Ejercicios numéricos

DATOS:
$G = 6{,}672 \cdot 10^{-11}\ Nm^2/kg^2$; $M_{sol} = 1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg ; $M_{Tierra} = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $M_{Luna} = 7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg; $R_{Tierra} = 6\,378$ km; $d_{Tierra\text{-}Sol} = 1{,}495 \cdot 10^{11}$ m ; $d_{Tierra\text{-}Luna} = 3844 \cdot 10^{8}$ m.

LEYES BÁSICAS

1 La tabla siguiente muestra datos de los cuatro satélites de Júpiter estudiados por Galileo. Si se conoce el valor de la constante G, determina, a través de la gráfica correspondiente, la masa de Júpiter.

Satélite	r (km)	T (h)
Io	419 000	42,467
Europa	667 000	85,217
Ganimedes	1 064 000	171,7
Calisto	1 871000	400,533

La masa de un planeta puede hallarse, conocida G, aplicando la 3ª ley de Kepler:

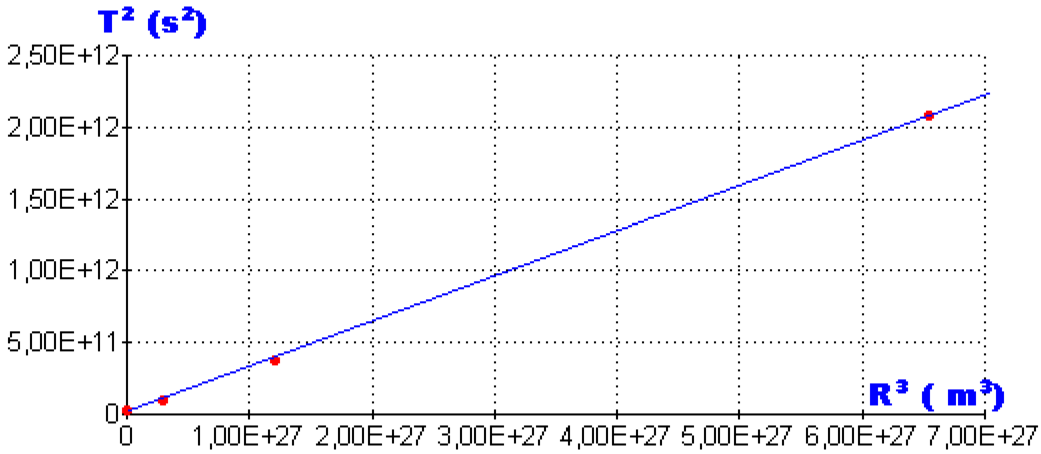
$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3$$

representando r^3 frente a T^2 obtendremos una línea recta cuya pendiente (m) nos proporciona :

$$m = \frac{4\pi^2}{GM} \Rightarrow M = \frac{4\pi^2}{Gm}$$

Tabulemos los valores de r^3 y T^2, los representamos apara comprobarlo y después calculamos la pendiente :

Satélite	R^3 (m^3)	T^2 (s^2)
Io	$7{,}36 \cdot 10^{22}$	$2{,}34 \cdot 10^{10}$
Europa	$2{,}97 \cdot 10^{26}$	$9{,}41 \cdot 10^{10}$
Ganimedes	$1{,}20 \cdot 10^{27}$	$3{,}82 \cdot 10^{11}$
Calisto	$6{,}55 \cdot 10^{27}$	$2{,}08 \cdot 10^{12}$



$$\text{Pendiente} = m = \frac{(T^2)_4 - (T^2)_1}{(R^3)_4 - (R^3)_1} = \frac{2{,}08 \cdot 10^{12} - 2{,}34 \cdot 10^{10}}{6{,}55 \cdot 10^{27} - 7{,}36 \cdot 10^{22}} = 3{,}14 \cdot 10^{-16}$$

La masa de Júpiter es :

$$M = \frac{4\pi^2}{Gm} = \frac{4\pi^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-16}} = 1{,}89 \cdot 10^{27}\ \text{kg}$$

② La Tierra tarda 365 días en completar su órbita alrededor del Sol; si la distancia media entre ellos es $1{,}49 \cdot 10^{11}$ m, calcula la masa del Sol.

$T = 365$ días $= 3{,}15 \cdot 10^{7}$

$R = 1{,}49 \cdot 10^{11}$ m

Aplicamos de nuevo la 3º ley de Kepler :

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} R^3 \Leftrightarrow M = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2} = \frac{4\pi^2 (1{,}49 \cdot 10^{11})^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot (3{,}15 \cdot 10^{7})^2} = 1{,}97 \cdot 10^{30}\ \text{kg}$$

③ Entre el movimiento de una bala de cañón lanzada horizontalmente y el movimiento de la Luna alrededor de la Tierra, no existen diferencias esenciales (si el rozamiento fuera despreciable); se pueden estudiar utilizando las mismas leyes físicas, sobre ambos actúa únicamente la fuerza de atracción gravitatoria de la Tierra, ... Incluso si la bala se lanzara con mucha velocidad (y no chocara con obstáculo alguno), llegaría a describir órbitas alrededor de la Tierra del mismo modo que la Luna'".

Comentar estas frases, razonando pormenorizadamente si se está o no de acuerdo con ellas. (Prueba de acceso)

Una vez que los gases producidos por la ignición de la pólvora han impulsado la bala hacia arriba la única fuerza que actúa es la de atracción gravitatoria de todo el Universo (podemos despreciar las del resto por su lejanía relativa a la Tierra).

Como el impulso recibido por la bala es un impulso inicial que luego cesa, no llegaría a orbitar entorno a la Tierra ya que la atracción gravitatoria de esta iría disminuyendo su energía cinética hasta detenerla y caería de nuevo hacia la Tierra. Para colocarla en órbita necesitamos un impulso continuado hasta llegar a la órbita prevista y después otra cierta energía para comunicarle una fuerza centrífuga igual a la atracción gravitatoria de la Tierra.

