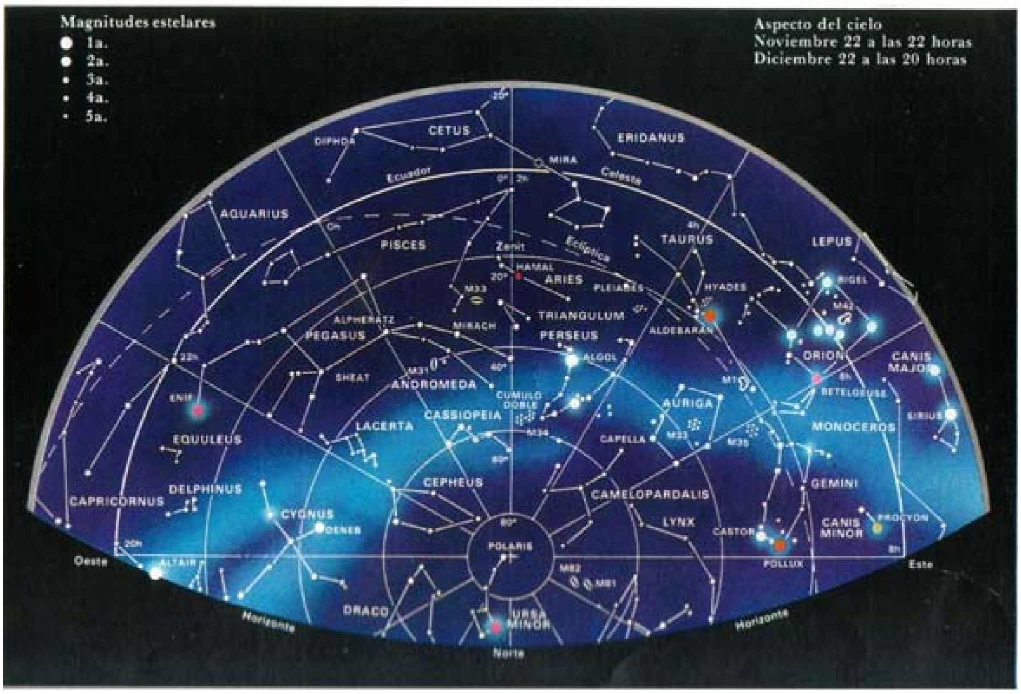
## ACTIVIDADES

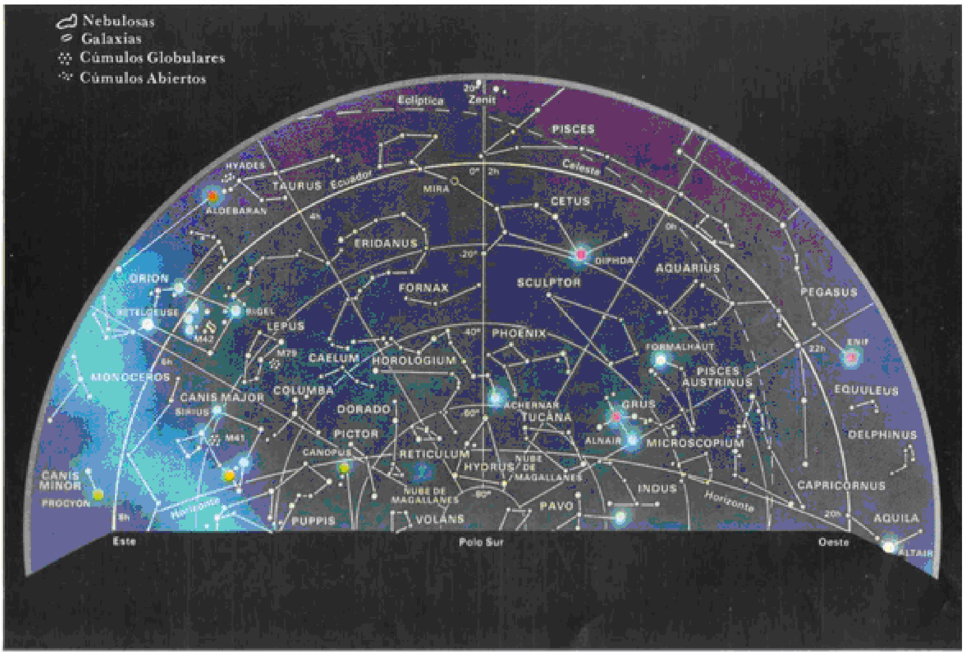
**1** ¿Cómo se explica el hecho de que al viajar hacia el sur se observen estrellas diferentes?

Por el hecho de que la Tierra gira. Desde Copérnico sabemos que es la Tierra la que gira alrededor de su eje completando una vuelta en 23 h 56 min 4 s (un día sidéreo). No obstante se sigue con la misma concepción tolomeica, asumiendo que el movimiento de la esfera celeste es aparente, siendo la Tierra la que gira realmente. Situado en el plano del horizonte y en el transcurso de un día un observador ve a los astros dar una vuelta alrededor del eje del mundo, en dirección este-sur-oeste mirando hacia el sur, o bien en sentido este-norte-oeste mirando hacia el norte.

HEMISFERIO NORTE




HEMISFERIO SUR



El movimiento diurno del Sol es un movimiento retrógrado, de sentido horario en el hemisferio Norte (porque se ve el Sol hacia el Sur), y antihorario en el hemisferio Sur (porque se ve al Sol en dirección Norte).

Los únicos puntos de la esfera celeste que permanecen fijos son los polos celestes; todos los demás, y las estrellas con ellos parecen girar en círculos concéntricos alrededor de aquéllos. El polo norte celeste está situado sobre el punto cardinal norte a una altura que coincide con la latitud del observador. En el polo norte un observador vería la estrella polar en el cenit. Para un observador situado en el ecuador terrestre, el polo norte está sobre el horizonte. A latitudes intermedias, por ejemplo a 40º, el polo celeste se encuentra a una altura de 40º sobre el horizonte.

