③② Calcula la rapidez orbital de un satélite artificial alrededor de la Tierra para que el radio de su órbita sea el doble del radio de la Tierra.

Datos: $R_T = 6\,370$ ***km***, $g_o = 9{,}8\ m/s^2$.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

Radio orbital del satélite = r = $2R_T$

La fuerza de atracción gravitatoria de la Tierra ha de ser compensada con la fuerza de centrífuga debida al giro del satélite en torno de la Tierra :

$$F_G = F_C \Leftrightarrow G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{GM}{r^2}\cdot r} = \sqrt{\frac{GM}{4R^2}2R} = \sqrt{\frac{GM}{R^2}\cdot\frac{R}{2}} = \sqrt{g_0\frac{R}{2}} = \sqrt{9{,}8\cdot\frac{6{,}37\cdot10^6}{2}} = 5587\ \frac{m}{s}$$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

③③ ¿Podrá escapar de la atracción lunar un cohete si se le dota de una rapidez inicial en la superficie lunar de 2 km/s?

Datos: $M_L = 7{,}35\cdot10^{22}$ kg, $R_L = 1{,}74\cdot10^6$ m.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

Velocidad del cohete = v = 2 000 m/s

Hallemos la velocidad de escape necesaria en la superficie lunar y comparemos con la que se le ha comunicado al cohete:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM_L}{R_L}} = \sqrt{\frac{2\cdot6{,}672\cdot10^{-11}7{,}35\cdot10^{22}}{1{,}74\cdot10^6}} \approx 2374\ \frac{m}{s} > v = 2000\ \frac{m}{s}$$

Como la velocidad de escape (v_e) que se necesita es mayor que la que posee, **no podrá escapar a la atracción gravitatoria de la Luna.**

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

③④ Se lanza un proyectil desde la superficie terrestre en el sentido en que tiende también a alejarse radialmente del Sol. Si la velocidad de lanzamiento es la de escape para la Tierra, ¿se liberará también el proyectil de la gravitación solar? La distancia Tierra-Sol es aproximadamente 215 radios solares y ¿ el radio solar es 10^6 /3 veces el radio terrestre ?

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

Distancia Tierra-Sol = $215R_S = 215\cdot10^6R_T/3$.

Hallemos la velocidad de escape necesaria para escapar de la atracción gravitatoria del Sol :

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM_S}{d}} = \sqrt{\frac{2GM_S}{R_S + d_{T-S} + R_T}} = \sqrt{\frac{2GM_S}{\frac{10^6}{3}R_T + 215 \cdot 1\frac{10^6}{3}R_T + R_T}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}99 \cdot 10^{30}}{216\frac{10^6}{3} \cdot 6378 \cdot 10^6}} = 24043{,}4\,\frac{m}{s}$$

que es un valor superior a los 11180 m/s que es la velocidad de escapa de la Tierra.

❉❉❉❁❁❂❁❁❉❉❉

③⑤ Un satélite artificial de masa 1 000 kg gira a una altura de 200 km sobre la superficie terrestre. Halla su energía cinética y su energía potencial y compara los resultados.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

Masa del satélite = m = 1 000 kg.
Altura a la que gira = h = 200 km = 2 · 10^5 m.

Para calcular su energía cinética hemos de conocer su rapidez de giro, que calculamos igualando las fuerzas gravitatoria y centrífuga :

$F_G = F_C \Rightarrow G\frac{Mm}{(R+h)^2} = m\frac{v^2}{(R+h)} \Rightarrow E_C = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}G\frac{Mm}{R+h}$, $E_P = -G\frac{Mm}{R+h}$ luego, prescindiendo del signo la energía potencial es el doble de la cinética.

❉❉❉❁❁❂❁❁❉❉❉

* *③⑥ Se lanza un proyectil desde la superficie terrestre con una rapidez igual a la de escape. Determina la relación que hay entre su rapidez, v, y su altura h. Determina también la relación existente entre la aceleración, a, y la altura.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

Como la velocidad a que se lanza es la de escape, la altura a la que llega es infinito, fuera de la superficie terrestre, no tiene sentido la relación v/h sino es para decir que dicha relación es nula (k/∞ = 0).

La aceleración a la velocidad de escape es nula y la altura alcanzada infinito.

❉❉❉❁❁❂❁❁❉❉❉

③⑦ El Vanguard III se lanzó en 1957 y sus alturas en el perigeo y el apogeo eran, respectivamente, 510 km y 3 750 km: El Sputnik I tenía un periodo de rotación de 5 770 s y el semieje mayor de su órbita elíptica era 6 970 km. Con estos datos, calcula el periodo del Vanguard III. ***Dato:* R_T ***= 6 370 km.***

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

Como la suma del perigeo y el apogeo es el eje mayor de la elipse descrita, el semieje mayor de la elipse descrita por el Vanguard III es $r_V = \frac{510 + 3750}{2}\,km = 2130 km$.