④ Calcula las masas de dos bolas de plomo iguales para que, estando en contacto, se ejerzan fuerzas mutuas de 0,001 N.
La densidad del plomo es 11 000 kg/m³ .

Si consideramos la bolas como esferas perfectas, su volumen es = V = $4\pi r^3/3$
Sus masas = m = d · V = 11000 · $4\pi r^3/3$ = 46 076,69 r^3

Aplicando la ley de Gravitación Universal a la dos masas :

$$F = G\frac{m^2}{d^2} \Rightarrow 0{,}001 = 6{,}672\cdot 10^{-11}\frac{(46076{,}69r^3)^2}{4r^2} \Leftrightarrow 0{,}001 = 0{,}0355r^4 \Leftrightarrow r = \sqrt[4]{\frac{0{,}001}{0{,}0355}} \approx 0{,}41\,\text{m}$$

Luego la masa de cada bola de plomo será :

m = 46 076,69 r^3 = 46 076,69· 0,41^3 = 3 176 kg.

⑤

a) Conociendo la distancia Tierra-Luna y el período de revolución de la Luna en torno a la Tierra, ¿cómo se podrá conocer el radio de la órbita de un satélite artificial de período conocido?

b) La Luna describe una órbita circular en torno a la Tierra, con un período de 27,3 días y un radio de 3,84.105 km. A partir de estos datos, determinar el radio de la órbita de un satélite artificial que se encuentra siempre sobre un mismo punto de la Tierra. (Prueba de acceso)

a)

Datos

Distancia Tierra-Luna = d.
Periodo de revolución de la Luna = T_L.

Periodo de revolución del satélite = T_S.

Incógnita

Radio orbital del satélite = r

Si aplicamos la 3ª ley de Kepler a ambos satélites de la Tierra y dividimos una por otra :

$$T_S^2 = \frac{4\pi^2}{GM_T} r^3 ; T_L^2 = \frac{4\pi^2}{GM_T} d^3 \Rightarrow \frac{T_S^2}{T_L^2} = \frac{\frac{4\pi^2}{GM_T} r^3}{\frac{4\pi^2}{GM_T} d^3} = \frac{r^3}{d^3} \Rightarrow r = d \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{T_S}{T_L}\right)^2}$$

b)

Datos

Distancia Tierra-Luna = d= 3,84· 10^8m.
Periodo de revolución de la Luna = T_L = 27,3 días .
Periodo de revolución del satélite = T_s = 1 día(es geoestacionario o sincrónico con la Tierra, y por tanto tiene el mismo periodo que ella).

Incógnita

Radio orbital del satélite = r

$$r = d \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{T_S}{T_L}\right)^2} = 3{,}84 \cdot 10^8 \sqrt[3]{\left(\frac{1}{27{,}3}\right)^2} \approx 4{,}235 \cdot 10^4 \text{ m}$$

❋❋❋❁❁✲❁❁❋❋❋

⑥ El cometa Halley posee un periodo de revolución de 75 años en su órbita elíptica alrededor del Sol, siendo su distancia en el perihelio de 8,910'° m. Calcula la máxima distancia que se separa del Sol, utilizando como datos el periodo de la Tierra y su distancia media al Sol (d_{TS} = 1,49·10^{11} m) y tomando como distancia media del Halley la semisuma de la distancia más corta y la distancia más larga en su órbita elíptica.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

Periodo de revolución del Halley = T_H = 75 años.
Distancia en el perihelio = d_p = 8,9 · 10^{10} m.
Periodo de revolución de la Tierra = T = 1 año
Distancia Tierra-Sol = d = 1,49· 10^{11} m.
Distancia del Halley en el afelio = d_a

De nuevo aplicamos la 3ª ley de Kepler al Sol, la Tierra y el cometa Halley

$$T^2=\frac{4\pi^2}{GM_S}d^3 ; T_H^2=\frac{4\pi^2}{GM_S}r^3 \Rightarrow \frac{T^2}{T_H^2}=\frac{\frac{4\pi^2}{GM_S}d^3}{\frac{4\pi^2}{GM_S}r^3}=\frac{d^3}{r^3}\Rightarrow r=d\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{T_H}{T}\right)^2}=1{,}49\cdot10^{11}\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{75}{1}\right)^2}=2{,}65\cdot10^{12}\ \text{m}$$

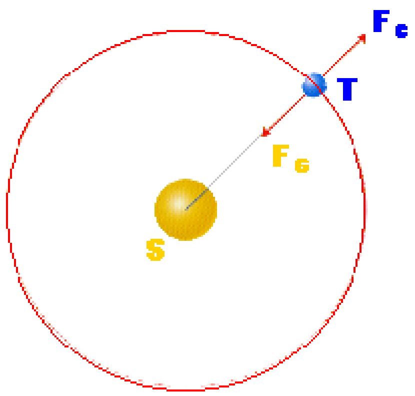
Como se nos dice que tomemos esa distancia como la media entre el perihelio y el afelio :

$$r=\frac{d_p+d_a}{2}\Leftrightarrow d_a=2r-d_p=2\cdot2{,}65\cdot10^{12}-8{,}9\cdot10^{10}=5{,}2108\cdot10^{12}\ \text{m}$$

❉❉❉❁❁✲❁❁❉❉❉

⑦ Explicar por qué a pesar de la atracción gravitatoria entre el Sol y la Tierra, ésta no cae sobre el Sol. (Prueba de acceso)

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈



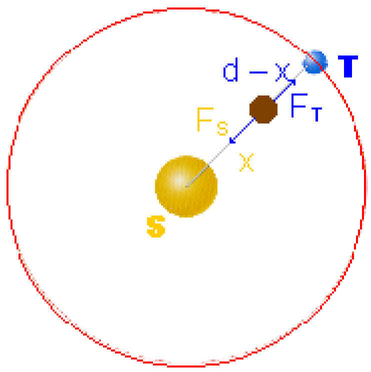
Porque esa fuerza atractiva (F_G) del Sol (S)es contrarrestado por la fuerza centrífuga (F_C) de la Tierra (T) que actúa en la misma dirección y sentido contrario.