Entre las estrellas más próximas al polo norte, la más fácilmente visible es la estrella polar, que se encuentra a un grado de éste, y describiendo un círculo alrededor de él. El radio de dicho círculo es unas dos veces el diámetro angular nuestra Luna.

2 Cuando en el lenguaje coloquial hablamos de que el Sol «sale» y el Sol «se pone», ¿a qué teoría sobre el universo estamos aludiendo de manera inconsciente?

La teoría geocéntrica: Coloca la Tierra en el centro del Universo y los astros, incluido el Sol, girando alrededor de ella (*geo*: Tierra; *centrismo*: centro). Fue formulada por Aristóteles y estuvo en vigor hasta el siglo XVI, en su versión completada por Claudio Ptolomeo en el siglo II a. C., en su obra *El Almagesto*, en la que introdujo los llamados epiciclos, ecuantes y deferentes.

3 El Sol visto desde la Tierra se mueve más rápidamente contra el fondo de estrellas en invierno que en verano. Sobre la base de este hecho y de las leyes de Kepler, ¿qué puede decirse acerca de la distancia relativa de la Tierra al Sol durante estas dos estaciones?

Podemos decir que las distancias son distintas. Es consecuencia de la Segunda ley de Kepler:

*El vector posición de cualquier planeta respecto del Sol, barre áreas iguales de la elipse en tiempos iguales.*

La ley de las áreas es equivalente a la constancia del momento angular, es decir, cuando el planeta está más alejado del Sol (afelio) su velocidad es menor que cuando está más cercano al Sol (perihelio). En el afelio y en el perihelio, el momento angular *L* es el producto de la masa del planeta, por su velocidad y por su distancia al centro del Sol.

$$L=mr_1 \cdot v_1=mr_2 \cdot v_2$$

4 «En los comentarios sobre Marte he logrado demostrar, partiendo de las exactas observaciones de Tycho Brahe, que, dados unos arcos iguales recorridos en un día a cargo de la misma órbita excéntrica, no son coronados a la misma velocidad, sino que los distintos tiempos utilizados para recorrer partes iguales del excéntrico son proporcionales a la distancia de estas con el Sol, manantial del movimiento, y viceversa: dados unos tiempos iguales, por ejemplo, un día natural, los arcos diurnos que les corresponde, recorridos dentro de la misma órbita excéntrica, se hallan entre sí en proporción inversa a las dimensiones de sus distancias con respecto al Sol. Junto a esto, he demostrado que la órbita es elíptica y que el Sol se encuentra en uno de los dos focos de dicha elipse».
Identifica las tres leyes en este fragmento de *Harmonices mundi* de Kepler.

Primera ley (de las órbitas): Junto a esto, he demostrado que la órbita es elíptica y que el Sol se encuentra en uno de los dos focos de dicha elipse.

Segunda ley (de las áreas): dados unos arcos iguales recorridos en un día a cargo de la misma órbita excéntrica, no son coronados a la misma velocidad, sino que los distintos tiempos utilizados para recorrer partes iguales del excéntrico son proporcionales a la distancia de estas con el Sol, manantial del movimiento, y viceversa: dados unos tiempos iguales, por ejemplo, un día natural, los arcos diurnos que les corresponde, recorridos dentro de la misma órbita excéntrica, se hallan entre sí en proporción inversa a las dimensiones de sus distancias con respecto al Sol.

Tercera ley (de los períodos): los distintos tiempos utilizados para recorrer partes iguales del excéntrico son proporcionales a la distancia de estas con el Sol, manantial del movimiento, y viceversa: dados unos tiempos iguales, por ejemplo, un día natural, los arcos diurnos que les corresponde, recorridos dentro de la misma órbita excéntrica, se hallan entre sí en proporción inversa a las dimensiones de sus distancias con respecto al Sol.

**5** Calcula la constante de la tercera ley de Kepler para el sistema Tierra-Luna. ¿Coincide con la del sistema Sol-Tierra?

$K_{T-L} = \frac{R^3_{T-L}}{T^2} = \frac{(38{,}44 \cdot 10^7)^3}{(28 \cdot 24 \cdot 3600)^2} = 9{,}71 \cdot 10^{12}\ \frac{m^3}{s^2}$ No ya que el centro de giro en este caso es la Tierra y en el sistema Tierra Sol es el Sol.

**6** ¿Qué hipótesis hemos hecho para deducir la ley de Gravitación Universal?

La hipótesis consiste en suponer que $4\pi^2 K_S$ es proporcional a la masa del Sol: $4\pi^2 K_S = G \cdot m_S$.

**7** ¿Cuál es el significado del signo menos en la expresión vectorial de la ley de Gravitación Universal?

$$\vec{F} = -G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \vec{u}_r$$

El signo menos indica que la fuerza es atractiva es decir que el vector fuerza ( $\vec{F}$ ) y el vector distancia entre las masas ( $\vec{r}$ ) tienen la misma dirección pero sentidos opuestos.

**8** ¿Por qué decimos que la ley de Newton tiene carácter universal?

Porque es aplicable a dos masas cualesquiera en cualquier lugar del universo.

❋❋❋❁❁❁✪❁❁❁❋❋❋

**9** ¿Qué significado tiene el que G sea una constante universal?

❋❋❋❁❁❁✪❁❁❁❋❋❋

La **constante de gravitación universal** es una constante de la naturaleza que determina la intensidad de la fuerza de atracción gravitatoria entre los cuerpos. Se denota por **G** y aparece tanto en la Ley de gravitación universal de Newton como en la Teoría general de la relatividad de Einstein

Es una constante universal que no depende de los cuerpos considerados, ni de su posición, ni del estado de movimiento en que se encuentran y representa el valor de la fuerza de atracción de dos masas de 1 kg separadas 1 m:

$$G = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{N\cdot m^2}{kg^2}$$

❋❋❋❁❁❁✪❁❁❁❋❋❋

**10** Una masa de 54 kg dista 1 m de otra masa de 72 kg. ¿Cuál es la fuerza de atracción gravitatoria entre ellas?

❋❋❋❁❁❁✪❁❁❁❋❋❋

Módulo del vector fuerza: $F = G\frac{m_1\cdot m_2}{r^2} = 6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{N\cdot m^2}{kg^2}\cdot\frac{54kg\cdot 72kg}{(1m)^2} = 2{,}59\cdot 10^{-7}N$, dirección la de la recta que las une y sentido de atracción.

