cuando se encuentra en la mitad de la amplitud, ¿qué porcentaje de energía es cinética y qué porcentaje es energía potencial? ¿En qué punto las dos energías son iguales?

****

x = A/2

❍ $\%Ec = \frac{Ec}{Em}{\cdot}100 = \frac{\frac{1}{2}k\left(A^2 - \left(\frac{A}{2}\right)^2\right)}{\frac{1}{2}kA^2} = \frac{A^2 - \frac{A^2}{4}}{A^2} = \frac{\frac{3A^2}{4}}{A^2} = \frac{3}{4} = 75\%$, el porcentaje de energía potencial = 100 - %Ec = 100 – 75 = 25 %.

❍ $Ec = Ep \Rightarrow \frac{1}{2}k\left(A^2 - x^2\right) = \frac{1}{2}kx^2 \Leftrightarrow A^2 - x^2 = x^2 \Leftrightarrow A^2 = 2x^2 \Leftrightarrow x = \frac{A}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}A$

****

③Un péndulo de período T segundos se cuelga del techo de un ascensor (Fig. 1.28). Calcula el período de oscilación del péndulo cuando el ascensor baja con una aceleración igual a la mitad de la gravedad en ese lugar.

****


Figura 1.28.

$$\left\{\begin{array}{l} T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \\ T' = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g'}} \end{array}\right\} \text{Ademas } g' = \frac{1}{2}g \Rightarrow T' = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\frac{1}{2}g}} = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\sqrt{2} = T\sqrt{2}$$

****

④Cuando una masa de 1 kg sé cuelga de un muelle vertical de masa despreciable, el período de las oscilaciones es de 1,43 s. Cuando una masa desconocida reemplaza a la masa de 1 kg, el período es de 1,85 s. Calcula:

a) La masa desconocida.

b) La constante elástica del muelle.

****

a) $$\left\{\begin{array}{l} T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}} \\ T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k}} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k}}}{2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}}} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \Leftrightarrow \frac{m_2}{m_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 \Rightarrow m_2 = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 m_1 = \left(\frac{1,85}{1,43}\right)^2 1 = 1,67 \text{ kg}$$

b) $$k = m\omega^2 = m_1\omega_1^2 = m_2\omega_2^2 = m_1\left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^2 = m_2\left(\frac{2\pi}{T_2}\right)^2 = 1\left(\frac{2\pi}{1,43}\right)^2 = 1,67\left(\frac{2\pi}{1,85}\right)^2 \approx 19,3\,\frac{N}{m}$$

****

⑤ Un oscilador está formado por una masa de 2,4 kg colgada de un resorte de masa despreciable y k = 200 N/m. Las condiciones iniciales son X_0 = 0,15 m y V_{X0} = 0,45 m/s. Calcula la posición del bloque para t = 3 s.

****

m = 2,4 kg.
k = 200 N/m.
x_0 = 0,15 m.
v_{0x} = 0, 45 m/s.

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{200}{2,4}} \approx 9,13\ \frac{rad}{s}$$

x = A sen (ωt + φ), para t = 0; x_0 = Asen φ, $v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(A sen(\omega t + \varphi)) = A\omega \cos(\omega t + \varphi)$, cuando t = 0 $v_0 = A\omega\cos\varphi$

Sustituyendo y dividiendo:

$$\left\{\begin{matrix} v_0 = A\omega\cos\varphi \\ x_0 = A sen\varphi \end{matrix}\right\} \rightarrow \frac{0,45}{0,15} = \frac{A\omega\cos\varphi}{A sen\varphi} = \omega \cot g\varphi \Leftrightarrow \cot g\varphi = \frac{3}{\omega} = \frac{3}{9,13} = 0,3286$$

φ = arccotg0,3286 = 71,81º = 1,253 rad, luego $A = \frac{x_0}{sen\varphi} = \frac{0,15}{sen 71,81^o} = 0,15789$ m

si sustituimos en la ecuación de la elongación:

x = 0,15789 sen(9,13·3 + 1,253) = - 0,057 m.

Un cuerpo de 500 g de masa pende de un muelle. Cuando se tira de él 10 cm por debajo de su posición de equilibrio y se abandona a sí mismo, oscila con un período de 2 s.

a) ¿Cuál es su velocidad al pasar por la posición de equilibrio?
b) ¿Cuál es su aceleración cuando se encuentra a 10 cm por encima de su posición de equilibrio?
c) ¿Cuánto se acortará el muelle si se quita él cuerpo?

m = 500 gr = 0,5 kg.
A = 10 cm = 0,1 m.
T = 2s $\Rightarrow$ $\omega = 2\pi/T = \pi$ rad/s

a) $v_{equilibrio} = v_{Máx} = A\omega = 0,1 \cdot \pi = 0,1\pi$ m/s

b) $a = a_{Máx} = \omega^2 A = \pi^2 \cdot 0,1 = 0,1\pi^2$ m/s^2.

c) Como F = -kx = Peso = mg $\Rightarrow x = \frac{mg}{k} = \frac{mg}{m\omega^2} = \frac{g}{\omega^2} = \frac{9,8}{\pi^2} = 0,994$ m