❉❉❉❁❁✲❁❁❉❉❉

INTENSIDAD DEL CAMPO GRAVITATORIO

⑧ Determina a qué distancia deberá estar un objeto de la Tierra en la línea que la une con el Sol para que la atracción gravitatoria solar se equilibre con la terrestre.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈



Distancia Tierra-Sol = d = $1{,}495\cdot 10^{11}$ m.
Masa del Sol = M_S = $1{,}99\cdot 10^{30}$ kg.
Masa de la Tierra = $5{,}98\cdot 10^{24}$ kg.
Masa del objeto = m kg
Distancia del objeto al Sol = x m.

Las fuerzas de atracción de la Tierra y del Sol sobre el objeto han de ser iguales :

$$F_S = F_T \Rightarrow G\frac{M_S m}{x^2} = G\frac{M_T m}{(d-x)^2} \Leftrightarrow \left(\frac{d-x}{x}\right)^2 = \frac{M_T}{M_S} \Leftrightarrow \frac{d}{x} - 1 = \sqrt{\frac{M_T}{M_S}} \Leftrightarrow \frac{d}{x} = \sqrt{\frac{M_T}{M_S}} + 1 \Leftrightarrow x = \frac{d}{\sqrt{\frac{M_T}{M_S}} + 1} =$$

$$= \frac{1{,}495 \cdot 10^{11}}{\sqrt{\frac{5{,}98 \cdot 10^{24}}{1{,}99 \cdot 10^{30}}} + 1} = 1{,}492 \cdot 10^{11} \Rightarrow D_T = d - x = 1{,}495 \cdot 10^{11} - 1{,}492 \cdot 10^{11} = 2{,}587 \cdot 10^{8}\ \text{m}$$

9 Determina la intensidad del campo gravitatorio en un punto de la superficie terrestre situado a 40° de latitud y a una altura sobre el nivel del mar de 600 m.

Aplicamos la fórmula de la variación de la intensidad del campo gravitatorio con la latitud:

$$g = 9{,}78039(1+0{,}00529\,\text{sen}^2\ 40^{\circ}) = 9{,}801767\ \text{N/kg}.$$

Y, ahora la variación por la altura :

$$g_h = g\frac{R^2}{(R+h)^2} = 9{,}801767 \cdot \frac{(6{,}378 \cdot 10^6)^2}{(6{,}378 \cdot 10^6 + 600)^2} = 9{,}799923\ \text{N/kg}$$

10 Calcula la masa de la Luna, sabiendo que un cuerpo abandonado cerca de su superficie cae con una aceleración g = 1,62 m/s^2 . Datos: Radio de la Luna = 1,74·10^6 m, G= 6,672·10^{-11} (S.I.)

Aplicamos al fórmula de la intensidad del campo gravitatorio :

$$g = G\frac{M_L}{R^2} \Leftrightarrow M_L = \frac{gR^2}{G} = \frac{1{,}62 \cdot (1{,}74 \cdot 10^6)^2}{6{,}672 \cdot 10^{-11}} = 7{,}35 \cdot 10^{22}\ \text{kg}$$

11 La masa de la Luna es 7,3510^{22} kg y su radio 1,74·10^6 m. ¿Cuál será el periodo de oscilación en la superficie lunar de un péndulo cuyo periodo en la Tierra es de un segundo?

Masa de la Luna = M = 7,35· 10^{22} kg
Radio lunar = r = 1,74· 10^{6} m

Con estos datos hallamos el valor de g en la Luna:

$$g = G\frac{M_L}{r^2} = 6{,}67\cdot 10^{-11}\,\frac{7{,}35\cdot 10^{22}}{(1{,}74\cdot 10^{6})^2} = 1{,}62\,\frac{N}{kg}$$

La fórmula del periodo de un péndulo simple es : $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, en donde l es la longitud y g la gravedad del lugar en que se haya. Para calcular el periodo en la luna dividimos su fórmula entre la del periodo de un péndulo en la Tierra :

$$\frac{T_L}{T_T} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{l}{g_L}}}{2\pi\sqrt{\frac{l}{g_T}}} = \sqrt{\frac{g_T}{g_L}} \Rightarrow T_L = T_T\sqrt{\frac{g_T}{g_L}} = 1\cdot\sqrt{\frac{9{,}81}{1{,}62}} = 2{,}46\ s$$

✻✻✻❁❁✲❁❁✻✻✻

①② Las estrellas de neutrones son muy densas y se cree que giran con gran rapidez angular. Imagina una estrella neutrónica de radio 1 km y cuyo periodo de rotación fuese 1 s; ¿ cuál debería ser su masa para que en un punto de su superficie la gravedad neta fuese justamente mayor que cero?

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

Radio = R =1 000 m
Periodo = 1 s.

Aplicando la 3ª ley de Kepler :

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}R^3 \Leftrightarrow M = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2} = \frac{4\pi^2\cdot 10^9}{6{,}67\cdot 10^{-11}} = 5{,}918\cdot 10^{20}\ kg$$

✻✻✻❁❁✲❁❁✻✻✻

①③ Si un reloj de péndulo funciona bien en París (T = ls, g = 9,806 m/s^2), ¿qué le ocurrirá en el polo y en el ecuador?

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

g = 9,806 m/s^2; g_{polo} = 9,8321 m/s^2 ; $g_{ecuador}$ = 9,7804 m/s^2 ; T = 1 s.