❋❋❋❁❁❁✪❁❁❁❋❋❋

**11** Si las masas de la actividad anterior están libres para moverse, ¿cuáles son sus respectivas aceleraciones en ausencia de otras fuerzas?

❋❋❋❁❁❁✪❁❁❁❋❋❋

Las aceleraciones se dirigen hacia la otra masa y tienen por módulo:

$$a_1 = \frac{F}{m_1} = G\frac{m_2}{r^2} = \frac{2{,}59\cdot 10^{-7}N}{54kg} = 4{,}5\cdot 10^{-9}\ \frac{m}{s^2} \qquad a_2 = \frac{F}{m_2} = G\frac{m_1}{r^2} = \frac{2{,}59\cdot 10^{-7}N}{72kg} = 3{,}6\cdot 10^{-9}\ \frac{m}{s^2}$$

❋❋❋❁❁❁✪❁❁❁❋❋❋

**12** Calcula la velocidad conque orbita un satélite artificial situado a 1 000 km de la superficie terrestre.

❋❋❋❁❁❁✪❁❁❁❋❋❋

Para que gire en torno a la Tierra, la velocidad (v) que han de comunicarle los cohetes ha de ser suficiente para que la fuerza centrífuga generada contrarreste la fuerza de atracción gravitatoria

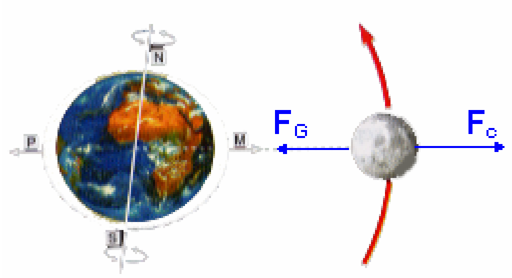
$$F_G = F_c \Leftrightarrow G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}}{1\cdot 10^6}} = 19971{,}63\ \frac{m}{s}$$

**13** ¿Cuál es el período de revolución del satélite del ejercicio anterior?

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G\cdot M_T}} = 2\pi\sqrt{\frac{(6{,}37\cdot 10^6 + 1\cdot 10^6)^3}{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}}} = 6294{,}6\text{s}$$

**14** Si la fuerza conque la Tierra atrae ala Luna es del mismo tipo que la fuerza que hace caer una manzana de un árbol, ¿por qué la Luna no «cae» hacia la Tierra?

La luna no cae hacia la Tierra porque la fuerza centrífuga debido al giro alrededor de la Tierra equilibra, por ir en la misma dirección pero en sentido contrario, la fuerza de atracción.




**15** ¿En qué punto de su trayectoria tiene su velocidad mínima un satélite artificial cuya órbita es elíptica? (Ayuda: se trata de aplicar el principio de conservación del momento angular).

La ley de las áreas es equivalente a la constancia del momento angular, es decir, cuando el satélite está más alejado de la Tierra (afelio) su velocidad es menor que cuando está más cercano a ella (perihelio) ya que distancia y velocidad han de ser inversamente proporcionales para que se conserve el momento angular. En el afelio y en el perihelio, el momento angular *L* es el producto de la masa del satélite, por su velocidad y por su distancia al centro de la Tierra.

$$L = mr_1\cdot v_1 = mr_2\cdot v_2$$

**16** Calcula el momento angular de la Tierra suponiendo que su trayectoria es circular.

$$L = M_T\cdot r_{S-T}\cdot v = M_T\cdot r_{TS}^2\cdot w = 5{,}98\cdot 10^{24}\cdot(1{,}49\cdot 10^{11})^2\cdot\frac{2\pi}{365\cdot 24\cdot 3600} = 2{,}64\cdot 10^{40}\ \frac{kg\cdot m^2}{s}$$

**17** ¿Cuánto vale el módulo de la intensidad de campo gravitatorio creado por una esfera de 50 kg en un punto que dista 5 m de su centro?

$$g = G\frac{m}{r^2} = 6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{50}{5^2} = 1{,}334\cdot 10^{-10}\ \frac{m}{s^2}$$ es el módulo de la intensidad gravitatoria.

**18** ¿Cuánto vale el módulo de la intensidad de campo gravitatorio en el punto medio de la línea que une dos esferas de 100 kg y 250 kg separadas 1 m?

Si están separadas 1 m, la distancia en la vamos a hallar la intensidad del campo gravitatorio es de 0,5 m. Hallamos los módulos del campo de las dos masas en ese punto medio:

$$g_1 = G\frac{m_1}{r^2} = 6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{100}{0{,}5^2} = 2{,}668\cdot 10^{-8}\ \frac{m}{s^2}$$
$$g_2 = G\frac{m_2}{r^2} = 6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{250}{0{,}5^2} = 6{,}67\cdot 10^{-8}\ \frac{m}{s^2}$$

Y, ahora aplicando el principio de superposición, hallamos el vector resultante considerando el sentido positivo el de mayor módulo:

$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = 2{,}668\cdot 10^{-8}(-\vec{i}) + 6{,}67\cdot 10^{-8}\ \vec{i} = 4\cdot 10^{-8}\ \vec{i}\ \frac{m}{s^2}$$

**19** Calcula la masa de la Luna sabiendo que la gravedad en la superficie de la Luna es 50 veces menor que en la Tierra. El volumen de la Luna es 50 veces menor que el de la Tierra.