Si aplicamos la tercera ley de Kepler a ambos satélites artificiales:

$$\frac{T_V^2}{T_S^2}=\frac{k\cdot r_V^3}{k\cdot r_S^3}=\frac{r_V^3}{r_S^3}\Leftrightarrow T_V=T_S\cdot\sqrt{\left(\frac{r_V}{r_S}\right)^3}=5770s\cdot\sqrt{\left(\frac{2130km}{6970km}\right)^3}=974{,}76$$ s es el período de rotación del Vanguard III.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

③⑧ Desde la superficie de Marte se lanza un objeto. Calcula la velocidad de escape. Calcula la velocidad de escape si se lanza desde una altura de 200 km. ($M = 6{,}4210^{23}$ kg; $R = 3{,}32.10^{6}$ m).

◈◈◈▣▣⦿▣▣◈◈◈

$$v_{e-s}=\sqrt{\frac{2GM}{d}}=\sqrt{\frac{2GM}{R}}=\sqrt{\frac{2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 6{,}42\cdot 10^{23}}{3{,}32\cdot 10^{6}}}\approx 5079\,\frac{m}{s}$$

$$v_{e-h}=\sqrt{\frac{2GM}{d}}=\sqrt{\frac{2GM}{R+h}}=\sqrt{\frac{2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 6{,}42\cdot 10^{23}}{3{,}32\cdot 10^{6}+200\cdot 10^{3}}}\approx 4932{,}6\,\frac{m}{s}$$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

③⑨ Un satélite geoestacionario está situado en el plano del ecuador terrestre, siendo su periodo de giro el mismo que el de la Tierra, por lo que aparenta permanecer sobre el mismo punto de la superficie. ¿A qué distancia del centro de la Tierra debe situarse?

(Datos: R_{Tierra} = 6 370 km, M_{Tierra} = $5{,}98\cdot 10^{24}$ kg, G = $6{,}67\cdot 10^{-11}$ $m^3\ kg^{-1}\ s^{-2}$) (Prueba de acceso)

◈◈◈▣▣⦿▣▣◈◈◈

$$T=\frac{2\pi r}{v}=\frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{G\cdot M_T}{r}}}=2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G\cdot M_T}}\Leftrightarrow r=\sqrt[3]{\frac{GM_T\cdot T^2}{4\pi^2}}=\sqrt[3]{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\cdot(1\cdot 24\cdot 3600)^2}{4\pi^2}}=4{,}225\cdot 10^{7}\,m$$

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

④⓪ Calcula la altura, h, medida desde la superficie de la Tierra a la que habría que situar un satélite para que fuese geoestacionario, es decir, que mantuviese la misma posición relativa respecto de la Tierra. (Prueba de acceso)

◈◈◈▣▣⦿▣▣◈◈◈

$$T=\frac{2\pi r}{v}=\frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{G\cdot M_T}{r}}}=2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G\cdot M_T}}\Leftrightarrow r=\sqrt[3]{\frac{GM_T\cdot T^2}{4\pi^2}}=\sqrt[3]{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\cdot(1\cdot 24\cdot 3600)^2}{4\pi^2}}=4{,}225\cdot 10^{7}\,m$$

Luego la altura h será $h = r - R_T = 4{,}225\cdot 10^{7}$ m – $6{,}370\cdot 10^{6}$ m = $3{,}588\cdot 10^{7}$ m =35 880 km de altura.

✻✻✻❁❁✪❁❁✻✻✻

④① Se lanza verticalmente un satélite de 2 000 kg desde la superficie de la Tierra, y se pide:

a) Energía total necesaria para situarlo en una órbita (supuesta circular) de radio, R = $2R_T$, donde R_T es el radio de la Tierra.

b) Energía mínima necesaria para trasladarlo hasta la Luna.

Datos $d_{T.L} = 60\ R_T$ (Prueba de acceso)

a) $W = (Ec + Ep)_{órbita} - (Ep)_{superficie} = GM_Tm\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2R_T}\right) = GM_Tm\frac{1}{2R_T} = G\frac{M_T}{R_T^2}\cdot\frac{mR_T}{2} = \frac{1}{2}mg_0R_T =$

$= \frac{1}{2}9{,}8\cdot 2000\cdot 6{,}370\cdot 10^6 = 6{,}24\cdot 10^{10}$ J.

b)

$W = (Ec + Ep)_{órbita} - (Ep)_{superficie} = GM_Tm\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{60R_T}\right) = GM_Tm\frac{59}{60R_T} = G\frac{M_T}{R_T^2}\cdot\frac{59mR_T}{60} = \frac{59}{60}mg_0R_T =$

$= \frac{59}{60}9{,}8\cdot 2000\cdot 6{,}370\cdot 10^6 = 1{,}228\cdot 10^{11}$ J.