Procedemos por comparación :

$$\frac{T_p}{T}=\frac{2\pi\sqrt{l/g_p}}{2\pi\sqrt{l/g}}=\sqrt{\frac{g}{g_p}}\Rightarrow Tp=T\sqrt{\frac{g}{g_p}}=1\cdot\sqrt{\frac{9,806}{9,8321}}=0,9986\ s$$

Es decir en el polo el periodo del péndulo es menor, tarda menos tiempo en dar una vuelta completa, luego irá adelantado respecto de Paris.

$$\frac{T_e}{T}=\frac{2\pi\sqrt{l/g_e}}{2\pi\sqrt{l/g}}=\sqrt{\frac{g}{g_e}}\Rightarrow Tp=T\sqrt{\frac{g}{g_e}}=1\cdot\sqrt{\frac{9,806}{9,7804}}=1,003\ s$$

Es decir en el ecuador el periodo del péndulo es mayor, tarda más tiempo en dar una vuelta completa, luego retrasará respecto de la hora de París.

①④ Conocidos el valor del radio de la Tierra, que es 6378 km, y el de la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra, $g_0 = 9,8\ m/s^2$, calcula la altura sobre la superficie de la Tierra a la cual el valor de g se reduce a la mitad.

Radio de la Tierra = R_T = $6,378\cdot 10^6$ m.
Aceleración de la gravedad en superficie = g = 9,8 m/s^2.
Aceleración de g a una altura desconocida h = g_h = g/2.

$$g_h=g\left(\frac{1}{1+\frac{h}{R_T}}\right)^2\Rightarrow\frac{g}{g_h}=\frac{g}{g/2}=2=(1+\frac{h}{R_T})^2\Leftrightarrow h=(\sqrt{2}-1)\cdot R_T=(\sqrt{2}-1)6,378\cdot 10^6=2641854\ m$$

①⑤ La Luna, en su movimiento alrededor de la Tierra describe una trayectoria circular de radio $3,84\cdot 10^8$ m y de periodo $2,36\cdot 10^6$ s. Calcula su velocidad y la aceleración que actúa sobre la Luna, dibujando en un esquema ambos vectores.

Radio lunar = R = $3,84\cdot 10^8$ m
Periodo lunar = T = $2,36\cdot 10^6$ s

$$v=\omega R=\frac{2\pi}{T}R=\frac{2\pi\cdot 3,84\cdot 10^8}{2,36\cdot 10^6}=1022,35\ \frac{m}{s}\approx 1022\ \frac{m}{s}$$

$$a_c = \omega v = \omega^2 \cdot R = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R = 2{,}722 \cdot 10^{-3}\ \frac{m}{s^2}$$

16 Si el valor de g en la superficie lunar es 1,96 m/s² y el radio lunar es la cuarta parte del radio terrestre, ¿qué relación hay entre las masas de la Tierra y la Luna? Dato: g_T = 9,806 m/s² .

$$\frac{g_T}{g_L} = \frac{G\frac{M_T}{R_T^2}}{G\frac{M_L}{R_L^2}} = \frac{M_T}{M_L} \cdot \left(\frac{R_L}{R_T}\right)^2 \Rightarrow \frac{M_T}{M_L} = \frac{g_T}{g_L} \cdot \left(\frac{R_T}{R_L}\right)^2 = \frac{9{,}806}{1{,}96}\left(\frac{4R_L}{R_L}\right)^2 \approx 5 \cdot 4^2 = 80$$

La masa de la Tierra es 80 veces superior a la de la Luna.

17 Un astronauta de peso en la Tierra 700 N aterriza en el planeta Venus y al pesarse obtiene un valor de 600 N. Considerando que el diámetro de Venus es aproximadamente el mismo que el de la Tierra, halla la masa de Venus, conociendo la de la Tierra.

La masa del astronauta no varía (la dieta espacial no adelgaza), luego el cociente entre los pesos en realidad es el cociente entre las intensidades del campo gravitatorio en los planetas :

$$\frac{P_T}{P_V} = \frac{700}{600} = \frac{7}{6} = \frac{m \cdot g_T}{m \cdot g_V} = \frac{g_T}{g_V} = \frac{G\frac{M_T}{R_T^2}}{G\frac{M_V}{R_V^2}} = \frac{M_T}{M_V} \cdot \left(\frac{R_V}{R_T}\right)^2 \Rightarrow \frac{M_T}{M_V} = \frac{g_T}{g_V} \cdot \left(\frac{R_T}{R_V}\right)^2 = \frac{7}{6} \Rightarrow M_V = \frac{6}{7} M_T$$

18 La masa de la Luna es $7{,}36 \cdot 10^{22}$ kg y su radio $1{,}74 \cdot 10^{6}$ m. Calcula:

a) El valor de la distancia que recorrería una partícula en un segundo de caída libre hacia la Luna, si se abandona en un punto próximo a su superficie.

b) En la superficie terrestre, al colocar un cuerpo en un platillo de una balanza y en el otro pesas por valor de 23,25 g se consigue el equilibrio. ¿Qué pesas tendríamos que utilizar para equilibrar la balanza con el mismo cuerpo, en la superficie de la Luna? (Prueba de acceso)

a) Para calcular la distancia recorrida en caída libre durante un tiempo t = 1 s tenemos que saber cuánto es g_L :

$$g_L = G\frac{M_L}{R_L^2} = 6{,}67\,2\cdot10^{11}\cdot\frac{7{,}36\cdot10^{22}}{(1{,}74\cdot10^{6})^2} = 1{,}62\,\frac{m}{s^2}$$

Ahora podemos utilizar las fórmulas de la cinemática para calcular el espacio recorrido :

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}g_L t^2 = \frac{1}{2}g_L t^2 = \frac{1}{2}1{,}62\cdot1^2 = 0{,}81\,m$$

b) Como la balanza mide masa y no pesos, en la superficie lunar utilizaríamos pesos por valor de 23,25g como en la Tierra.