Relacionamos los módulos de la gravedad en los dos cuerpos celestes:

$$\frac{g_L}{g_T} = \frac{g_L}{50g_L} = \frac{1}{50} = \frac{G\frac{M_L}{R_L^2}}{G\frac{M_T}{R_T^2}} = \frac{M_L}{M_T}\cdot\left(\frac{R_T}{R_L}\right)^2 \Leftrightarrow M_L = \frac{1}{50}M_T\cdot\left(\frac{R_T}{R_L}\right)^2 = \frac{1}{50}M_T\cdot\left(\frac{\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}V_T}}{\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}V_L}}\right)^2 = \frac{1}{50}M_T\cdot\left(\frac{\sqrt[3]{50V_L}}{\sqrt[3]{V_L}}\right)^2 =$$
$$= \frac{1}{50}M_T\cdot\left(\sqrt[3]{50}\right)^2 = \frac{1}{\sqrt[3]{50}}M_T$$ , necesitamos conocer la densidad media o la masa de la Tierra.

**20** Calcula el radio de la Tierra en el polo Norte y en el ecuador, conocidos los valores de g en dichos puntos.

Necesitamos también la masa de la Tierra $M_T = 5{,}98\cdot 10^{24}$ kg o $g_0 = 9{,}8\ m/s^2$

$$g_E = G\frac{M_T}{R_E^2} \Leftrightarrow R_E = \sqrt{\frac{G{\cdot}M_T}{g_E}} = \sqrt{\frac{6{,}67{\cdot}10^{-11}{\cdot}5{,}98{\cdot}10^{24}}{9{,}781}} = 6385897\text{ m.}$$

$$g_{PN} = G\frac{M_T}{R_{PN}^2} \Leftrightarrow R_{PN} = \sqrt{\frac{G{\cdot}M_T}{g_{PN}}} = \sqrt{\frac{6{,}67{\cdot}10^{-11}{\cdot}5{,}98{\cdot}10^{24}}{9{,}832}} = 6369312\text{ m.}$$

*************

**21** Calcula la altura necesaria que hay que subir por encima de la superficie de la Tierra para que la aceleración de la gravedad sea de 7 m/s².

*************

$$g = G\frac{M_T}{(R+h)^2} = \frac{g_0}{\left(1+\frac{h}{R}\right)^2} \Leftrightarrow h = R{\cdot}\left(\sqrt{\frac{g_0}{g}}-1\right) = 6370\text{km}{\cdot}\left(\sqrt{\frac{9{,}81}{7}}-1\right) = 1171\text{km de altura.}$$

*************

**22** Al subir una montaña, ¿el trabajo realizado sobre el cuerpo por la gravedad es distinto si se toma un camino corto y empinado en lugar de un camino más largo de pendiente suave?

*************

Como la fuerza gravitatoria es conservativa y para subir una montaña el trabajo que hay que hacer es en contra de esa fuerza, es decir trabajo de la fuerza gravitatoria, dicho trabajo es independiente de la trayectoria que sigamos para ir de uno a otro punto, sólo depende del punto inicial y el final, si estos son los mismos, el trabajo realizado será el mismo independientemente del camino que escojamos para ir de uno a otro.

*************

**23** ¿Qué trabajo se realiza al desplazar un cuerpo de 1 000 kg desde la superficie terrestre hasta una distancia igual a tres veces el radio terrestre?

*************

$$W = G M_T{\cdot}m{\cdot}\left(\frac{1}{R_T}-\frac{1}{3R_T}\right) = \frac{G{\cdot}M_T}{R_T}{\cdot}m\frac{2}{3} = \frac{G{\cdot}M_T}{R_T^2}{\cdot}m\frac{2R_T}{3} = \frac{2}{3}mg_0R_T = \frac{2}{3}1000{\cdot}9{,}8{\cdot}6{,}370{\cdot}10^6 = 4{,}16{\cdot}10^{10}\text{ J.}$$

*************

**24** ¿Cuál es el significado físico del signo menos en la expresión de la energía potencial?

*************

El signo menos indica que es necesario suministrar energía para que un cuerpo escape a la atracción gravitatoria de otro.

*************

**25** Responde verdadero o falso:

**a)** Cuando una partícula recorre una trayectoria cerrada el trabajo total realizado por la fuerza conservativa es cero.

**b)** El trabajo realizado por una fuerza conservativa disminuye la energía potencial asociada con dicha fuerza.

✻✻✻✻✻✻✻✪✻✻✻✻✻✻✻

**a)** Como $W_A^B = G \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot \left( \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$ si el punto inicial y el final coinciden, el paréntesis es nulo y por tanto lo es trabajo relazado, como la fuerza es conservativa, el trabajo sólo depende de las posiciones inicial y final, si la trayectoria es cerrada coinciden ambas posiciones y no hay trabajo.

**b)** El trabajo realizado por una fuerza conservativa se emplea en disminuir su energía potencial, o en aumentar su energía cinética, luego no siempre es verdadero.

✻✻✻✻✻✻✻✪✻✻✻✻✻✻✻

**26** Una fuerza conservativa realiza un trabajo de 25 J al moverse del punto $x_1$ al $x_2$.

**a)** Determina la variación de la energía potencial de la partícula al desplazarse entre estos dos puntos.

**b)** Si la energía potencial de la partícula es cero en $x_1$ ¿cuánto valdrá en $x_2$?

✻✻✻✻✻✻✻✪✻✻✻✻✻✻✻

**a)** $W_{x_1}^{x_2} = -\Delta Ep \Leftrightarrow \Delta Ep = -W_{x_1}^{x_2} = -25\text{ J}.$

**b)** Como Ep(x = $x_1$) = 0, $\Delta Ep = Ep_{x_2} - Ep_{x_1} = Ep_{x_2} = -25\text{ J}.$

✻✻✻✻✻✻✻✪✻✻✻✻✻✻✻

**27** Calcula la energía potencial de una masa de 1 kg situada a una altura de 1 km sobre la superficie de la Tierra. ¿Qué error relativo se comete al utilizar la expresión EP = m · g · h para calcular la energía potencial?