❋❋❋❁❁✲❁❁❋❋❋

①⑨ Un astronauta llega a Marte y observa que su peso (con todo el equipo) es de 450 N, mientras que en la Tierra es de 1 200 N. Sabiendo que la masa aproximada de la Tierra es 6. 10^{24} kg, que el radio de la Tierra es 6 370 km y que el radio de Marte es de 3 400 km, se pide:

a) Calcular la masa de Marte.

b) Si un péndulo tiene en la Tierra un período de 2 s, ¿qué período observará el astronauta en Marte? (Prueba de acceso)

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

$$\frac{P_T}{P_M} = \frac{1200}{450} = \frac{8}{3} = \frac{m\cdot g_T}{m\cdot g_M} = \frac{g_T}{g_M} = \frac{G\frac{M_T}{R_T^2}}{G\frac{M_M}{R_M^2}} = \frac{M_T}{M_M}\cdot\left(\frac{R_M}{R_T}\right)^2 \Rightarrow \frac{M_T}{M_M} = \frac{g_T}{g_M}\cdot\left(\frac{R_T}{R_M}\right)^2 = \frac{8}{3} \Rightarrow M_M = \frac{3}{8}\cdot\left(\frac{3400}{6370}\right)^2 M_T$$

M_M = 0,107 · M_T = 0,107 · 6· 10^{24} = 6,41· 10^{23} kg

❋❋❋❁❁✲❁❁❋❋❋

②⓪ La distancia entre los centros O_1 y O_2 de dos masas esféricas homogéneas de radios R_1 y R_2 es 30 R_2 . Determinar la relación entre las densidades de ambas esferas si se sabe que el punto sobre el que ejercen la misma fuerza gravitatoria sobre la recta O_1O_2 se encuentra a 20 R_2 de O_1. Dato: R_1 = 10 R_2 . (Prueba de acceso)

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

Radio de la esfera O_2 (pequeña) = R_2.
Radio de la esfera O_1 (grande) = R_1 = 10R_2.
Distancia entre esferas = d = 30 R_2.
Distancia de la esfera O_1 al punto de equilibrio = d_1= 20R_2

Distancia de la esfera O_2 al punto de equilibrio = $d_2 = d - d_1 = 30R_2 - 20R_2 = 10R_2$.
Masa de la esfera grande = $M = \rho_1 \cdot V_1$.
Masa de la esfera pequeña = $m = \rho_2 \cdot V_2$.
Volumen de la esfera grande = $V_1 = \frac{4}{3}\pi R_1^3 = \frac{4}{3}\pi(10R_2)^3 = \frac{4000\pi}{3}R_2^3$.

Volumen de la esfera pequeña = $V_2 = \frac{4}{3}\pi R_2^3$.

Las fuerzas de atracción de las dos esferas sobre una masa m_0 se iguala a una distancia de $20R_2$ de la esfera con centro en O_1 :

$$F_1 = F_2 \Leftrightarrow G\frac{Mm_0}{d_1^2} = G\frac{mm_0}{d_2^2} \Leftrightarrow \frac{\rho_1 V_1}{(20R_2)^2} = \frac{\rho_2 V_2}{100R_2^2} \Leftrightarrow \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{400R_2^2 \cdot V_2}{100R_2^2 \cdot V_1} = \frac{400R_2^2 \cdot \frac{4}{3}\pi R_2^3}{100R_2^2 \cdot \frac{4000}{3}\pi R_2^3} =$$

$$= \frac{400R_2^2 \cdot R_2^3}{R_2^2 \cdot 100000R_2^3} = \frac{400}{100000} = \frac{1}{250}$$

✼✼✼❁❁✲❁❁✼✼✼

21 Determinar la relación entre los periodos de un mismo péndulo simple, oscilando en la superficie de la Tierra y en la superficie de otro planeta cuya masa coincide con la de la Tierra y cuyo radio es 2/3 del de la Tierra. (Prueba de acceso)

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

Sea :

Masa del planeta = M_p = Masa de la Tierra = M_T.
Radio del planeta = $R_p = 2/3\ R_T$.

Escribiendo la fórmula del periodo del péndulo para ambos planetas y después sustituyendo las g por su fórmula tenemos :

$$\frac{T_T}{T_p} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{l}{g_T}}}{2\pi\sqrt{\frac{l}{g_p}}} = \sqrt{\frac{g_p}{g_T}} = \sqrt{\frac{G\frac{M_p}{R_p^2}}{G\frac{M_T}{R_T^2}}} = \sqrt{\frac{M_P}{M_T}\cdot\frac{R_T^2}{R_p^2}} = \sqrt{\frac{M_T}{M_T}\cdot\frac{R_T^2}{\frac{4}{9}R_T^2}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

✼✼✼❁❁✲❁❁✼✼✼

②② Un planeta se mueve alrededor del Sol en una órbita circular con velocidad de 50 km/s, respecto de un sistema de referencia heliocéntrico. Hallar el periodo de este planeta alrededor del Sol. (Prueba de acceso)

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

v = 50 km/s = 50 000 m/s.

$$\text{Como } F_G = F_c \Rightarrow G\frac{Mm}{R^2} = m\frac{v^2}{R} \Leftrightarrow R = \frac{GM}{v^2} = \frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 1{,}97\cdot 10^{30}}{50000^2} = 5{,}26\cdot 10^{10}\,\text{m}$$

$$\text{Y a hora: } v = \omega R = \frac{2\pi}{T}R \Leftrightarrow T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi 5{,}26\cdot 10^{10}}{50000} = 6{,}60\cdot 10^{6}\ \text{s}$$

✻✻✻❁❁✲❁❁✻✻✻

②③ El periodo de rotación de Venus alrededor del Sol es 0,6 veces el periodo correspondiente a la Tierra. Considerando circulares las órbitas de ambos planetas, determinar:

a) Distancia desde Venus hasta el Sol.

b) Velocidad y aceleración de Venus respecto del sistema de referencia heliocéntrico. (Prueba de acceso)

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

a)

Periodo de rotación de la Tierra alrededor del Sol = T.
Periodo de rotación de Venus alrededor del Sol = T_V = 0,6 T.
Distancia Tierra- Sol = d_{TS} = 149,5 · 10^9 m.
Distancia Sol-Venus = d_{VS}
Si aplicamos la 3ª ley de Kepler a los dos planetas :

$$T^2 = \frac{4\pi 2}{GM_S}d_{TS}^3; T_V^2 = \frac{4\pi 2}{GM_S}d_{VS}^3 \Rightarrow \frac{T^2}{T_V^2} = \frac{\frac{4\pi 2}{GM_S}d_{TS}^3}{\frac{4\pi 2}{GM_S}d_{VS}^3} = \left(\frac{d_{TS}}{d_{VS}}\right)^3 \Rightarrow \frac{d_{TS}}{d_{VS}} = \sqrt[3]{\frac{T^2}{T_V^2}} = \sqrt[3]{\frac{T^2}{0{,}6^2 T^2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{0{,}36}} = 1{,}41$$

Luego la distancia de Venus al Sol = d_{VS} = d_{TS}/1,41 = 149,5· 10^9 m/1,41 = 1,06· 10^{11} m.

b) La fuerza gravitatoria ejercida por el Sol sobre Venus es contrarrestada con la fuerza centrífuga producida por la rotación de Venus en torno al Sol :

$$F_G = F_c \Leftrightarrow G\frac{M_S\cdot M_V}{d_{SV}^2} = M_V\cdot a_c \Leftrightarrow a_c = G\frac{M_S}{d_{SV}^2} = 6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{1{,}97\cdot 10^{30}}{\left(1{,}06\cdot 10^{11}\right)^2} \approx 0{,}017\ \frac{m}{s^2}$$

La velocidad lineal se obtiene a partir de la fórmula de la aceleración centrífuga :

$$a_c = \frac{v^2}{d_{VS}} \Leftrightarrow v = \sqrt{a_c \cdot d_{VS}} = \sqrt{0{,}0117 \cdot 1{,}06 \cdot 10^{11}} = 35216\ \frac{m}{s}$$

CÁLCULOS ENERGÉTICOS EN EL CAMPO GRAVITATORIO

24 Determina la energía potencial del sistema formado por la Tierra y el Sol y por la Tierra y la Luna. Compara los resultados y coméntalos.

✲ Sistema Tierra-Sol

$$Ep_{TS} = -G\frac{M_T M_S}{d_{TS}} = -6{,}672 \cdot 10^{-11}\,\frac{5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 1{,}99 \cdot 10^{30}}{1{,}495 \cdot 10^{11}} = -5{,}31 \cdot 10^{33}\ J$$

✲ Sistema Tierra Luna

$$Ep_{TL} = -G\frac{M_T M_L}{d_{TL}} = -6{,}672 \cdot 10^{-11}\,\frac{5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 7{,}35 \cdot 10^{22}}{3{,}844 \cdot 10^{8}} = -7{,}63 \cdot 10^{28}\ J$$

✲ La relación entre ambos :

$$\frac{Ep_{TS}}{Ep_{TL}} = \frac{-5{,}31 \cdot 10^{33}\ J}{-7{,}63 \cdot 10^{28}\ J} \approx 7{,}0 \cdot 10^{4}$$

El sistema Sol - Tierra tiene una Ep unas 70 000 veces superior en valor absoluto que el sistema Tierra – Luna.

25 ¿Con qué rapidez llegará a la superficie terrestre un objeto de masa m que se deja caer desde 500 km sobre la superficie terrestre, partiendo del reposo y despreciando los rozamientos?

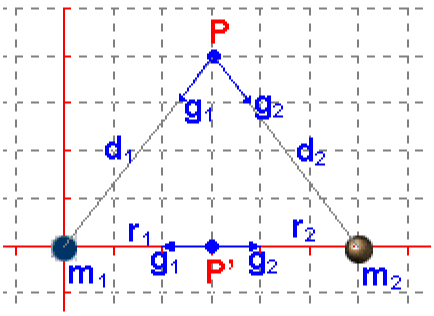
Datos: $g_0 = 9{,}8$ N/kg, $R_T = 6\ 370$ km.

Si aplicamos el teorema de conservación de la energía mecánica (despreciamos el rozamiento a un punto a la altura h (punto2) y a un punto de la superficie terrestre (punto1) :

$$\Delta Ec = \Delta Ep \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv^2 = mg_0\frac{R_T h}{R_T + h} \Leftrightarrow v = \sqrt{2g_0 \cdot \frac{R_T h}{R_T + h}} = \sqrt{2 \cdot 9{,}8\,\frac{6{,}37 \cdot 10^{6} \cdot 5 \cdot 10^{5}}{6{,}37 \cdot 10^{6} + 5 \cdot 10^{5}}} = 3014{,}42\ {}^{m}\!/\!{}_{s}$$

②⑥ Dos esferas de masas 2 kg y 4 kg se colocan, respectivamente, en los puntos A(0,0) y B(6,0) de un sistema de coordenadas, en metros. Calcula: a) El campo gravitatorio en los puntos P(3,4) y P'(3,0). b) El trabajo necesario para transportar otra esfera de 3 kg desde el punto P al P'.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈



a)

Campo gravitatorio en el punto P (3, 4)

Calculamos primero los módulos de la intensidad del campo producido por cada masa, teniendo en cuenta que las distancias d_1 y d_2 del punto a cada carga se hallan aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo formado por las cargas, el punto y el eje horizontal :

$$g_1 = -G\frac{m_1}{d_1^2} = -6{,}67\cdot10^{-11}\frac{2}{\left(\sqrt{3^2+4^2}\right)^2} = -5{,}34\cdot10^{-12}\,\frac{}{\text{kg}}$$

$$g_2 = -G\frac{m_1}{d_1^2} = -6{,}67\cdot10^{-11}\frac{4}{\left(\sqrt{3^2+4^2}\right)^2} = -1{,}07\cdot10^{-11}\,\frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

Para pasar a magnitudes vectoriales necesitamos hallar el ángulo que forman cada vector :

$$\alpha_1 = \text{arctg}\frac{-4}{-3} = 233^0 7'48''\ \text{ está en el tercer cuadrante}$$

$$\alpha_1 = \text{arctg}\frac{-4}{3} = 306^0 52'\ \text{ está en el cuarto cuadrante}$$