✻✻✻✻✻✻✻✪✻✻✻✻✻✻✻

$$\Delta Ep = -GM_T \cdot m \cdot \left( \frac{1}{R+h} - \frac{1}{R} \right) = -6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 1 \cdot \left( \frac{1}{6{,}37 \cdot 10^6 + 10^3} - \frac{1}{6{,}37 \cdot 10^6} \right) = 9828{,}34\text{ J}$$

$\Delta Ep(h) = mgh = 1\text{kg} \cdot 9{,}81\text{ m/s}^2 \cdot 1000\text{ m} = 9810\text{ J}.$

El error relativo cometido es, pues,:

$$\varepsilon_r = \frac{|\Delta Ep - \Delta Ep(h)|}{\Delta Ep} \cdot 100 = \frac{|9828{,}34 - 9810|}{9828{,}34} \cdot 100 \approx 0{,}19\ \%$$

✻✻✻✻✻✻✻✪✻✻✻✻✻✻✻

**28** Calcula la energía potencial de un cuerpo de 1 kg situado a una altura de 100 km sobre la superficie de la Tierra. ¿Qué error relativo se comete al utilizar la expresión EP = m · g · h para calcular la energía potencial?

✻✻✻✻✻✻✻✪✻✻✻✻✻✻✻

$$\Delta Ep = -GM_T \cdot m \cdot \left(\frac{1}{R+h} - \frac{1}{R}\right) = -6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{6{,}37 \cdot 10^6 + 10^5} - \frac{1}{6{,}37 \cdot 10^6}\right) = 967794{,}85\ J$$

$\Delta Ep(h) = mgh = 1kg \cdot 9{,}81\ m/s^2 \cdot 100\ 000\ m = 981\ 000\ J.$

El error relativo cometido es, pues,:

$$\varepsilon_r = \frac{|\Delta Ep - \Delta Ep(h)|}{\Delta Ep} \cdot 100 = \frac{|967794{,}85 - 981000|}{967794{,}85} \cdot 100 \approx 1{,}36\ \%$$

**29** ¿Qué relación numérica existe entre la energía cinética y la energía potencial de un satélite que está en órbita circular alrededor de la Tierra?

$$\left\{\begin{array}{l} Ec = \frac{1}{2} G \frac{M_T \cdot m}{r} \\ Ep = -G \frac{M_T \cdot m}{r} \end{array}\right. \text{ en valor absoluto } Ec = \frac{1}{2} Ep$$

**30** Calcula la energía total de un satélite artificial de 100 kg situado en una órbita circular terrestre a 300 km de altura sobre la superficie.

$$Em = Ec + Ep = \frac{1}{2} m \frac{G \cdot M_T}{(R_T + h)} - m \frac{G \cdot M_T}{(R_T + h)} = -\frac{1}{2} m \frac{G \cdot M_T}{(R_T + h)} = -\frac{1}{2} 100 \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{6{,}37 \cdot 10^6 + 3 \cdot 10^5} = -2{,}99 \cdot 10^9\ J.$$

**31** ¿Se realiza trabajo cuando se desplaza una masa por una superficie equipotencial?

No ya que entre dos puntos de una misma línea equipotencial el potencial no varía ($\Delta V = V_2 - V_1 = 0$) y, como $W = m \cdot \Delta V$, si $\Delta V = 0 \Rightarrow W = 0$.

① Explica por qué la velocidad de un planeta es mayor en el perihelio que en el afelio.

Es una consecuencia de la ley de las áreas, la constancia del momento angular, es decir, cuando el planeta está más alejado del Sol (afelio) su velocidad es menor que cuando está más cercano a ella (perihelio) ya que distancia y velocidad han de ser inversamente proporcionales para que se conserve el momento angular. En el afelio y en el perihelio, el momento angular *L* es el producto de la masa del planeta, por su velocidad y por su distancia al centro del Sol.

$$L = mr_1 \cdot v_1 = mr_2 \cdot v_2$$

② Imagina que se ha descubierto un pequeño planeta con un período de 5 años. ¿Cuál debería ser su distancia media al Sol?

Si aplicamos la tercera ley de Kepler:

$$\frac{R^3}{T^2} = K \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{K \cdot T^2} = \sqrt[3]{3{,}33 \cdot 10^{18} \frac{m^3}{s^2} \cdot (5 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 s)^2} = 4{,}36 \cdot 10^{11} \text{ m.}$$

③ Un cometa tiene un período estimado de al menos $10^6$ años. ¿Cuál es su distancia media al Sol?

Si aplicamos la tercera ley de Kepler:

$$\frac{R^3}{T^2} = K \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{K \cdot T^2} = \sqrt[3]{3{,}33 \cdot 10^{18} \frac{m^3}{s^2} \cdot (10^6 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 s)^2} = 1{,}49 \cdot 10^{15} \text{ m.}$$

④ Los radios de dos de las lunas de Júpiter son uno el doble que el otro. ¿Cómo son en comparación sus períodos?

Si aplicamos la 3ª ley de Kepler:

$$\frac{T_1^2}{R_1^3} = \frac{T_2^2}{R_2^3} \Leftrightarrow T_1 = T_2 \sqrt{\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3} = T_2 \cdot \sqrt{\left(\frac{2R_2}{R_2}\right)^3} = T_2 \cdot \sqrt{(2)^3} = 2\sqrt{2} T_2$$

⑤ Explica cómo es posible estimar la masa del Sol, conocidos el radio de la órbita y el período de revolución de algunos de sus planetas.

Igualando la fuerza gravitatoria de atracción Planeta - Sol a la fuerza centrífuga con que gira alrededor del Sol:

$$F_G = F_C \Rightarrow G \frac{M_S \cdot M_P}{R^2} = M_P \frac{v^2}{R} = M_P \cdot \omega^2 \cdot R = M_P \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot R \Leftrightarrow M_S = \frac{4\pi^2 R^3}{G \cdot T^2}$$

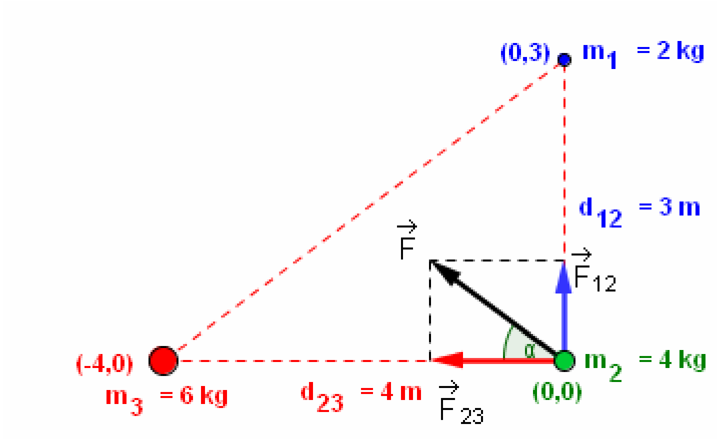
Como $4\pi^2/G$ es constante y conocido, la masa del Sol queda en función del radio y el período que se suponen conocidos.

⑥ Sabiendo que la Tierra tarda 365 días en dar una vuelta alrededor del Sol y que su distancia media es de $1{,}49 \cdot 10^8$ km, obtener la masa del Sol suponiendo que la órbita es circular.

Igualamos la fuerza gravitatoria de atracción Tierra Sol a la fuerza centrífuga con que gira la Tierra alrededor del Sol:

$$F_G = F_C \Rightarrow G\frac{M_S \cdot M_T}{R^2} = M_T\frac{v^2}{R} = M_T\cdot\omega^2\cdot R = M_T\frac{4\pi^2}{T^2}\cdot R \Leftrightarrow M_S = \frac{4\pi^2 R^3}{G\cdot T^2} = \frac{4\pi^2\cdot(1{,}49\cdot 10^{11})^3}{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot(1\cdot 365\cdot 24\cdot 3600)^2} = 1{,}97\cdot 10^{30}\,\text{kg.}$$

⑦ *Tres esferas uniformes de masas 2 kg, 4 kg y 6 kg se colocan en los vértices de un triángulo rectángulo, en las coordenadas (0, 3) m, (0, 0) m y (-4, 0) m, respectivamente. Calcula la fuerza gravitatoria sobre la masa de 4 kg.*




$$\vec{F} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{23}$$

Hallamos primero los módulos de los vectores usando la ley de Gravitación Universal:

$$F_{12} = G\frac{m_1\cdot m_2}{d_{12}^2} = 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{2\cdot 4}{3^2} = 5{,}93\cdot 10^{-11}\,\text{N}$$

$$F_{23} = G\frac{m_3\cdot m_2}{d_{23}^2} = 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{6\cdot 4}{4^2} = 1\cdot 10^{-10}\,\text{N}$$

Como las fuerzas se dirigen según los ejes de coordenadas su resultante será su suma tendiendo en cuenta que $F_{23}$ al ir hacia la izquierda tiene que ser negativa:

$$\vec{F} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{23} = 5{,}93\cdot 10^{-11}\,\vec{j} - 1\cdot 10^{-10}\,\vec{i}\ \text{N}$$

Su módulo: $F = \sqrt{F_{12}^2 + F_{23}^2} = \sqrt{(1\cdot 10^{-10})^2 + (5{,}93\cdot 10^{-11})^2} = 1{,}16\cdot 10^{-10}\,\text{N}$

⑧ *Calcula el momento angular de la Luna en su movimiento alrededor de la Tierra, suponiendo que su período es de 28 días.*

$$L = M_L\cdot r\cdot v = M_L\cdot r_{TL}^2\cdot w = M_L\cdot r_{TL}^2\cdot\frac{2\pi}{T} = 7{,}349\cdot 10^{22}\cdot(3{,}844\cdot 10^8)^2\cdot\frac{2\pi}{28\cdot 24\cdot 3600} = 2{,}82\cdot 10^{34}\,\frac{\text{kg}\cdot\text{m}^2}{\text{s}}$$

⑨ *¿A qué distancia de la Luna se encuentra un punto en el que la interacción Tierra-Luna es nula?*

Primero hallamos un punto intermedio entre la Tierra y la Luna, a una distancia x de la Tierra:

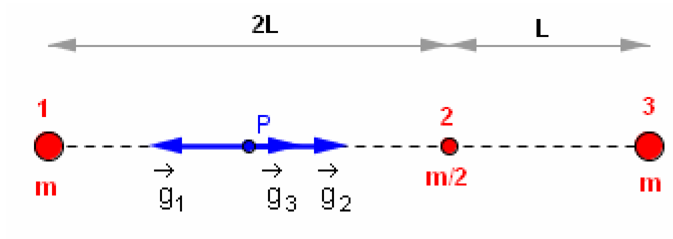
$$F_T = F_L \Leftrightarrow G\frac{M_T\cdot m}{x^2} = G\frac{M_L\cdot m}{(d_{TL}-x)^2} \Leftrightarrow \frac{81 M_L}{x^2} = \frac{M_L}{(d_{TL}-x)^2} \Leftrightarrow \left(\frac{d_{TL}-x}{x}\right)^2 = \frac{1}{81} \Leftrightarrow \frac{d_{TL}}{x} - 1 = \frac{1}{\sqrt{81}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{d_{TL}}{x} = 1 + \frac{1}{9} = \frac{10}{9} \Leftrightarrow x = \frac{9}{10} d_{TL} = \frac{9}{10} 3{,}84 \cdot 10^8 \, m = 3{,}456 \cdot 10^8 \, m$$, luego la distancia a la Luna es:

$$d - x = d - \frac{9}{10} d = \frac{1}{10} d = 3{,}84 \cdot 10^7 \, m.$$

**10** Tres masas puntuales m, m/2 y m se encuentran alineadas de manera que la segunda dista 2l de la primera y la tercera dista 3l de la primera y l de la segunda. Halla la expresión del campo gravitatorio en el punto medio entre las dos primeras.