El vector $\mathbf{g_1}$ = $g_1\cos\alpha_1$ **i** + $g_1\text{sen}\alpha_1$ **j** = 5,34· 10^{-12}(cos(233º7'48") **i**+sen(233º7'48") **j**) = -3,2· 10^{-12} **i** - 4,27· 10^{-12} **j**

El vector $\mathbf{g_2}$ = $g_2\cos\alpha_2$ **i** + $g_2\text{sen}\alpha_2$ **j** = 1,07· 10^{-11}(cos (306º52') **i**+sen(306º52') **j**)= 6,42· 10^{-12} **i** - 8,56· 10^{-12} **j**

El vector campo resultante en el punto P será la suma vectorial de los vectores campo debido a las dos cargas :

$g_P = g_1+g_2$ = - 3,2· 10^{-12} **i** - 4,27· 10^{-12} **j** + 6,42· 10^{-12} **i** - 8,56· 10^{-12} **j** = (3,22 **i** -12,83 **j**) · 10^{-12} N/kg

Campo gravitatorio en el punto P (3, 0)

Calculamos primero los módulos de la intensidad del campo producido por cada masa, teniendo en cuenta que las distancias $r_1 = r_2 = 3$ m :

$$g_1 = -G\frac{m_1}{d_1^2} = -6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{2}{(3)^2} = -1{,}48\cdot 10^{-11}\ \frac{N}{kg}$$

$$g_2 = -G\frac{m_1}{d_1^2} = -6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{4}{(3)^2} = -2{,}96\cdot 10^{-11}\ \frac{N}{kg}$$

Para pasar a magnitudes vectoriales necesitamos hallar el ángulo que forman cada vector :

$$\alpha_1 = \text{arctg}\frac{0}{-3} = 180^0$$

$$\alpha_1 = \text{arctg}\frac{0}{3} = 0^0$$

El vector $\mathbf{g_1} = g_1\cos\alpha_1\ \mathbf{i} + g_1\text{sen}\alpha_1\ \mathbf{j} = 1{,}48\cdot 10^{-11}(\cos(180^o)\ \mathbf{i}+\text{sen}(180^o)\ \mathbf{j}) = -1{,}48\cdot 10^{-11}\mathbf{i}$

El vector $\mathbf{g_2} = g_2\cos\alpha_2\ \mathbf{i} + g_2\text{sen}\alpha_2\ \mathbf{j} = 2{,}96\cdot 10^{-11}(\cos(0^o)\ \mathbf{i}+\text{sen}(0^o)\ \mathbf{j}) = 2{,}96\cdot 10^{-11}\ \mathbf{i}$

El vector campo resultante en el punto P’ será la suma vectorial de los vectores campo debido a las dos cargas :

$$g_{P'} = g_1+g_2 == -1{,}48\cdot 10^{-11}\mathbf{i} + 2{,}96\cdot 10^{-11}\ \mathbf{i} = 1{,}48\ \mathbf{i}\ \ N/kg$$

b) El trabajo necesario es igual a la variación de energía potencial para trasladar la masa de m = 3 kg de un punto a otro :

Trabajo debido a m_1 :

$$W_{P\to P'} = -Gm_1m\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{d_1}\right) = -6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 2\cdot 3\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) = -5{,}34\cdot 10^{-11}\ J$$

Trabajo debido a m_2 :

$$W_{P\to P'} = -Gm_2m\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{d_2}\right) = -6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 4\cdot 3\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) = -1{,}07\cdot 10^{-10}\ J$$

El trabajo total será la suma : $W = W_1 + W_2 = -5{,}34\cdot 10^{-11} - 1{,}07\cdot 10^{-10}$ **$= -1{,}604\cdot 10^{-10}$ J**

✻✻✻❁❁✲❁❁✻✻✻

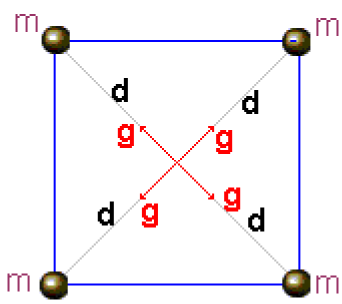
②⑦ Tenemos cuatro partículas iguales de 2 kg de masa en los vértices de un cuadrado de 1 m de lado. Determina:

a) El campo gravitatorio en el centro del cuadrado.

b) El módulo de la fuerza gravitatoria que experimenta cada partícula debido a la presencia de las otras tres.

c) La energía potencial gravitatoria debida a las otras tres. (Prueba de acceso)

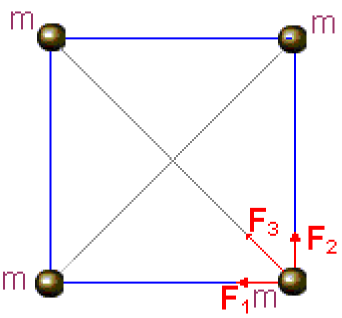
◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈



a) Como la intensidad del campo gravitatorio depende de la masa y la distancia y en este caso ambas son iguales, el módulo del vector intensidad del campo gravitatorio en el centro del cuadrado tendrá el mismo valor, y por la simetría del cuadrado, la suma vectorial será nula pues se neutralizan dos a dos:

$$g_{resultante} = 0$$

b) Hallamos los módulos de las tres fuerzas atractivas, después la suma vectorial y por último el módulo de esta suma:



$$F_1 = F_2 = G\frac{m^2}{r^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{2^2}{1^2} = 2{,}67 \cdot 10^{-10}\ \text{N}$$

para calcular el módulo de F_3 necesitamos hallar la longitud de la diagonal del cuadrado, que es la distancia a que se haya la 3ª masa :

$$r_3 = \sqrt{l^2 + l^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}\ \text{m}$$

El módulo de la tercera fuerza es, pues :

$$F_3 = G\frac{m^2}{r_3^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{2^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = 1{,}334 \cdot 10^{-10}\ \text{N}$$