De acuerdo con el principio de superposición el campo gravitatorio será la composición de los campos que las tres masas producen en ese punto P:




$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \vec{g}_3$$

Como la dirección y sentido están dados en el dibujo, prescindimos del carácter vectorial y calculamos los módulos:

$$g_1 = G\frac{m_1}{d_1^2} = G\frac{m}{L^2} \qquad g_2 = G\frac{m_2}{d_2^2} = G\frac{m/2}{L^2} = G\frac{m}{2L^2} \qquad g_3 = G\frac{m_3}{d_3^2} = G\frac{m}{(2L)^2} = G\frac{m}{4L^2}$$

Ahora podemos hallar el vector resultante:

$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \vec{g}_3 = -G\frac{m}{L^2}\vec{i} + G\frac{m}{2L^2}\vec{i} + G\frac{m}{4L^2}\vec{i} = G\frac{m}{L^2}\vec{i}\left(-1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}G\frac{m}{L^2}\vec{i}$$

**11** ¿A qué altura sobre la superficie de la Tierra el campo gravitatorio es la mitad que en la superficie?

$$\frac{g_0}{g} = \frac{g_0}{g_0/2} = 2 = \frac{G\frac{M}{R^2}}{G\frac{M}{(R+h)^2}} = \left(\frac{R+h}{R}\right)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{R+h}{R}\right) = \sqrt{2} \Leftrightarrow 1 + \frac{h}{R} = \sqrt{2} \Leftrightarrow h = R(\sqrt{2} - 1) = 6{,}37 \cdot 10^6 (\sqrt{2} - 1) =$$

$= 2{,}64 \cdot 10^6$ m.

**12** El planeta Marte tiene un diámetro medio de 6 760 km y su masa es 0,11 veces la de la Tierra. Calcula el valor de la aceleración de la gravedad en Marte.

Si d = 6 760 km ⇒ R = d/2 = 3 380 km.

$$g = G\frac{M_M}{R_M^2} = 6{,}67\cdot10^{-11}\cdot\frac{0{,}11\cdot5{,}98\cdot10^{24}}{(3{,}38\cdot10^6)^2} = 3{,}84\,\frac{m}{s^2}$$

13 Calcula el valor del campo gravitatorio en la superficie de Júpiter si su masa es $1{,}9\cdot 10^{27}$ kg y el radio de Júpiter es $6{,}98\cdot10^{7}$ m.

$$g = G\frac{M_J}{R_J^2} = 6{,}67\cdot10^{-11}\cdot\frac{1{,}9\cdot10^{27}}{(6{,}98\cdot10^7)^2} = 26{,}01\frac{m}{s^2}$$

14 En una órbita de 3 000 km sobre la superficie de la Tierra gira un satélite en órbita circular

**a)** ¿Cuál es su período de revolución?
**b)** ¿Cuál es su velocidad?

**a)** $$T = 2\pi\sqrt{\frac{(R+h)^3}{G\cdot M_T}} = 2\pi\sqrt{\frac{(6{,}37\cdot10^6+3\cdot10^6)^3}{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}}} = 9023\text{ s} = 2\text{ hr }30\text{ min }23\text{ s}$$

**b)** $$v = \sqrt{\frac{G\cdot M_T}{R_T+h}} = \sqrt{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}}{6{,}37\cdot10^6+3\cdot10^6}} = 6524\,\frac{m}{s}$$

15 Un satélite artificial gira alrededor de la Tierra con una velocidad orbital de $1{,}8\cdot10^{4}$ m/s. ¿A qué distancia se encuentra del centro de la Tierra? ¿Cuál es su período de revolución?

$$F_G = F_C \Rightarrow G\frac{M_T\cdot m_s}{r^2} = m_s\cdot\frac{v^2}{r} \Leftrightarrow r = \frac{G\cdot M_T}{v^2} = \frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}}{(1{,}8\cdot10^4)^2} = 1231068\text{m}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G\cdot M_T}} = 2\pi\sqrt{\frac{(1{,}23\cdot10^6)^3}{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}}} = 429{,}1\text{s} = 7\text{ min }9\text{ s}$$

16 Calcula la energía mecánica de un satélite artificial de masa 200 kg que describe una órbita circular a 400 km de altura sobre la superficie terrestre.

$$Em = Ec + Ep = -G\frac{M_T \cdot m}{r} + \frac{1}{2}G\frac{M_T \cdot m}{r} = -\frac{1}{2}G\frac{M_T \cdot m}{r} = -\frac{g_0 \cdot R_T^2 \cdot m}{2r} = -\frac{9{,}81 \cdot (6{,}37 \cdot 10^6)^2 \cdot 200}{2 \cdot (6{,}37 \cdot 10^6 + 4 \cdot 10^5)} = -5{,}88 \cdot 10^9 \text{ J.}$$

①⑦ Un satélite artificial de 500 kg de masa gira en una órbita de 8 000 km de radio. Calcula:

**a)** Su momento angular.
**b)** Su energía cinética.
**c)** Su energía potencial.
**d)** Su energía total.

Hallamos su velocidad de giro en la órbita:

$$F_G = F_C \Rightarrow G\frac{M_T \cdot m_s}{r^2} = m_s \cdot \frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{8 \cdot 10^6}} = 7061\frac{m}{s}$$

**a)** $L = m \cdot r \cdot v = 500 \text{ kg} \cdot 8 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot 7061 \text{ m/s} = 2{,}82 \cdot 10^{13} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$

**b)** $Ec = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 500 \cdot (7061)^2 = 1{,}246 \cdot 10^{10} \text{ J.}$

**c)** $Ep = -G\frac{M_T \cdot m}{r} = -6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 500}{8 \cdot 10^6} = -2{,}49 \cdot 10^{10} \text{ J.}$

**d)** La energía mecánica es suma de la cinética y potencial: $Em = Ec + Ep = 1{,}246 \cdot 10^{10} \text{ J} - 2{,}49 \cdot 10^{10} \text{ J} = -1{,}244 \cdot 10^{10} \text{ J.}$

①⑧ ¿Cuál es la velocidad mínima que es preciso comunicar a un objeto situado a 1 000 km de altura sobre la superficie de la Tierra para que escape del campo gravitatorio terrestre?

$$v_e = \sqrt{\frac{2G \cdot M_T}{r}} = \sqrt{\frac{2G \cdot M_T}{R_T + h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{6{,}37 \cdot 10^6 + 1 \cdot 10^6}} = 10404\frac{m}{s}$$

①⑨ Un cañón lanza un proyectil perpendicularmente a la superficie terrestre con una velocidad inicial de $10^4$ m/s. Calcula la altura máxima que alcanzará sobre la superficie terrestre.

El proyectil alcanzará una altura tal que la energía potencial en esa altura sea igual a la suma de las energías cinética y potencial en el punto de lanzamiento (superficie terrestre):

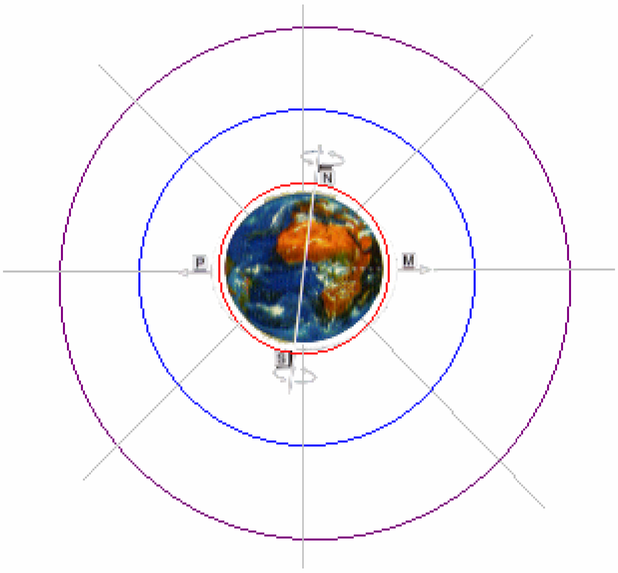
$$Ec_s + Ep_s = Ep_h \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M_T \cdot m}{R_T} = -G\frac{M_T \cdot m}{R_T + h} \Leftrightarrow \frac{v^2}{2GM_T} = \frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + h} \Leftrightarrow h = \frac{1}{\frac{1}{R_T} - \frac{v^2}{2GM_T}} - R_T =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{6{,}37 \cdot 10^6} - \frac{(10^4)^2}{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}} - 6{,}37 \cdot 10^6 \approx 2{,}52 \cdot 10^7 \text{ m}$$

②⓪ Distingue entre líneas de fuerza y superficies equipotenciales.

✻✻✻✾✾✾✪✾✾✾✻✻✻

El campo gravitatorio se visualiza a través de unas líneas imaginarias que se llaman **líneas de fuerza**. Son la trayectoria que seguiría la unidad de masa dejada en libertad dentro del campo gravitatorio, es decir, parten del infinito y van a parar a la masa o masas que crean el campo. Las líneas de fuerza son tangentes en cada punto al vector $\vec{g}$.La intensidad de las líneas de fuerza es proporcional a la intensidad del campo. Las líneas de fuerza no pueden cortarse, ya que esto supondría la existencia de dos valores del campo en un mismo punto. En puntos próximos a la superficie pueden considerarse paralelas y equidistantes.



Una superficie equipotencial es el lugar geométrico de todos los puntos del espacio que tienen el mismo potencial. Para una masa m son superficies esféricas centradas en la masa. Las líneas de fuerza son perpendiculares a las superficies equipotenciales y están más juntas donde el campo es más intenso. Como las líneas de fuerza no pueden estar en contacto pues ello supondría que habría puntos del campo con dos potenciales diferentes.

✻✻✻✾✾✾✪✾✾✾✻✻✻

②① ¿Cómo varía el potencial gravitatorio creado por una masa M, según nos acerquemos o nos alejemos de ella?

✻✻✻✾✾✾✪✾✾✾✻✻✻

Como $V = -G\frac{M}{r}$ el potencial es inversamente proporcional a la distancia a la masa (M) y negativo, si nos acercamos el potencial se hace más negativo (aumenta su valor absoluto y disminuye) por el contrario, si nos alejamos su valor absoluto disminuye y aumenta.

✻✻✻✾✾✾✪✾✾✾✻✻✻

②② Dos masas iguales de 1 kg de masa cada una se sitúan en los puntos (3, 0) y (0, 4) en un sistema rectangular. Determina el potencial gravitatorio en el origen de coordenadas.

✻✻✻✾✾✾✪✾✾✾✻✻✻

Suponemos las distancias en metros.
Aplicamos el principio de superposición de potenciales:

$$V = V_1 + V_2 = -G\frac{m}{r_1} - G\frac{m}{r_2} = -G\cdot m\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right) = -6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 1\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) = 3{,}89\cdot 10^{-11}\ \frac{J}{kg}$$

✻✻✻✾✾✾✪✾✾✾✻✻✻

②③ ¿Cuánto valen el potencial gravitatorio y la intensidad de campo gravitatorio creado por la Tierra en un punto de su superficie?

$$g = G\frac{M_T}{R^2} = 6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{5{,}98\cdot 10^{24}}{(6{,}37\cdot 10^{6})^2} = 9{,}8\frac{m}{s^2}$$

$$V = -G\frac{M_T}{R} = -6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{5{,}98\cdot 10^{24}}{6{,}37\cdot 10^{6}} = -6{,}26\cdot 10^{7}\ \frac{J}{kg}$$

②④ Calcula el potencial gravitatorio creado por un satélite artificial de 1,5 ·10⁶ kg, supuesto puntual, en un punto situado a 3 km de él. ¿Cuál es la energía potencial debida a la interacción entre el satélite y un objeto de 5 kg de masa situado en ese punto?

$$V = -G\frac{m}{r} = -6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{1{,}5\cdot 10^{6}}{3\cdot 10^{3}} = -3{,}335\cdot 10^{-8}\ \frac{J}{kg}$$

$Ep = m_1 \cdot V = 5\ kg \cdot (-3{,}335\cdot 10^{-8} J/kg) = -\ 1{,}67\cdot 10^{-7}\ J.$