Para hallar la resultante total hemos de tener en cuenta que al ser iguales los módulos de las dos primeras y formar un ángulo de 90º, su suma irá en la dirección y sentido de la tercera y su módulo será la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados :

$$F_{12} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{2F_1^2} = \sqrt{2F_2^2} = F_1\sqrt{2} = F_2\sqrt{2}\ \text{N}$$

$$F = F_{12} + F_3 = \sqrt{2} \cdot 2{,}67 \cdot 10^{-10} + 1{,}334 \cdot 10^{-10} = 5{,}11 \cdot 10^{-10}\ \text{N}$$

c) Para hallar la energía potencial, calculamos el potencial en la posición en que se encuentra una de ellas, debido a las otras tres, y, después, lo multiplicamos por la masa de la cuarta :

$$V = -Gm\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}\right) = -6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -3{,}61 \cdot 10^{-10}\ \text{J/kg}$$

$$Ep = V \cdot m = -3{,}61 \cdot 10^{-10} \cdot 2 = -7{,}22 \cdot 10^{-10}\ \text{J}$$

✣✣✣❁❁✲❁❁✣✣✣

SATÉLITES Y LANZAMIENTOS DESDE LA SUPERFICIE TERRESTRE

②⑧ Determina la altura a la que hay que colocar en el plano ecuatorial un satélite artificial para que su periodo de rotación sea la mitad que el de la Tierra.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

Como su período de rotación es la mitad del de la Tierra y este es de 1 día T = 0,5 días = 43 200 s.

Si aplicamos la 3ª ley de Kepler al satélite :

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_T} r^3 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{GM_T \cdot T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot (43200)^2}{4\pi^2}} = 2{,}66 \cdot 10^7 \text{ m}$$

Como $r = R_T + h$; $h = r - R_T = 2{,}66 \cdot 10^7 - 7{,}378 \cdot 10^6 = 2{,}02 \cdot 10^7$ m = 20 238 km

❇❇❇❁❁✲❁❁❇❇❇

②⑨ Situamos un satélite en órbita alrededor de la Tierra, a una altura tal que su rapidez orbital es de 8 000 km/h.

a) Calcula la altura.

b) Si por error la rapidez comunicada es 10 800 km/h, explica qué sucederá.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

a) Como la rapidez orbital es v = 8 000 km/h = 2 222,22 m/s, si aplicamos la fórmula y despejamos r :

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \Leftrightarrow r = \frac{GM}{v^2} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{2222{,}22^2} = 80770 \text{ km}$$

Como r = R + h ; h = r – R = 80770 – 6378 = 74 392 km de altura

b) Al ir a mayor velocidad que la velocidad orbital, no describe un órbita estacionaria y ha de bajar a una de radio inferior en la cual pueda girar más rápido, ya que la rapidez y el radio orbital varían inversamente como puede apreciarse en la fórmula anterior.

❇❇❇❁❁✲❁❁❇❇❇

③⓪ Un satélite artificial de 1 000 kg se eleva una altura sobre la Tierra y, allí, se le da un impulso, mediante cohetes propulsores, para que describa una órbita circular con un periodo de 1,5 horas.

a) ¿A qué altura hay que elevarlo, y qué rapidez hay que comunicarle para que ese movimiento tenga lugar?

b) ¿Cuál es el valor del trabajo total realizado para colocarlo en órbita?

Datos: $M_T = 5{,}98\cdot10^{24}$ kg, $R_T = 6{,}37\cdot 10^6$ m.

a) Como su período de rotación es T = 1,5 horas = 5400 s, si aplicamos la 3ª ley de Kepler al satélite :

$$T^2=\frac{4\pi^2}{GM_T}r^3 \Leftrightarrow r=\sqrt[3]{\frac{GM_T\cdot T^2}{4\pi^2}}=\sqrt[3]{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}\cdot(5400)^2}{4\pi^2}}=6{,}65\cdot10^6\ \text{m}$$

Como $r = R_T + h$; $h = r – R_T = 6{,}65\cdot 10^6 – 6{,}37\cdot 10^6 = 2{,}84\cdot 10^5$ m = 284 km de la superficie terrestre.

La rapidez orbital será :

$$v=\sqrt{\frac{GM}{r}} \Leftrightarrow v=\sqrt{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}}{6{,}65\cdot10^6}}\approx 7745\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) Será la suma de la energía necesaria para el lanzamiento más la necesaria para ponerlo en órbita :

$$W=GMm\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{2}mv^2=6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}\cdot10^3\left(\frac{1}{6{,}37\cdot10^6}-\frac{1}{6{,}65\cdot10^6}\right)+\frac{1}{2}10^3\,7745^2=3{,}26\cdot10^{10}\ \text{J}$$

③① Un satélite artificial de 800 kg se eleva hasta una altura de 500 km sobre la superficie terrestre y allí se lanza perpendicularmente al diámetro terrestre que pasa por su posición con una velocidad inicial de 28 800 km/h. Aplicando las leyes de conservación que proceda, halla la máxima altura que alcanzará.

Esta en una posición r_1 = 500 km = $5\cdot 10^5$ m y se le comunica una energía cinética v = 28 800 km/h = 8 000 m/s) que hace que alcance una cierta posición r en la que la que al ser v_2 = 0 sólo tendrá energía potencial, es decir la energía cinética comunicada se invierte en aumentar su energía potencial :

$$Ep_1+Ec=Ep_2;-\frac{GMm}{r_1}+\frac{1}{2}mv^2=-\frac{GMm}{r_2}\Leftrightarrow-\frac{GM}{r_1}+\frac{1}{2}v^2=-\frac{GM}{r_2}\Leftrightarrow-\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}}{(6{,}37\cdot10^6+5\cdot10^5)}+\frac{8000^2}{2}=$$

$$-\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}}{r}\Leftrightarrow-2{,}61\cdot10^7=-\frac{3{,}98866\cdot10^{14}}{r}\Leftrightarrow r=1{,}53\cdot10^8\ \text{m}$$

La altura sobre la superficie es : $h = r – R = 8{,}9\cdot 10^6$ m